Mémoire de DEA
Sous la direction de Rainer BUCKDAHN et Pierre CARDALIAGUET,
Université de Bretagne Occidentale
Département de Mathématiques
6, avenue Victor Le Gorgeu, BP 809
29285 BREST Cedex, FRANCE
soutenance : Lundi 10/09/2001 à 10h

Contrôle stochastique optimal en essentiel-sup.

Alexandre Popier

Université de Rennes 1

Résumé : Etant donné un système d'équations différentielles stochastiques contrôlées avec solution X^u nous y associons la fonction-valeur V définie comme infimum sur tous les contrôles admissibles u du supremum essentiel du coût terminal $g(X_T^u)$; le supremum essentiel est pris sur l'espace probabilisé. Sous des hypothèses très générales nous caractérisons cette fonction V comme la sur-solution de viscosité la plus petite d'une équation géométrique associée et décrivons aussi son comportement à l'instant terminal T en terme de viscosité. Puis nous étudions des conditions plus restrictives sous lesquelles V est l'unique solution de viscosité continue de cette équation géométrique. Cet article généralise les travaux récents de R. Buckdahn, P. Cardaliaguet, M. Quincampoix et H.M. Soner, N. Touzi.

Remerciements

Je tiens à remercier Rainer Buckdahn et Pierre Cardaliaguet pour m'avoir encadré pendant ce stage et pour m'avoir permis de prendre part au Workshop sur le contrôle optimal déterministe et stochastique, à Roscoff du 21 au 23 mai 2001.

Table des matières

Introduction

On considère dans ce travail de DEA le système stochastique contrôlé suivant. Etant donné un instant final T fixé, un mouvement brownien W, on considère l'équation différentielle stochastique (E.D.S.) :

$$(1) \qquad X^{t,x,u}(r) = x + \int_t^r b(s,X^{t,x,u}(s),u(s))ds + \int_t^r \sigma(s,X^{t,x,u}(s),u(s))dW_s,$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, contrôlée par un processus stochastique u dont l'espace d'état U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$.

On connaît bien les résultats sur ces systèmes contrôlés pour un coût final

$$J(t,x,u) = \mathrm{E} \left(g(X^{t,x,u}(T)) \right),$$

et pour une fonction-valeur

$$\mathrm{V}(t,x) = \inf_u J(t,x,u),$$

où g est une fonction donnée et où l'infimum est pris sur l'ensemble des contrôles admissibles (cf. [6]). Avec les hypothèses usuelles des E.D.S. (b et σ bornées et localement Lipschitziennes en x), si on suppose de plus que g est bornée, uniformément continue et que U est compact, V est l'unique solution de viscosité continue de l'équation, dite *équation de programmation dynamique ou de Hamilton-Jacobi-Bellman* :

$$\begin{cases} -\partial_t \mathrm{V} + \mathcal{H}\left(t,x,\nabla \mathrm{V},\nabla^2 \mathrm{V}\right) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n, \\ \mathrm{V}(T,.) = g & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{H}(t,x,q,S) = \sup_{u \in \mathrm{U}} \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q \right).$$

Récemment dans l'article de R. Buckdahn, P. Cardaliaguet et M. Quincampoix (cf. [3]), l'équation vérifiée par V est apparue sous une nouvelle forme. Dans le cas du système contrôlé suivant

$$X^{t,x,u}(r) = x + \int_t^r \sqrt{2}u(s)dW_s,$$

si le coût est défini comme le supremum essentiel pris sur l'espace probabilisé

$$J(t,x,u) = \text{ess-sup}_\Omega \left(g(X^{t,x,u}(T)) \right),$$

la fonction-valeur V, où l'infimum est pris d'abord sur l'ensemble des contrôles possibles puis sur tous les espaces probabilisés, devient l'unique solution de viscosité continue de l'E.D.P. géométrique (cf. [2]):

$$\begin{cases} -\partial_t \mathrm{V} - \Delta \mathrm{V} + \frac{<\nabla^2 \mathrm{V}\nabla \mathrm{V},\nabla \mathrm{V}>}{|\nabla \mathrm{V}|} = 0 & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n, \\ \mathrm{V}(T,.) = g & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Cette équation est appelée *équation du mouvement par courbure moyenne*. Dans le même temps, H.M. Soner et N. Touzi (cf. [9]) ont obtenu eux aussi une équation de programmation dynamique de type géométrique en partant d'un problème de contrôle optimal différent, et ont retrouvé dans un cas l'équation de [3].

Le but de ce travail est donc de savoir ce qu'il reste de ces résultats dans le cas d'un système contrôlé général (1). On conserve les hypothèses du cas «classique»et la fonction-valeur devient :

$$\mathrm{V}(t,x) = \inf_{\nu} \inf_{u \in \mathcal{A}_\nu} \left(\text{ess-sup}_\Omega g(X^{t,x,u}(T)) \right),$$

où $\mathcal{A}_\nu$ est l'ensemble des contrôles définis sur un espace de référence ν, un espace de référence étant un quintuplet $\left(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_s)_{0 \leq s \leq T},W\right)$. Le résultat principal est une caractérisation de V comme la solution de viscosité la plus petite sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de l'E.D.P. géométrique suivante :

$$(2) \qquad \begin{cases} -\mathrm{V}_t(t,x) + F\left(t,x,\nabla \mathrm{V}(t,x),\nabla^2 \mathrm{V}(t,x)\right) = 0 \\ \mathrm{V}(T,x) = g(x) \end{cases}$$

avec :

$$(3) \qquad F(t,x,q,S) = \sup_{u \in \mathrm{U}(t,x,q)} \left[-\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q \right]$$

si $\mathrm{U}(t,x,q) \neq \emptyset$ et $F(t,x,q,S) = -\infty$ sinon. L'ensemble $\mathrm{U}(t,x,q)$ est défini ainsi :

$$(4) \qquad \mathrm{U}(t,x,q) = \left\{ u \in \mathrm{U} | \sigma^*(t,x,u)q = 0 \right\}.$$

Si $q = 0$, $\mathrm{U}(t,x,q) = \mathrm{U}$. On retrouve exactement la même équation que celle obtenue dans [9]. Dans le cas où

$$\begin{array}{l} \sigma(t,x,u) = \sqrt{2}u, \\ b \equiv 0, \\ \mathrm{U} = \mathrm{Co}\ \left\{ (I - a \otimes a),\ \text{t.q. } a \in \mathbb{R}^n, |a| = 1 \right\}, \end{array}$$

on retrouve exactement l'E.D.P. de [3].

Par contre on n'a pas obtenu la continuité de V et l'unicité en tant que solution de viscosité. Pour étudier un peu plus la régularité de V, en particulier près de T, on a introduit deux fonctions $\mathrm{V}^\sharp$ et $\overline{\mathrm{V}}$:

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, & \mathrm{V}^\sharp(t,x) = \limsup\limits_{\substack{(t',x') \to (t,x) \\ p \to +\infty}} \mathrm{V}_p(t',x'), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & \overline{\mathrm{V}}(T,x) = \liminf_{(t,x') \to (T^-,x)} \mathrm{V}(t,x'). \end{cases}$$

Elles permettront de décrire le comportement de V à l'instant T en terme de viscosité. Néanmoins on doit avoir des hypothèses beaucoup plus fortes : noyau $\mathrm{U}(t,x,q)$ toujours non vide, existence d'une section continue et indépendance de b et σ par rapport à (t,x), pour que V soit continue et soit l'unique solution de viscosité de l'équation (2).

Dans la première partie, se trouvent les définitions et notations ainsi que les principaux résultats qui seront démontrés par la suite. La deuxième partie traite de l'approximation de V. Elle reprend essentiellement une partie de [3]. Le troisième chapitre est consacré à la démonstration de la caractérisation de V. L'étude des propriétés de $\mathrm{V}^\sharp$ et $\overline{\mathrm{V}}$ est l'objet du chapitre suivant. Enfin la dernière partie donnera quelques conditions sous lesquelles on a continuité de V et unicité en tant que solution de viscosité.

