UNIVERSITE DE RENNES I
MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Rapport de stage 2$^{\text{ème}}$ année

Début de définition de l'intégrale $\int_j A$

effectué par Alexandre Popier
sous la responsabilité de MM. Franck Thuillier et Raymond Stora
(Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique)

juillet 1999

Contents

Introduction

En théorie électromagnétique classique, les équations d'une particule dans un champ électromagnétique ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) du mouvement peuvent s'obtenir à partir d'un principe variationnel et d'une action :

$$S[A] = \int_M F \wedge \ ^*F \ + \ \int_M \ ^*J \wedge A$$

Le problème est que A n'est pas forcément défini partout et donc il faut donner un sens à $\int_M \ ^*J \wedge A$. Classiquement, $M = \mathbb{R}^4$ et il n'y a pas de problème car on a une seule carte. Donc A est entièrement définie. Mais on peut définir quelque chose de plus général pour n'importe quelle variété compacte sans bord.

Dans la théorie quantique, à la Feynman, on part de l'action classique $S[A] = \int_M F \wedge \ ^*F$ et on cherche à calculer :

$$\langle \exp^{\int_M \ ^*J \wedge A} \rangle \ \equiv \ \int \mathcal{D}A \exp^{\int_M F \wedge \ ^*F \ + \ \int_M \ ^*J \wedge A}$$

(boucle de Wilson), où $\mathcal{D}A$ signifie que l'on intègre sur A. Et là il est nécessaire de donner un sens à $exp(\int_M \ ^*J \wedge A)$.

Le but de ce travail est de donner un début de définition à cette intégrale. Dans un premier temps, on va travailler sur les formes différentielles et de là sur les groupes de cohomologie de de Rham. Ensuite on va passer aux simplexes et aux groupes d'homologie singulière et on finira en montrant que ces groupes sont les duaux des groupes de cohomologie. La troisième partie est consacrée à la "collating formula", qui est la formule permettant justement un début de définition de l'intégrale en question. Enfin dans une quatrième partie, on va voir comment les résultats précédents s'appliquent à l'electromagnétisme, via les équations de Maxwell.

1 Variétés, formes différentielles, cohomologie de de Rham

1.1 Quelques rappels sur les variétés

Variétés

Définition 1.1.1
On appelle espace topologique un espace E sur lequel a été défini un ensemble de parties de E, les ouverts, satisfaisant les propriétés suivantes :

- *toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte*
- *toute intersection finie d'ouverts est ouverte*
- *E et l'ensemble vide sont ouverts.*

Sur cet ensemble E, on définit alors les fermés (complémentaires des ouverts), les voisinages (voisinage d'un point x : ensemble contenant un ouvert contenant x), et :

Définition 1.1.2
Un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorf) si deux points quelconques distincts possèdent des voisinages disjoints.

Définition 1.1.3
Une variété (topologique) M de dimension n est un espace topologique séparé dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un espace qui est la réunion d'une famille d'ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.
Soit U un de ces ouverts et ϕ l'homéomorphisme de U sur $\mathbb{R}^n$. Le couple (U, ϕ) est appelé carte (ou système de coordonnées locales). L'ensemble des cartes est appelé atlas.

Un atlas est de classe C^p si étant données deux cartes quelconques (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2), l'application $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^p entre les ouverts de $\mathbb{R}^n$ images de $U_1 \cap U_2$ par les homéomorphismes ϕ_1 et ϕ_2.
La donnée d'un atlas de classe C^p munit M d'une *structure différentiable de classe C^p*. On dit alors que M est une variété différentiable de classe C^p.

Définition 1.1.4
Une variété M munie d'un atlas (U_i, ϕ_i) est dite paracompacte si la collection d'ouverts U_i est localement finie, i.e. si chaque point $x \in M$ a un voisinage W_x qui rencontre seulement un nombre fini des U_i, c'est-à-dire $U_i \cap W_x = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de i.

Définition 1.1.5

Une partition de l'unité de classe C^p sur une variété différentiable M est une collection de fonctions $(\theta_i)_{i\in I}$ de classe C^p telles que :

1. *$\theta_i \geq 0$ et θ_i est à support compact pour tout $i \in I$*
2. *la collection $(supp\ \theta_i)_{i\in I}$ est localement finie (voir définition précédente)*
3. *pour tout $x \in M$:*
$$\sum_{i\in I} \theta_i(x) \; = \; 1$$

Définition 1.1.6

Une partition de l'unité $\{\theta_i\}$ est dite subordonnée à un recouvrement $\{U_\alpha\}$ si pour tout i il existe un α tel que supp $\theta_i \subset U_\alpha$.