1 Définitions, résultats principaux

1.1 Mise en place des notations

On considère un ensemble U inclus dans $\mathbb{R}^m$ et un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, une filtration $(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T}$ continue à droite, avec $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ contient l'ensemble des parties négligeables, et enfin un mouvement brownien d-dimensionnel adapté à cette filtration. On note par ν le système de référence probabilisé $\left(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T},W\right)$. On peut maintenant définir l'espace des contrôles $\mathcal{A}_\nu=\mathcal{A}\left(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T},W\right)$ comme l'ensemble de tous les processus définis sur Ω, $\{\mathcal{F}_s\}$-progressivement mesurables à valeurs dans U.
Pour tout couple (t,x) dans $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, et tout processus $u(.)\in\mathcal{A}_\nu$, on considère l'E.D.S. suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} dX^{t,x,u}(s) &=& b(s,X^{t,x,u}(s),u(s))ds+\sigma(s,X^{t,x,u}(s),u(s))dW_s,\\ X^{t,x,u}(t) &=& x,\end{array}\right.$$

où b et σ sont deux fonctions définies sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{U}$, à valeurs dans respectivement $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$ (l'ensemble des matrices à n lignes et d colonnes). On fait les hypothèses suivantes :

$$(\mathrm{H1})\qquad \left\{\begin{array}{rl} i) & \mathrm{U} \text{ est un sous-ensemble compact de } \mathbb{R}^m;\\ ii) & b,\,\sigma \text{ sont bornées et continues sur } [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{U};\\ iii) & b,\,\sigma \text{ sont localement Lipschitziennes par rapport à la variable } x, \text{ i.e.}\\ & \text{pour tout } a>0, \text{ il existe } K_a \text{ tel que si } |x|,|y|\leq a, \text{pour tout } (t,u),\\ & |b(t,x,u)-b(t,y,u)|+|\sigma(t,x,u)-\sigma(t,y,u)|\leq K_a|x-y|.\end{array}\right.$$

Sous ces conditions, l'équation (1) a une unique solution $X^{t,x,u}$ adaptée et continue.
Soit maintenant une fonction $g:\mathbb{R}^n\to R$, bornée et uniformément continue. Pour $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, on définit les fonctions suivantes :

$$(5)\qquad \mathrm{V}_\nu(t,x)=\inf_{u\in\mathcal{A}_\nu}\left(\text{ess-sup}_\Omega g(X^{t,x,u}(T))\right),$$

$$\mathrm{V}(t,x)=\inf_{\nu}\mathrm{V}_\nu(t,x),$$

où ce dernier infimum est pris sur tous les systèmes de référence probabilisés. V est appelée *fonction-valeur*. D'abord comme g est bornée, ces deux fonctions sont bien définies. On peut se ramener sans perte de généralité à :

$$(\mathrm{H2})\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,\ 1\leq g(x)\leq 2.$$

En effet si on considère une bijection θ continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $]1,2[$, on a pour tout $u\in\mathcal{A}_\nu$:

$$\text{ess-sup}_\Omega\theta\left(g(X^{t,x,u}(T))\right)=\theta\left(\text{ess-sup}_\Omega g(X^{t,x,u}(T))\right).$$

On garde cette hypothèse (H2) jusqu'à la fin. On a donc

$$1\leq\mathrm{V}\leq\mathrm{V}_\nu\leq 2.$$

Avant de passer à la suite, on peut déjà remarquer que, comme $X^{T,x,u}(T)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout $u\in\mathcal{A}_\nu$, $\mathrm{V}_\nu(T,x)=g(x)$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{V}(T,x)=g(x).$$

1.2 Notion de solution de viscosité

On va avoir besoin de la notion de solution de viscosité d'une E.D.P. Rappelons que pour une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^p$, on définit respectivement les fonctions f^* et f_* par :

$$f^*(t,x) = \limsup_{(t',x')\to(t,x)} f(t',x');$$

$$f_*(t,x) = \liminf_{(t',x')\to(t,x)} f(t',x').$$

f^* est semi-continue supérieurement et est appelée *la régularisée semi-continue supérieurement de* f. De même f_* est semi-continue inférieurement et est appelée *la régularisée semi-continue inférieurement de* f. On considère une équation de type parabolique sur l'ensemble $[0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$f_t + F(t,x,f,\nabla f,\nabla^2 f) = 0, \tag{6}$$

où F est une fonction définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$ à valeurs réelles et u est une fonction de $t \in [0,T]$ et de $x \in \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. $Sym(n)$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille n. Ici et dans toute la suite, f_t désigne la dérivée première en temps, ∇f désigne le vecteur gradient de f par rapport à la variable x et $\nabla^2 f$ la matrice hessienne de u par rapport à x. Enfin on désigne par $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables une fois en temps et deux fois en espace, avec toutes ces dérivées continues. La définition suivante est celle de [1].

Définition 1.1 (solution de viscosité) *Une application $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une sous-solution de viscosité de l'équation (6) si $f^* < \infty$ et si pour toute fonction $\Phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, telle que $f^* - \Phi$ ait un maximum local en (t_0,x_0), l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\Phi_t(t_0,x_0) + F_* \left(t_0,x_0,f(t_0,x_0),\nabla\Phi(t_0,x_0),\nabla^2\Phi(t_0,x_0)\right) \leq 0.$$

De même une application $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une sur-solution de viscosité de l'équation (6) si $f_* > -\infty$ et si pour toute fonction $\Phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, telle que $f_* - \Phi$ ait un minimum local en (t_0,x_0), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Phi_t(t_0,x_0) + F^* \left(t_0,x_0,f(t_0,x_0),\nabla\Phi(t_0,x_0),\nabla^2\Phi(t_0,x_0)\right) \geq 0.$$

Enfin une application à la fois sous- et sur-solution de viscosité de (6) est appelée solution de viscosité.

Remarque 1.1
1. *Quitte à modifier la fonction Φ, on montre qu'il est équivalent de prendre dans la définition de sous-solution un maximum global au lieu de local, de même dans celle de sur-solution avec un minimum.*
2. *Comme seules les dérivées de Φ interviennent dans la définition, quitte à ajouter une constant à Φ pour une sous-solution on peut supposer que le maximum est égal à 0.*

1.3 Résultats principaux

Le premier résultat important est que sous une hypothèse de convexité (H3), introduite dans la partie suivante, il existe un système de référence probabilisé $\nu = \left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T},P,W\right)$ et un processus de contrôle admissible $v \in \mathcal{A}_\nu$ tels que

$$\mathrm{V}(t,x) = \text{ess-sup}_\Omega g(X^{t,x,v}(T)).$$

En particulier v est un *contrôle optimal*. De plus, V est une sur-solution de viscosité sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de l'équation (2) :

$$-\mathrm{V}_t(t,x) + F\left(t,x,\nabla\mathrm{V}(t,x),\nabla^2\mathrm{V}(t,x)\right) = 0.$$

De plus c'est la plus petite vérifiant la condition (C 1) : $\mathrm{V}(t,x) \geq -K(|x|+1)$, pour un $K>0$ (cf. le théorème 3.3).

Concernant $\mathrm{V}^\sharp$ et $\overline{\mathrm{V}}$, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n, & \mathrm{V}(t,x) \leq \mathrm{V}^\sharp(t,x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & g(x) \leq \overline{\mathrm{V}}(T,x) \leq \mathrm{V}^\sharp(T,x). \end{cases}$$

De plus $\mathrm{V}^\sharp$ est une sous-solution de (2) et vérifie la propriété de viscosité suivante (cf. proposition 4.2) :
si $\mathrm{V}^\sharp(T,\bar{x}) > g(\bar{x})$, et si $\mathrm{V}^\sharp - \phi$ admet un maximum au point $\bar{x}$ pour $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une suite (t_k,x_k,q_k) convergente vers $(T,\bar{x},\nabla\phi(\bar{x}))$, telle que pour tout k : $\mathrm{U}(t_k,x_k,q_k) = \emptyset$. Enfin pour $\overline{\mathrm{V}}$ (cf. proposition 4.3), si pour ϕ de classe C^2, bornée, $\overline{\mathrm{V}} - \phi$ a un minimum global strict au point x_0, alors il existe $u \in \mathrm{U}$ vérifiant :

$$\sigma^*(T,x_0,u).\nabla\phi(x_0) = 0.$$

Si on cherche plus de régularité sur V, on doit ajouter l'hypothèse que pour tout $(t,x,q) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, $\mathrm{U}(t,x,q)$ est non vide. Cette condition implique que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{V}^\sharp(T,x) \leq g(x)$. La continuité de l'opérateur F peut être démontrée en ajoutant l'existence d'une section continue de ce noyau $\mathrm{U}(t,x,q)$. Cette hypothèse a été également introduite dans [9]. Enfin les deux conditions précédentes permettent de montrer que V est continue et est l'unique solution de (2), si b et σ ne dépendent que de u, et pas de (t,x) (voir théorème 5.1). Si cela paraît assez restrictif, on peut quand même remarquer que les cas particuliers de [10] et de [3] remplissent ces hypothèses.

2 Approximation par les V_p

Comme dans [3], on va utiliser une approximation de la fonction V. L'idée est que pour une fonction f dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$:

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Ainsi on définit pour $p \geq 1$ et pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{p,\nu}(t,x) &= \inf_{u\in\mathcal{A}_\nu} \left[\mathrm{E}\left(g(X^{t,x,u}(T))^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} ; \\ \mathrm{V}_p(t,x) &= \inf_\nu \mathrm{V}_{p,\nu}(t,x). \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à des résultats connus de contrôle optimal avec à la place du supremum essentiel, l'espérance.

Remarque 2.1 *Pour tout* $p \geq 1$ *et tout* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $1 \leq V_p(t,x) \leq V_{p,\nu}(t,x) \leq 2$.

Théorème 2.1 *Avec les hypothèses (H1) et (H2), pour tout système de probabilité* ν, $V_p = V_{p,\nu}$, V_p *est continue et* V_p^p *est l'unique solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left(V_p^p\right)_t + \mathcal{H}\left(t,x,\nabla\left(V_p^p\right),\nabla^2\left(V_p^p\right)\right) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n, \\ V_p^p(T,.) = g^p(.) & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{7}$$

avec pour tout $(t,x,q,S) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$ *:*

$$\mathcal{H}(t,x,q,S) = \sup_{u\in U} \left[-\frac{1}{2} Tr\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q\right]. \tag{8}$$

Ce résultat est démontré dans le livre [6] (voir en particulier les théorèmes II.5.1; IV.7.1; V.3.1; V.9.1 et le corollaire V.3.1). Ici comme U est compact, le supremum est toujours atteint. On va en déduire une équation vérifiée cette fois par V_p.

Proposition 2.1 V_p *est solution de viscosité sur* $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ *de :*

$$\begin{aligned} &-\left(V_p\right)_t(t,x) + \sup\nolimits_{u\in U}\Big[-\tfrac{1}{2} Tr\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2 V_p(t,x)\right) \\ &\quad -b(t,x,u).\nabla V_p(t,x) - \tfrac{p-1}{2V_p(t,x)}\|\sigma^*(t,x,u).\nabla V_p(t,x)\|^2\Big] \\ &\quad = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Preuve. Pour prouver que V_p est solution de viscosité de (9), on va successivement montrer que V_p est une sur- et une sous-solution de (9).

• Soit $\Phi \in C^{1,2}$ telle que $\mathrm{V}_p - \Phi$ ait un minimum local strict en un point (t,x). Sur un voisinage de ce point (t,x), on peut toujours supposer que :

$$\left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(s,y) \geq \left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(t,x) = 0.$$

Mais $V_p \geq 1$. Donc localement : $\Phi \geq \frac{1}{2}$, par continuité, et on obtient les inégalités suivantes : $V_p \geq \Phi \geq \frac{1}{2}$, ou de façon équivalente

$$V_p^p \geq \Phi^p \geq \frac{1}{2^p}.$$

On applique (7) à Φ^p, ce qui donne :

$$-p\Phi^{p-1}(t,x)\,(\Phi)_t\,(t,x) + \mathcal{H}\left(t,x,p\Phi^{p-1}(t,x)\nabla\Phi(t,x),\Psi_p(t,x)\right) \geq 0,$$

où Ψ_p est la matrice symétrique suivante :

$$\Psi_p(t,x) = p(p-1)\Phi^{p-2}(t,x)\nabla\Phi(t,x)\,(\nabla\Phi(t,x))^* + p\Phi^{p-1}(t,x)\nabla^2\Phi(t,x).$$

On peut alors diviser par $p\Phi^{p-1}(t,x)$ car $\Phi \geq 1$ et $\mathcal{H}$ est positivement homogène en (q,S):

$$-\,(\Phi)_t\,(t,x) + \mathcal{H}\left(t,x,\nabla(\Phi)(t,x),(p-1)\Phi^{-1}(t,x)\nabla\Phi(t,x)\,(\nabla\Phi(t,x))^* + \nabla^2\Phi(t,x)\right) \geq 0;$$

et alors, comme $(V_p - \Phi)\,(t,x) = 0$:

$$-\,(\Phi)_t\,(t,x) + \mathcal{H}\left(t,x,\nabla\Phi(t,x),(p-1)V_p^{-1}(t,x)\nabla\Phi(t,x)\,(\nabla\Phi(t,x))^* + \nabla^2\Phi(t,x)\right) \geq 0.$$

Donc V_p est une sur-solution.

- La même preuve avec les inégalités inverses montre que V_p est une sous-solution. □

On définit :

$$\beta(t,x,u) := (b(t,x,u),\sigma\sigma^*(t,x,u)), \text{ pour } (t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{U};$$

et on introduit l'hypothèse précédente :

(H3) $\qquad \forall(t,x)$ l'ensemble $\beta(t,x,\mathrm{U}) := \{\beta(t,x,u) \mid u \in \mathrm{U}\}$ est convexe.

Comme dans [3], pp. 5-6, sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on peut prouver que :

(10) $$\forall(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,\ \lim_{p\to+\infty} V_p(t,x) = V(t,x);$$

et qu'il existe un système de référence probabilisé $\nu = \left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T},P,W\right)$ et un processus de contrôle admissible $v \in \mathcal{A}\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T},P,W\right)$ tels que

$$V(t,x) = \text{ess-sup}_\Omega g(X^{t,x,v}(T)).$$

En particulier v est un *contrôle optimal*. Pour démontrer cette propriété, on observe que dans (10) l'inégalité $\lim_{p\to+\infty} V_p \leq V$ est manifeste car pour tout p, $V_p \leq V_q \leq V$. On utilise les arguments donnés dans [5] pour montrer l'inégalité inverse ainsi que l'existence d'un contrôle optimal.

Remarque 2.2 (régularité de V)
Comme la suite de fonctions V_p est croissante, V est le supremum des fonctions continues V_p, ce qui est équivalent à ce que V soit une fonction semi-continue inférieurement.

3 Caractérisation de la fonction V

On va démontré le résultat annoncé plus haut qui caractérise la fonction V comme la sur-solution plus petite d'une E.D.P. géométrique. Pour cela on a besoin d'un théorème de comparaison : si pour f sous-solution et h sur-solution d'une même équation, on a $f \leq h$ au bord du domaine, i.e. en (T,x), est-ce encore vrai partout ?

3.1 Théorème de comparaison

Le théorème que l'on va utiliser est le théorème 4.2 de [7], dont on va rappeler maintenant les hypothèses sur F. Rappelons d'abord qu'un *module* est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, croissante, qui vaut 0 en 0, continue à droite en zéro.

(F 1) La fonction F est continue sur $J_0 = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times Sym(n)$.

(F 2) F est dégénérée elliptique, i.e. $F(t,x,r,q,X) \geq F(t,x,r,q,Y)$ sur J_0 si $X \leq Y$.

(F 3) $-\infty < F_*(t,x,r,0,0) = F^*(t,x,r,0,0) < +\infty$ pour tout $(t,x,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

(F 4) Pour tout $R > 0$

$$c_R = \sup \{|F(t,x,r,q,X)|\,;\ |q|,|X| \leq R,\ (t,x,r,q,X) \in J_0\} < +\infty.$$

(F 5) F satisfait une condition de montonie en r : pour tout $H > 0$, il existe une constante $c_0 = c_0(n,T,H)$ telle que $r \mapsto F(t,x,r,q,X) + c_0 r$ soit croissante pour tout $(t,x,r,q,X) \in J_0$ avec $r < H$.

(F 6) F doit être uniformément continue en q : pour tout $R > \rho > 0$ il existe un module $\theta = \theta_{R\rho}$ tel que

$$|F(t,x,r,p,X) - F(t,x,r,q,X)| \leq \theta(|p-q|),$$

pour tout $(t,x,r,p,X) \in J_0$, $\rho \leq |p|,|q| \leq R$ et $|X| \leq R$.

(F 7) Le comportement proche de $(q,X) = (0,0)$ doit être uniforme en t,x et r : il existe ρ_0 et un module θ_1 tels que

$$F^*(t,x,r,q,X) - F^*(t,x,r,0,0) \leq \theta_1(|q| + |X|)$$
$$F_*(t,x,r,q,X) - F_*(t,x,r,0,0) \geq -\theta_1(|q| + |X|)$$

pourvu que $(t,x,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $|q|,|X| \leq \rho_0$.

(F 8) Il existe un module θ_2 tel que

$$F_*(t,x,r,0,0) - F^*(t,y,r,0,0) \geq -\theta_2(|x-y|),$$

pour tout $(t,x,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

(F 9) Supposons que

$$-\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq \nu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec μ, ν, $\omega \geq 0$. Soit R pris de sorte que $R \geq \max(\mu,\tau) + 2\omega$ avec $\tau = 2\nu + \omega$. Soit $\rho \geq 0$. Alors :

$$F_*(t,x,r,q,A) - F^*(t,y,r,q,-B) \geq -\tilde{\theta}\left(|x-y|(|q|+1) + \nu|x-y|^2\right) - \tilde{\theta}(2\omega)$$

pour $\rho \leq |q| \leq R$ avec un module $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{R\rho}$ indépendant de t,x,y,r,A,B,μ,ν,ω.

On rappelle maintenant le théorème 4.2 de [7].

Théorème 3.1 (théorème de comparaison) *Supposons que F vérifie les neuf hypothèses précédentes. Soient f et h respectivement sous- et sur-solutions de (6) sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, vérifiant :*

(C 1) $f(t,x) \leq K(|x|+1)$, $h(t,x) \geq -K(|x|+1)$ *pour un* $K > 0$ *indépendant de* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*;*

(C 2) il existe un module m_T tel que

$$f^*(T,x) - h_*(T,y) \leq m_T(|x-y|),$$

pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$*;*

(C 3) $f^*(T,x) - h_*(T,y) \leq K(|x-y|+1)$ *pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ *et* $K > 0$ *indépendant de* $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Alors il existe un module m tel que

$$f^*(t,x) - h_*(t,y) \leq m(|x-y|)$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{2n}$.

L'intérêt de ce théorème est qu'en plus de la comparaison il donne dans de nombreux cas l'unicité des solutions de l'E.D.P. (6).

Remarque 3.1 *Si F est indépendant de (t,x,r), i.e. si l'équation (6) s'écrit*

$$f_t + F(\nabla f, \nabla^2 f) = 0,$$

on a le même résultat que dans le théorème précédent, mais il suffit que F vérifie seulement les quatre premières hypothèses (F1)-(F4). C'est le théorème 2.1 de [7].

3.2 V sur-solution de viscosité

Il s'agit maintenant de démontrer que V est sur-solution de l'équation (2). On redonne le lemme technique suivant (voir [1]) :

Lemme 3.1 *Soit $(t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n$ et $\Phi \in C^{1,2}$ tels que $V - \Phi$ a un minimum local strict en (t,x). Alors il existe une suite (t_p,x_p) telle que :*

$$\begin{cases} \lim_{p\to+\infty}(t_p,x_p) = (t,x); \\ \lim_{p\to+\infty} V_p(t_p,x_p) = V(t,x); \\ V_p - \Phi \text{ a un minimum en } (t_p,x_p). \end{cases}$$

Preuve. Soit B la boule fermée de rayon $r > 0$ centrée en (t,x) et $B^* = B \setminus (t,x)$ telles que :

$$\forall (r,y) \in B^*,\ (\mathrm{V} - \Phi)(t,x) < (\mathrm{V} - \Phi)(r,y).$$

Comme B est compacte et $\mathrm{V}_p - \Phi$ est continue, cette fonction admet un minimum en un point $(t_p,x_p) \in B$:

$$\forall (r,y) \in B,\ (\mathrm{V}_p - \Phi)(t_p,x_p) \leq (\mathrm{V}_p - \Phi)(r,y).$$

Ainsi :

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \limsup_p \left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(t_p,x_p) &\leq \limsup_p \left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(r,y) \\ &= \left(\mathrm{V} - \Phi\right)(r,y). \end{aligned}$$

Soit $(s,z) \in B$ tel qu'à une sous-suite près, $(t_p,x_p) \to (s,z)$. Comme la suite $\left(\mathrm{V}_p\right)_p$ est croissante, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \geq k$:

$$\text{(12)} \qquad \left(\mathrm{V}_k - \Phi\right)(t_p,x_p) \leq \left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(t_p,x_p)$$

d'où :

$$\limsup_p \left(\mathrm{V}_k - \Phi\right)(t_p,x_p) \leq \limsup_p \left(\mathrm{V}_p - \Phi\right)(t_p,x_p).$$

Donc d'après (11), pour tout $(r,y) \in B$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_p \left(\mathrm{V}_k - \Phi\right)(t_p,x_p) \leq \left(\mathrm{V} - \Phi\right)(r,y);$$

soit par continuité de $\mathrm{V}_k - \Phi$

$$\left(\mathrm{V}_k - \Phi\right)(s,z) \leq \left(\mathrm{V} - \Phi\right)(r,y);$$

d'où

$$\left(\mathrm{V} - \Phi\right)(s,z) \leq \left(\mathrm{V} - \Phi\right)(r,y).$$

On en déduit que $(s,z) = (t,x)$, car on a affaire à un minimum strict. Donc

$$(t_p,x_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} (t,x).$$

En réécrivant (11) avec $(r,y) = (t,x)$ on obtient :

$$\limsup_p \mathrm{V}_p(t_p,x_p) \leq \mathrm{V}(t,x),$$

et avec (12), pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{V}_k(t,x) \leq \liminf_p \mathrm{V}_p(t_p,x_p).$$

Et finalement on a bien $\lim_p \mathrm{V}_p(t_p,x_p) = \mathrm{V}(t,x)$, ce qui complète la démonstration. $\square$

Théorème 3.2 *V est une sur-solution sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + F\left(t,x,\nabla V(t,x),\nabla^2 V(t,x)\right) = 0 \\ V(T,x) = g(x) \end{cases}$$

avec :

$$F(t,x,q,S) = \sup_{u \in U(t,x,q)} \left[-\frac{1}{2} Tr\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q \right]$$

si $U(t,x,q) \neq \emptyset$ et $F(t,x,q,S) = -\infty$ sinon. L'ensemble $U(t,x,q)$ est défini ainsi :

$$U(t,x,q) = \left\{ u \in U | \sigma^*(t,x,u)q = 0 \right\}.$$

Si $q = 0$, $U(t,x,q) = U$.

Preuve. Soient $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in C^{1,2}$ tels que $\mathrm{V}-\Phi$ a un minimum local strict en (t,x). Alors (voir le lemme précédent) il existe une suite (t_p,x_p) telle que :

$$\begin{cases} \lim_{p\to+\infty}(t_p,x_p) = (t,x); \\ \lim_{p\to+\infty} \mathrm{V}_p(t_p,x_p) = \mathrm{V}(t,x); \\ \mathrm{V}_p - \Phi \text{ has a minimum at } (t_p,x_p). \end{cases}$$

Comme V_p est une sur-solution de l'équation (9) :

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) + \sup_{u\in\mathrm{U}}\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) \\ &\quad -b(t_p,x_p,u).\nabla\Phi(t_p,x_p) - \frac{p-1}{2\mathrm{V}_p(t_p,x_p)}\|\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2\Big] \\ &\quad \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $u_p \in \mathrm{U}$ tel que $\sup_{\mathrm{U}}[\ldots]$ est atteint au point u_p. Un tel état de contrôle u_p existe car les fonctions b et σ sont continues sur U et U est compact. Donc on a pour tout p :

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) \\ &\quad -b(t_p,x_p,u_p).\nabla\Phi(t_p,x_p) - \frac{p-1}{2\mathrm{V}_p(t_p,x_p)}\|\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2 \\ &\quad \geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

De plus comme U est compact, quitte à prendre une sous-suite, la suite (u_p) converge vers $u \in \mathrm{U}$. La fonction V_p est bornée, et si on considère les limites suivantes :

i) $\lim_p \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) - b(t_p,x_p,u_p).\nabla\Phi(t_p,x_p)\right)$
ii) $\lim_p \|\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2$

ces limites existent dans $\mathbb{R}$ par continuité. Si la seconde limite n'est pas égale à 0, il existe un entier p tel que l'inégalité (13) n'est plus vérifiée. Ainsi on a :

$$\sigma^*(t,x,u)\nabla\Phi(t,x) = 0,$$

i.e. u est dans $\mathrm{U}(t,x,\nabla\Phi(t,x))$; en particulier $\mathrm{U}(t,x,\nabla\Phi(t,x))$ est non vide. L' inégalité (13) nous donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) - b(t_p,x_p,u_p).\nabla\Phi(t_p,x_p) \\ \geq \frac{p-1}{2\mathrm{V}_p(t_p,x_p)}\|\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$ on obtient :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\Phi(t,x)\right) - b(t,x,u).\nabla\Phi(t,x) \geq 0.$$

Pour conclure la fonction V est une sur-solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\mathrm{V}_t(t,x) + F\left(t,x,\nabla \mathrm{V}(t,x),\nabla^2 \mathrm{V}(t,x)\right) = 0; \\ \mathrm{V}(T,x) = g(x). \end{cases}$$

□

Remarque 3.2 *On a également prouvé que si $V - \Phi$ a un minimum en (t,x), alors l'ensemble $U(t,x,\nabla\Phi(t,x))$ n'est pas vide.*

L'E.D.P. (2) obtenue est exactement la même E.D.P. que celle obtenue dans [9], p. 10. L'E.D.P. (2) est dite *elliptique* et *géométrique* car l'opérateur F vérifie respectivement les propriétés suivantes :

1. $F(t,x,q,S) \geq F(t,x,q,R)$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$ si $S \leq R$;
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$

$$F(t,x,\lambda q,\lambda S) = \lambda F(t,x,q,S) \text{ et } F(t,x,q,S+\gamma qq^*) = F(t,x,q,S).$$

3.3 V est la plus petite sur-solution

Pour montrer le résultat suivant qui caractérise la fonction-valeur V, on va appliquer le théorème de comparaison 3.1 à la fonction $\mathcal{H}$.

Lemme 3.2 *L'opérateur $\mathcal{H}$ défini par (8) satisfait les conditions (F1)-(F9) du théorème 3.1.*

Preuve.

• (F 1) : on va montrer que $\mathcal{H}$ est continue sur tout le domaine $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$. On peut signaler que pour tout (t,x,u) fixé, $b(t,x,u).q + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right)$ est une fonction linéaire de (q,S). Donc $\mathcal{H}(t,x,.,.)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n \times Sym(n)$.

De plus la fonction $(t,x,q,S,u) \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q$ est uniformément continue sur les compacts. Or U est supposé compact. Donc on en déduit que $\mathcal{H}$ est continue. On a même un peu plus : $\mathcal{H}(t,.,q,S)$ est localement Lipschitzienne pour tout (t,q,S). Soit $a > 0$ et x,y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $|x|,|y| \leq a$. Pour (t,x,q,S) on suppose que le supremum est atteint en u, pour (t,y,q,S) en v. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t,x,q,S) - \mathcal{H}(t,y,q,S) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q \\ &\quad - \sup_{v\in \mathrm{U}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,y,v)S\right) - b(t,y,v).q\right] \\ &\leq -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)S\right) - b(t,x,u).q \\ &\quad +\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,y,u)S\right) + b(t,y,u).q \\ &\leq K_a\left(|S| + |q|\right)|x-y| \qquad (14) \end{aligned}$$

car b et σ sont localement Lipschitziennes, et :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,x,q,S)-\mathcal{H}(t,y,q,S) &\geq -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,v)S\right)-b(t,x,v).q\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,y,v)S\right)+b(t,y,v).q\\ &\geq -K_a\left(|S|+|q|\right)|x-y| \qquad (15)\end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{H}$ est continu sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times Sym(n)$.
• (F 2)-(F 5); (F 7) et (F 8) : immédiat, car $\mathcal{H}(t,x,.,.)$ est continue en $(0,0)\in\mathbb{R}^n\times Sym(n)$, b et σ sont bornées, et enfin $\mathcal{H}$ ne dépend pas de r.
• (F6) :
$\mathcal{H}(t,x,.,S)$ est une fonction convexe donc est localement Lipschitzienne.
• (F 9) :
Si ce qui suit est vérifié pour $\mu,\nu,\omega\geq 0$:

$$-\mu\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\leq\nu\begin{pmatrix} I & -I\\ -I & I\end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

on a :$A+B\leq 2\omega I$ et $|A|,|B|\leq\max(\mu,\tau)$, où $\tau=2\nu+\omega$. En particulier $|A|\leq R$ si $R\geq\max(\mu,\tau)+2\omega$. Donc pour $|q|\leq R$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,-B) &\geq \mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A-2\omega I)\\ &\geq \mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A)\\ &\quad+\mathcal{H}(t,y,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A-2\omega I).\end{aligned}$$

Les inégalités (14) et (15) impliquent que $\mathcal{H}(t,.,q,A)$ est localement Lipschitzienne. Donc il existe un module $\theta=\theta_R$ défini pour $t\geq 0$ par

$$\theta(t)=\sup\left\{|\mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A)|\,;\ |x-y|\leq t,\ |x|\leq t\right\}.$$

θ est bien défini, croissant avec $\theta(0)=0$ et ne dépend que de R, car comme $|A|,|q|\leq R$, si $|x|,|y|\leq a$:

$$|\mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A)|\leq 2K_aR|x-y|.$$

On obtient alors

$$\mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,A)\geq-\theta(|x-y|),$$

et

$$\mathcal{H}(t,x,q,A)-\mathcal{H}(t,y,q,-B)\geq-\theta(|x-y|)-K\left|2\omega I\right|.$$

□

Théorème 3.3 (caractérisation de V) *V est la plus petite sur-solution de (2), vérifiant la condition (C 1) : il existe un nombre réel $K>0$ tel que, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, on ait :*

$$V(t,x)\geq-K(|x|+1).$$

Preuve. Soit W une sur-solution de (2) avec $\mathrm{W}(T,.) \geq g(.)$ et pour laquelle il existe $K > 0$ tel que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, on ait :

$$W(t,x) \geq -K(|x|+1).$$

En particulier W vérifie la condition (C 1). Alors pour $\Phi \in C^{1,2}$ et pour $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{W}-\Phi$ ait un minimum en (t,x) :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u\in\mathrm{U}(t,x,\nabla\Phi(t,x))}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\Phi(t,x)\right) - b(t,x,u).\nabla\Phi(t,x)\right] \geq 0,$$

d'où :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) + \sup_{u\in\mathrm{U}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\Phi(t,x)\right) - b(t,x,u).\nabla\Phi(t,x)\right] \geq 0.$$

Ainsi W est une sur-solution de l'équation (7). Or 1 est une sous-solution de (7) avec $1 \leq g$. Donc grâce au théorème de comparaison cité précédemment (dont les hypothèses sur $\mathcal{H}$ ont été vérifiées dans le lemme précédent), $1 \leq \mathrm{W}$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. En effet il suffit de remarquer pour vérifier les hypothèses (C2) et (C3) avec $f \equiv 1$ et $h \equiv W$ que

$$f^*(T,x) - h_*(T,y) \leq g(x) - g(y).$$

Comme g est uniformément continue, le module m_T existe (C2):

$$m_T(t) = \sup\left\{|g(x)-g(y)|\,;\ |x-y|\leq t\right\};$$

et comme g est bornée, (C3) est immédiat.
Maintenant on va montrer que : $\mathrm{V}_p^p \leq \mathrm{W}^p$ pour tout p, et on en déduira : $\mathrm{V} \leq \mathrm{W}$. On sait que V_p^p est sous-solution de :

$$-\frac{\partial\left(\mathrm{V}_p^p\right)}{\partial t}(t,x) + \mathcal{H}\left(t,x,\nabla\left(\mathrm{V}_p^p\right)(t,x),\nabla^2\left(\mathrm{V}_p^p\right)(t,x)\right) = 0,$$

avec $\mathrm{V}_p^p(T,.) = g()$. L'idée est donc de prouver que W^p est sur-solution de (7). Soit $\Phi \in C^{1,2}$, $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\left(\mathrm{W}^p - \Phi\right)(t,x) = 0 = \min\left(\mathrm{W}^p - \Phi\right).$$

Comme $\mathrm{W}(t,x) \geq 1$, sur un voisinage de (t,x), et donc, sans perte de généralité, partout $\Phi > 0$. Ainsi : $\mathrm{W}^p \geq \Phi > 0$, i.e. $\mathrm{W} \geq \Phi^{\frac{1}{p}} > 0$. Comme W est une sur-solution de (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
-&\frac{\partial\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)}{\partial t}(t,x) \\
&+ \sup_{u\in\mathrm{U}\left(t,x,\nabla\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)(t,x)\right)}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)(t,x)\right)\right. \\
&\left. - b(t,x,u).\nabla\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)(t,x)\right] \geq 0.
\end{aligned}$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned}\mathrm{U}\left(t,x,\nabla\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)(t,x)\right) &= \left\{u\in\mathrm{U}|\sigma^*(t,x,u).\nabla\left(\Phi^{\frac{1}{p}}\right)(t,x)=0\right\}\\ &= \{u\in\mathrm{U}|\sigma^*(t,x,u).\nabla\Phi(t,x)=0\}\\ &= \mathrm{U}\left(t,x,\nabla\Phi(t,x)\right)\end{aligned}$$

car $\Phi\neq 0$. Et on déduit :

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{p}\Phi^{\frac{1}{p}-1}(t,x)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)\\ &\quad+\sup_{u\in\mathrm{U}(t,x,\nabla\Phi(t,x))}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\left(\frac{1}{p}\Phi^{\frac{1}{p}-1}(t,x)\nabla^2\Phi(t,x)\right)\right)\right.\\ &\quad-b(t,x,u).\left(\frac{1}{p}\Phi^{\frac{1}{p}-1}(t,x)\nabla\Phi(t,x)\right)\\ &\quad\left.-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\Phi^{\frac{1}{p}-2}(t,x)\|\sigma^*(t,x,u)\nabla\Phi(t,x)\|^2\right]\geq 0.\end{aligned}$$

Alors :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)+\sup_{u\in\mathrm{U}(t,x,\nabla\Phi(t,x))}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\Phi(t,x)\right)-b(t,x,u).\nabla\Phi(t,x)\right]\geq 0,$$

et :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)+\sup_{u\in\mathrm{U}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\Phi(t,x)\right)-b(t,x,u).\nabla\Phi(t,x)\right]\geq 0.$$

Donc W^p est une sur-solution de (7), et avec le même théorème de comparaison, sachant que $1\leq \mathrm{V}_p^p\leq 2$ et que:

$$\mathrm{V}_p^p(T,x)-W_*(T,y)\leq g(x)-g(y),$$

on peut conclure que :

$$\forall p,\ \mathrm{W}^p\geq \mathrm{V}_p^p\geq 1;$$

d'où $\forall p$, $\mathrm{W}\geq \mathrm{V}_p$ et finalement $\mathrm{W}\geq \mathrm{V}$. □

4 Etude du comportement de V près de T

Par rapport aux résultats de [3], on n'a pas démontré que V est continue. S'il existe des solutions discontinues avec donnée finale discontinue (cf. [9]), ici, sachant que la donnée finale g est continue, on aimerait avoir la continuité des solutions. Pour étudier un peu plus la régularité de V, on introduit les deux fonctions suivantes :

$$
(16) \qquad \begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, & \mathrm{V}^\sharp(t,x) = \limsup\limits_{\substack{(t',x') \to (t,x) \\ p \to +\infty}} \mathrm{V}_p(t',x'), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & \overline{\mathrm{V}}(T,x) = \liminf_{(t,x') \to (T^-,x)} \mathrm{V}(t,x'). \end{cases}
$$

Par définition, $\mathrm{V}^\sharp$ est semi-continue supérieurement. De plus on a les relations :

$$
\begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, & \mathrm{V}(t,x) \leq \mathrm{V}^\sharp(t,x) \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & g(x) \leq \overline{\mathrm{V}}(T,x) \leq \mathrm{V}^\sharp(T,x) \end{cases}
$$

En effet pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, pour toute suite de points $(t_p,x_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} (t,x)$, et pour tout $p \geq k$:

$$
\mathrm{V}_k(t_p,x_p) \leq \mathrm{V}_p(t_p,x_p),
$$

d'où la première inégalité en prenant d'abord la limite supérieure sur p, puis la limite sur k. Ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour toute suite de points $(t_p,x_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} (T,x)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$
\mathrm{V}_k(t_p,x_p) \leq \mathrm{V}(t_p,x_p).
$$

Donc en prenant la limite inférieure sur p, sachant que pour tout k, $\mathrm{V}_k(T,.) = g(.)$, on a $g \leq \overline{\mathrm{V}}$. Enfin la dernière vient du fait que $\mathrm{V}^\sharp$ est semi-continue supérieurement, et que $\mathrm{V} \leq \mathrm{V}^* \leq \mathrm{V}^\sharp$.

4.1 Propriétés de $\mathrm{V}^\sharp$

Proposition 4.1 *$\mathrm{V}^\sharp$ est une sous-solution de (2).*

Preuve. On va d'abord montrer que V_p est une sous-solution de (2). Puis on utilisera un théorème de stabilité des solutions de viscosité. Comme V_p est une sous-solution de (9), pour $\Phi \in C^{1,2}$, et (t_p,x_p) tels que $\mathrm{V}_p - \Phi$ a un maximum en (t_p,x_p) :

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_p,x_p) + \sup_{u \in \mathrm{U}} \Bigg[& -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) \\
& -b(t_p,x_p,u).\nabla\Phi(t_p,x_p) - \frac{p-1}{2\mathrm{V}_p(t_p,x_p)}\|\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2 \Bigg] \\
& \leq 0.
\end{aligned}
$$

Donc pour tout $u \in \mathrm{U}$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) + \Big[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right)$$
$$-b(t_p,x_p,u).\nabla\Phi(t_p,x_p) - \frac{p-1}{2\mathrm{V}_p(t_p,x_p)}\|\sigma^*(t_p,x_p,u)\nabla\Phi(t_p,x_p)\|^2\Big]$$
$$\leq 0.$$

Si $\mathrm{U}(t_p,x_p,\nabla\Phi(t_p,x_p))$ est non vide, pour tout $u_p \in \mathrm{U}(t_p,x_p,\nabla\Phi(t_p,x_p))$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_p,x_p) + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t_p,x_p,u_p)\nabla^2\Phi(t_p,x_p)\right) - b(t_p,x_p,u_p).\nabla\Phi(t_p,x_p)\right] \leq 0.$$

Sinon si $\mathrm{U}(t_p,x_p,\nabla\Phi(t_p,x_p)) = \emptyset$, on a trivialement le résultat. Donc V_p est bien une sous-solution de viscosité de (2) :

$$-\frac{\partial \mathrm{V}_p}{\partial t}(t,x) + F_*\left(t,x,\nabla\mathrm{V}_p(t,x),\nabla^2\mathrm{V}_p(t,x)\right) = 0$$

En appliquant le théorème de stabilité 8.7 de [1], $\mathrm{V}^\sharp$ est une sous-solution de (2) :

$$-\frac{\partial \mathrm{V}^\sharp}{\partial t}(t,x) + F_*\left(t,x,\nabla\mathrm{V}^\sharp(t,x),\nabla^2\mathrm{V}^\sharp(t,x)\right) = 0.$$

□

Proposition 4.2 *$V^\sharp$ a la propriété suivante : si $V^\sharp(T,\bar{x}) > g(\bar{x})$, et si $V^\sharp - \phi$ admet un maximum au point $\bar{x}$ pour $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\exists (t_k,x_k,q_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (T,\bar{x},\nabla\phi(\bar{x})) \ \ t.q.\ \ U(t_k,x_k,q_k) = \emptyset$$

Preuve. Supposons que nous ayons une fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{aligned} \forall x \neq \bar{x} \quad & \phi(x) > \mathrm{V}^\sharp(T,x), \\ & \phi(\bar{x}) = \mathrm{V}^\sharp(T,\bar{x}), \end{aligned} \tag{17}$$

et que

$$\mathrm{V}^\sharp(T,\bar{x}) > g(\bar{x}). \tag{18}$$

Remarquons que l'hypothèse (17) implique que la fonction ϕ est minorée par 1. De plus nous ajoutons l'hypothèse suivante : il existe un voisinage (borné) N de $(T,\bar{x},\nabla\phi(\bar{x}))$ tel que pour tout $(t,x,q) \in N$, $\mathrm{U}(t,x,q) \neq \emptyset$.

On définit sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ la fonction suivante

$$\psi_\alpha(t,x) = \alpha(T-t) + \phi(x) + \frac{1}{2}|x-\bar{x}|^2.$$

• Sur ce voisinage N, la fonction

$$(t,x,u) \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\psi_\alpha(t,x)\right) - b(t,x,u).\nabla\psi_\alpha(t,x)$$

ne dépend pas de α et est bornée. Donc il existe un $\alpha > \frac{1}{T}$ pour lequel

$$\alpha + \sup_{u\in \mathrm{U}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(t,x,u)\nabla^2\psi_\alpha(t,x)\right) - b(t,x,u).\nabla\psi_\alpha(t,x)\right] > 1, \tag{19}$$

pourvu que (t,x) soit dans un voisinage de $(T,\bar{x})$. On considère la fonction $\mathrm{V}_p - \psi_\alpha$. Cette fonction a un maximum global sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ en (s_p,y_p). A une sous-suite près, la suite s_p est convergente vers s.

• D'abord on prouve que $s_p > 0$ pour tout $p \geq 1$. Sinon pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{V}_p(t,x) - \phi(x) - \alpha(T-t) - \frac{1}{2}\left|x-\bar{x}\right|^2 \leq \mathrm{V}_p(0,y_p) - \phi(y_p) - \alpha T - \frac{1}{2}\left|y_p-\bar{x}\right|^2,$$

d'où en évaluant ce qui précède en y_p, on obtient pour tout $t\in[0,T]$

$$\alpha t \leq \mathrm{V}_p(0,y_p) - \mathrm{V}_p(t,y_p),$$

et en utilisant le fait que $1 \leq \mathrm{V}_p \leq 2$

$$\alpha t \leq \mathrm{V}_p(0,y_p) - \mathrm{V}_p(t,y_p) \leq 1.$$

Donc comme on a choisi $\alpha > \frac{1}{T}$, on aboutit à une contradiction.

• On considère une suite

$$(r_p,z_p) \to (T,\bar{x})\ (p\to+\infty)$$

vérifiant

$$\mathrm{V}_p(r_p,z_p) \to \mathrm{V}^\sharp(T,\bar{x})\ (p\to+\infty).$$

Par définition de (s_p,y_p)

$$\left(\mathrm{V}_p - \psi_\alpha\right)(s_p,y_p) \geq \mathrm{V}_p(r_p,z_p) - \psi_\alpha(r_p,z_p), \tag{20}$$

et $\mathrm{V}_p(r_p,z_p) - \psi_\alpha(r_p,z_p) \to 0$ quand $p\to+\infty$. Or

$$\left(\mathrm{V}_p - \psi_\alpha\right)(s_p,y_p) = \mathrm{V}_p(s_p,y_p) - \phi(y_p) - \alpha(T-s_p) - \frac{1}{2}\left|y_p-\bar{x}\right|^2,$$

et les suites $\mathrm{V}_p(s_p,y_p)$, $\alpha(T-s_p)$ sont bornées, $\phi(y_p)$ est minorée par 1. Ainsi la suite $(y_p)_p$est bornée, donc à une sous-suite près, converge vers y. S'il existe n_0 tel que pour tout $p\geq n_0$, $s_p = T$, l'inégalité (20) devient :

$$g(y_p) - \phi(y_p) \geq \mathrm{V}_p(r_p,z_p) - \psi_\alpha(r_p,z_p),$$

et par passage à la limite, $g(y) - \phi(y) \geq 0$. Or d'après (17) et (18) :

$$\begin{aligned} \forall x \neq \bar{x} \quad & \phi(x) > \mathrm{V}^\sharp(T,x) \geq g(x), \\ & \phi(\bar{x}) = \mathrm{V}^\sharp(T,\bar{x}) > g(\bar{x}). \end{aligned}$$

Finalement il existe une sous-suite $p_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < s_{p_n} < T.$$

• Maintenant $(s_{p_n},y_{p_n}) \to (s,y)$ $(n \to +\infty)$ et on obtient en prenant dans l'inégalité (20) la limite supérieure en n, sachant que $\mathrm{V}^\sharp$ est semi-continue supérieurement :

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathrm{V}^\sharp(s,y) - \psi_\alpha(s,y)\\ &= \mathrm{V}^\sharp(s,y) - \phi(s,y) - \alpha(T-s) - \frac{1}{2}\left|y-\bar{x}\right|^2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Donc $s = T$ et $y = \bar{x}$, i.e. $(s_{p_n},y_{p_n}) \to (T,\bar{x})$ $(n \to +\infty)$.
• V_p sous-solution sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ donne

$$\begin{aligned}\alpha + \sup_{u\in\mathrm{U}} \Bigg[&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(s_{p_n},y_{p_n},u)\nabla^2\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n})\right)\\ &-b(s_{p_n},y_{p_n},u).\nabla\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n}) - \frac{p_n-1}{2\mathrm{V}_{p_n}(s_{p_n},y_{p_n})}\|\sigma^*(s_{p_n},y_{p_n},u).\nabla\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n})\|^2\Bigg]\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Pour n assez grand, $(s_{p_n},y_{p_n},\nabla\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n}))$ est dans le voisinage N de $(T,\bar{x},\nabla\phi(\bar{x}))$. Ainsi il existe u_{p_n} dans $\mathrm{U}\left(s_{p_n},y_{p_n},\nabla\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n})\right)$, d'où :

$$\alpha + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^*(s_{p_n},y_{p_n},u_{p_n})\nabla^2\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n})\right) - b(s_{p_n},y_{p_n},u_{p_n}).\nabla\psi_\alpha(s_{p_n},y_{p_n})\right] \leq 0,$$

ce qui contredit l'inégalité (19).
• En conclusion il existe une suite (t_k,x_k,q_k) convergente vers $(T,\bar{x},\nabla\phi(\bar{x}))$, telle que pour tout k, $\mathrm{U}(t_k,x_k,q_k) = \emptyset$. □

4.2 Propriétés de $\overline{\mathrm{V}}$

Rappelons la définition de $\overline{\mathrm{V}}$:

$$\overline{\mathrm{V}}(T,x) = \liminf_{(t,x')\to(T^-,x)} \mathrm{V}(t,x').$$

Proposition 4.3 *Si pour ϕ de classe C^2, bornée, $\overline{V} - \phi$ a un minimum global strict au point x_0, alors il existe $u \in U$ vérifiant :*

$$\sigma^*(T,x_0,u).\nabla\phi(x_0) = 0.$$

Preuve. On considère une suite (t_n,x_n) convergente vers (T,x_0) avec $t_n < T$ telle que $\mathrm{V}(t_n,x_n) \to \overline{\mathrm{V}}(T,x_0)$. En définissant pour $\alpha > 0$ la fonction suivante :

$$\phi_n(t,x) = \phi(x) - \alpha|x-x_0|^2 - \frac{(T-t)^2}{T-t_n} + \frac{\ln(T-t)\wedge 0}{(\ln(T-t_n))^2},$$

on obtient :

$$(\mathrm{V} - \phi_n)(t,x) \to +\infty,$$

quand $|x - x_0| \to +\infty$ et $t \to T^-$ car V et ϕ sont bornées et car

$$-\frac{\ln(T-t) \wedge 0}{(\ln(T-t_n))^2} \geq 0.$$

Ainsi la fonction $\mathrm{V} - \phi_n$ admet un minimum en un point $(s_n,y_n) \in]0,T[\times\mathbb{R}^n$. On démontre que :

$$(s_n,y_n) \to (T,x_0).$$

En effet on a par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{V}(s_n,y_n) - \phi_n(s_n,y_n) & \leq & \mathrm{V}(t_n,x_n) - \phi_n(t_n,x_n) \\ & = & \mathrm{V}(t_n,x_n) - \phi(x_n) + \alpha|x_n - x_0|^2 + (T - t_n) + \dfrac{1}{\ln(T-t_n)} \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \overline{\mathrm{V}}(T,x_0) - \phi(x_0); \end{array}$$

et :

$$\mathrm{V}(s_n,y_n) - \phi_n(s_n,y_n) \geq \mathrm{V}(s_n,y_n) - \phi(y_n) + \alpha|y_n - x_0|^2 + \frac{(T-s_n)^2}{T-t_n}. \tag{21}$$

Donc à cause du fait que V et ϕ sont bornées, nécessairement :

$$s_n \to T \ (n \to +\infty)$$

et la suite $\left(\alpha|y_n - x_0|^2\right)_n$ est bornée. A une sous-suite près, y_n converge vers z. En passant à la limite dans (21) :

$$\overline{\mathrm{V}}(T,x_0) - \phi(x_0) \geq \overline{\mathrm{V}}(T,z) - \phi(z)$$

et comme $\overline{\mathrm{V}} - \phi$ a un minimum strict en x_0, $z = x_0$, d'où :

$$y_n \to x_0 \ (n \to +\infty).$$

De la preuve que V est une sur-solution (cf. proposition 3.2 et la remarque qui suit), il existe $u_n \in \mathrm{U}$ tel que :

$$\sigma^*(s_n,y_n,u_n).\nabla\phi_n(s_n,y_n) = 0.$$

Or U est compact, donc on peut supposer $u_n \to u \in \mathrm{U}$. De plus :

$$\nabla\phi_n(s,x) = \nabla\phi(x) - 2\alpha(x - x_0)$$

donc en passant à la limite :

$$\sigma^*(T,x_0,u).\nabla\phi(x_0) = 0.$$

□

5 Régularité et unicité

Jusqu'ici on n'a fait aucune hypothèse de régularité à propos de l'opérateur F. A partir de maintenant on va essayer d'introduire des conditions plus strictives qui permettent de démontrer l'unicité en tant que solution de viscosité et la continuité de V.
Dans cette partie on suppose que la condition suivante est vérifiée :

$$\forall (t,x,q) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ q \neq 0,\ \mathrm{U}(t,x,q) \neq \emptyset. \tag{22}$$

Proposition 5.1 *Avec l'hypothèse (22), on a le résultat suivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ V^\sharp(T,x) \leq g(x).$$

Preuve. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pour lequel : $\mathrm{V}^\sharp(T,x_0) \geq g(x_0)+\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Soit $\beta \geq 4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{\beta}{2}|x-x_0|^2 + g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \geq g(x) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Un tel β existe parce que g est bornée et continue. Soit α assez grand pour que :

$$\alpha T + \frac{\beta}{2}|x-x_0|^2 + g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \geq 3$$

et soit :

$$\Phi(t,x) = \alpha(T-t) + \frac{\beta}{2}|x-x_0|^2 + g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(T,x) & \geq & g(x) + \frac{\varepsilon}{4}; \\ \Phi(0,x) & \geq & 3. \end{array}$$

En conséquence, pour tout p :

$$\Phi(T,x) \geq \mathrm{V}_p(T,x) + \frac{\varepsilon}{4}; \tag{23}$$

$$\Phi(0,x) \geq \mathrm{V}_p(0,x) + 1. \tag{24}$$

Il existe une sous-suite (p_k) et un $(t_k,x_k) \to (T,x_0)$ vérifiant :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{V}_{p_k}(t_k,x_k) = \mathrm{V}^\sharp(T,x_0) \geq g(x_0) + \varepsilon.$$

Donc si k assez grand,

$$\mathrm{V}_{p_k}(t_k,x_k) > \Phi(t_k,x_k) \tag{25}$$

car $\Phi(T,x_0) = g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme les fonctions V_p sont bornées (par 2)

$$\lim_{|x-x_0| \to +\infty} -(\mathrm{V}_{p_k} - \Phi) = +\infty.$$

Ainsi $V_{p_k} - \Phi$ a un maximum local en un point $(s_k,y_k) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Ce maximum est strictement positif d'après (25). Donc des équations (23) et (24), on déduit que $s_k \in]0,T[$. Ainsi $2 \geq V_{p_k}(s_k,y_k) \geq \Phi(s_k,y_k)$, et $2 \geq \frac{\beta}{2}|y_k - x_0|^2$ d'où

$$|y_k - x_0|^2 \leq 1. \tag{26}$$

V_{p_k} est une sous-solution sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de (9), ainsi :

$$\alpha + \sup_{u\in U}\Bigg[-\frac{\beta}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma\sigma^*(s_k,y_k,u)) - \beta b(s_k,y_k,u).(y_k - x_0) \\ - \frac{p_k - 1}{2V_{p_k}(s_k,y_k)}\beta^2\|\sigma^*(s_k,y_k,u)(y_k - x_0)\|^2\Bigg] \leq 0.$$

Soit $u_k \in U$ vérifiant $\sigma^*(s_k,y_k,u_k)(y_k - x_0) = 0$, qui existe d'après l'hypothèse (22). On obtient alors :

$$\alpha + \left[-\frac{\beta}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma\sigma^*(s_k,y_k,u_k)) - \beta b(s_k,y_k,u_k).(y_k - x_0)\right] \leq 0.$$

Comme σ et b sont bornées par une constante K, en utilisant l'inégalité (26), on en déduit

$$\alpha - \frac{3}{2}K\beta \leq 0.$$

Si au préalable on a choisi $\alpha > 2K\beta$, on aboutit à une contradiction. □

Ce résultat et l'inégalité $\overline{V} \leq V^\sharp$ donnent

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \overline{V}(T,x) = g(x).$$

De plus on a $g(.) = V(T,.) = V^\sharp(T,.)$ avec V sur-solution, $V^\sharp$ sous-solution. Si on pouvait appliquer le théorème de comparaison 3.1 avec V et $V^\sharp$, on obtiendrait $V \geq V^\sharp$ sur tout le domaine, d'où $V = V^\sharp$. Alors V serait continue et l'unique solution de viscosité de (2). Pour cela on doit commencer par trouver une hypothèse permettant de prouver la continuité de l'opérateur F sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times Sym(n)$. Comme dans [9], on introduit donc la condition suivante :
pour tout $(t_0,x_0,q_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $u_0 \in U(t_0,x_0,q_0)$, il existe une application

$$\hat{u} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to U \tag{27}$$

satisfaisant

$$\begin{cases} \hat{u}(t_0,x_0,q_0) = u_0, \\ \hat{u}(t,x,q) \in U(t,x,q) \text{ pour tout } (t,x,q) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u} \text{ continue sur } \{(t,x,q);\ q \neq 0\}. \end{cases}$$

Lemme 5.1 *Sous cette hypothèse (27), F est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\times Sym(n)$.*

Preuve. Soit une suite (t_n,x_n,q_n,S_n) convergente vers (t_0,x_0,q_0,S_0) avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \neq 0$.
• Montrons d'abord que F est semi-continue supérieurement. Soit $u_n \in \mathrm{U}(t_n,x_n,q_n)$ réalisant le supremum, i.e.

$$\begin{aligned} F(t_n,x_n,q_n,S_n) &= \sup_{u \in \mathrm{U}(t_n,x_n,q_n)} \{\psi(t_n,x_n,q_n,S_n,u)\} \\ &= \psi(t_n,x_n,q_n,S_n,u_n) \end{aligned}$$

où ψ est la fonction suivante

$$\psi(t,x,q,S,u) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma\sigma^*(t,x,u)S) - b(t,x,u)q.$$

A une sous-suite près, on peut supposer que u_n converge vers $u_0 \in \mathrm{U}$. Comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma^*(t_n,x_n,u_n)q_n = 0,$$

par passage à la limite, u_0 est dans $\mathrm{U}(t_0,x_0,q_0)$ et par continuité de ψ

$$\begin{aligned} \limsup_n F(t_n,x_n,q_n,S_n) &= \limsup_n \psi(t_n,x_n,q_n,S_n,u_n) \\ &= \psi(t_0,x_0,q_0,S_0,u_0) \\ &\leq F(t_0,x_0,q_0,S_0). \end{aligned}$$

Remarquons au passage que l'on n'a pas utilisé vraiment ici le fait que $q_n \neq 0$. En fait on a simplement utilisé le fait que $\mathrm{U}(t,x,q)$ est non vide, ce qui est vraiment pour tout (t,x,q) par hypothèse. Finalement F est donc égale à F^*, i.e. est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$ tout entier.
• Nous allons maintenant démontrer que F est semi-continue inférieurement sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times Sym(n)$ et cette fois on a vraiment besoin de $q_n \neq 0$. Soit $u_0 \in \mathrm{U}(t_0,x_0,q_0)$ réalisant le supremum, i.e.

$$F(t_0,x_0,q_0,S_0) = \psi(t_0,x_0,q_0,S_0,u_0).$$

L'hypothèse (27) donne la fonction $\hat{u}$ définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \hat{u}(t_0,x_0,q_0) = u_0, \\ \hat{u}(t,x,q) \in \mathrm{U}(t,x,q) \text{ for all } (t,x,q) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u} \text{ continue sur } \{(t,x,q);\ q \neq 0\}. \end{cases}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F(t_n,x_n,q_n,S_n) \geq \psi(t_n,x_n,q_n,S_n,\hat{u}(t_n,x_n,q_n)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \liminf_n F(t_n,x_n,q_n,S_n) &\geq \liminf_n \psi(t_n,x_n,q_n,S_n,\hat{u}(t_n,x_n,q_n)) \\ &= \psi(t_0,x_0,q_0,S_0,u_0) \\ &= F(t_0,x_0,q_0,S_0). \end{aligned}$$

Donc F est semi-continue inférieurement. Et en rassemblant les deux résultats, F est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times Sym(n)$. $\square$

Il est maintenant aisé de montrer que F vérifie les quatre premières hypothèses (F1)-(F4) du théorème de comparaison. De plus si b et σ ne dépendent pas de (t,x), F non plus, et on a toutes les hypothèses de la remarque 3.1. On peut donc appliquer le résultat à V sur-solution et à $V^\sharp$ sous-solution pour obtenir :

Théorème 5.1 (unicité de la solution) *Si b et σ ne dépendent pas de (t,x) et si les conditions (22) et (27) sont vérifiées, alors V est continue et est l'unique solution de viscosité de l'équation (2).*

L'hypothèse d'indépendance par rapport à (t,x) est vérifiée dans les cas traités par [3], [9] et [10] : mouvement par courbure moyenne, par courbure moyenne inverse, etc.

On peut se demander maintenant dans quel cas une telle fonction $\hat{u}$ existe. Il y a au moins une situation où cela se produit :

Lemme 5.2 *si σ ne dépend que de u et si l'ensemble $\{u \in U | \ \sigma^*(u)q = 0\}$ est réduit à un point pour $q \neq 0$, alors les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées.*

Preuve. En effet si on note $u(q)$ cet élément, la fonction ainsi définie est continue. soit $(q_n)_n$ une suite convergente vers q. Cela nous donne une suite $(u(q_n))_n$ à valeurs dans U compact. Donc à une sous-suite près, cette suite est convergente vers un $v \in$ U. Or

$$\forall n, \ \sigma^*(u(q_n))q_n = 0.$$

Ainsi par passage à la limite, on obtient $\sigma^*(v)q = 0$. Soit par unicité, $v = u(q)$. $\square$

Ce cas se produit dans l'exemple de [3], car pour tout $q \neq 0$, il s'agit de trouver un vecteur p de norme 1, tel que

$$\sigma^*(p)q = (I - p \otimes p)q = 0;$$

ce qui donne $p = \frac{q}{|q|}$.

Par contre dans le cas général, i.e. si b ou σ dépendent de (t,x), le problème de l'existence des conditions simples garantissant (F6) et (F9) reste toujours ouvert.

Conclusion

Nous avons étudié la fonction V définie par :

$$\mathrm{V}(t,x) = \inf_{\nu} \inf_{u \in \mathcal{A}_\nu} \left(\text{ess-sup}_{\Omega} g(X^{t,x,u}(T)) \right),$$

en reprenant les notations de la première partie. Nous avons alors démontré l'existence d'un système de probabilité ν et d'un contrôle optimal v pour ce problème. Ensuite nous avons obtenu une caractérisation de V en terme de sur-solution sur $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de l'équation (2) (c'est l'objet du théorème 3.3) :

$$-\mathrm{V}_t(t,x) + F\left(t,x,\nabla \mathrm{V}(t,x),\nabla^2 \mathrm{V}(t,x)\right) = 0.$$

Puis nous avons donné quelques propriétés des fonctions $\mathrm{V}^\sharp$ et $\overline{\mathrm{V}}$ définies en (16). Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les hypothèses usuelles du contrôle stochastique.

Ensuite nous avons cherché à savoir si en ajoutant certaines conditions nous pouvions donner d'autres propriétés de V, en particulier si nous avions plus de régularité sur V. En utilisant la condition (22), qui est celle qu'utilisent également Soner et Touzi, nous avons montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{V}^\sharp(T,x) \leq g(x).$$

Si nous ajoutons la condition (27), dans le cas où b et σ sont indépendantes de (t,x), alors V est continue et est l'unique solution de viscosité de (2), vérifiant la condition finale : $\mathrm{V}(T,.) = g(.)$. Nous avons donné un cas où l'hypothèse (27) est vérifiée : $\mathrm{U}(t,x,q) = \mathrm{U}(q)$ est réduit à un seul élément.

Plusieurs questions restent en suspens. D'abord si dans le cas du contrôle avec espérance, l'égalité $\mathrm{V} = \mathrm{V}_\nu$ pour tout ν est vérifiée, nous ne savons pas si une telle relation est encore vraie pour le contrôle en ess-sup. Ensuite la condition sur b et σ que nous avons imposées pour pouvoir appliquer un théorème de comparaison est très restrictive, même si elle a lieu sur les exemples de [3] et [10].

Références

[1] AMBROSIO L. (1997) *Lecture notes on geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions.*

[2] BARLES G., SONER H.M. et SOUGANIDIS P.E. (1993) *Front propagation and phase field theory*, SIAM Journal on Control and Optimization, issue dedicated to W.H. Fleming, pp. 439-469.

[3] BUCKDAHN R., CARDALIAGUET P. et QUIMCAMPOIX M. (2000) *A representation formula for the mean curvature motion*, preprint.

[4] CRANDALL M.G., ISHII H. et P.L. LIONS (1992) *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. AMS, 27, pp. 1-67.

[5] EL KAROUI N., HU NGUYEN D. et JEAN-BLANC-PICQUE M. (1987) *Compactification methods in the control of degenerate diffusions : existence of an optimal control*, Stochastics, pp. 169-219.

[6] FLEMING W.H. et SONER H.M. (1993) *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin.

[7] GIGA Y., GOTO S., ISHII H. et SATO M.-H. (1990) *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J., 40, pp. 443-470.

[8] SONER H.M. et TOUZI N. (2000) *Stochastic target problems, dynamic programming, and viscosity solutions*, preprint.

[9] SONER H.M. et TOUZI N. (2000) *Dynamic programming for stochastic target problems and geometric flows*, preprint.

[10] SONER H.M. et TOUZI N. (2001) *A stochastic representation for mean curvature type geometric flows*, preprint.