Théorème 1.1.1

Pour tout atlas $\{U_\alpha\}$ d'une variété différentiable M, de classe C^p, il existe une partition de l'unité $\{\theta_i\}$, de classe C^p, subordonnée à $\{U_\alpha\}$.

Pour la démonstration de ce théorème, voir par exemple Choquet-Bruhat [3], page 68. L'idée est de travailler d'abord sur $\mathbb{R}^n$ avec des fonctions du genre e^{1/x^2}, puis de remonter le résultat sur la variété par les cartes. Dans le cas d'une variété compacte, on peut imposer aussi que le support des θ_i soit compact dans chaque U_i.
A partir de maintenant, sauf mention du contraire, quand on parlera de variété, on sous-entendra variété de classe C^∞, donc de partition de l'unité de classe C^∞.

Espaces tangents

Soient M et N deux variétés. Une application de M dans N est dite différentiable de classe C^p au point x_0 s'il existe des cartes locales (U,ϕ) de M, $x_0 \in U$, et (V,ψ) de N, $y_0 = f(x_0) \in V$ telles que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit différentiable. Pour toutes les propriétés sur ces fonctions et les sous-variétés, voir [3] (chapitre 1.A).
On appelle *courbe tracée sur M* une application de [a,b] dans M (les bornes de l'intervalle de définition ne jouent aucun rôle). Pour $x \in M$, on considère l'ensemble suivant :

$$C_x(M) \; = \; \{\alpha \; : \; [-\epsilon,\epsilon] \to M, C^\infty, \alpha(0) = x\}$$

Soit (U,ϕ) une carte en x ($x \in U$). On munit $C_x(M)$ de la relation d'équivalence suivante :

$$\alpha \sim \beta \;\Leftrightarrow\; \frac{d(\phi\circ\alpha)}{dt}(0) \; = \; \frac{d(\phi\circ\beta)}{dt}(0)$$

Par la formule de Leibniz sur les dérivées et comme ϕ est un difféomorphisme, on vérifie que $\sim$ est bien définie sur $C_x(M)$, i.e. ne dépend pas de la carte choisie.

Définition 1.1.7

Une classe d'équivalence sur $C_x(M)$ est appelée vecteur tangent en x à M et l'espace des classes d'équivalence est appelé espace tangent en x à M et est noté : $T_x(M)$.

On munit $T_x(M)$ d'une structure d'espace vectoriel et on montre qu'alors $T_x(M)$ est de dimension n, si M est de dimension n.
On définit alors $\underline{TM}$ comme :

$$TM = \{(m, v_m), m \in M, v_m \in T_m(M)\}$$

TM est muni de façon naturelle d'une structure de variété différentiable de dimension 2n. C'est *l'espace fibré des vecteurs tangents à une variété* . On a une projection naturelle π de TM sur M, définie par $\pi(x, v_x) = x$. Voir le paragraphe suivant pour une définition plus générale des espaces fibrés.
Attention, si localement TM est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il n'est pas en général globalement homéomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$.

Revenons aux fonctions d'une variété dans une autre. Si f est une application de M dans N, pour $x \in M$, on introduit $d_x f$, fonction de $T_x(M)$ dans $T_{f(x)}(N)$ qui, à un vecteur tangent α en x à M (classe de α), associe la classe d'équivalence de $f \circ \alpha$. On vérifie sans difficulté que $d_x f$ est bien définie et est $\mathbb{R}$-linéaire. On peut maintenant définir la <u>différentielle de f</u> de TM dans TN, notée df, par $df(x, v_x) = (f(x), d_x f(v_x))$.
Elle vérifie en particulier : $dg \circ df = d(g \circ f)$ (formule de Leibniz). Cette notion prolonge la notion de différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
On va terminer ce paragraphe par une dernière définition, celle d'un champ de vecteurs.

Définition 1.1.8
Un <u>champ de vecteurs</u> X est une section associée à π, i.e. $\pi \circ X = Id(M)$, c'est-à-dire une application différentiable de M dans TM qui à un point $x \in M$ associe un vecteur tangent $v_x \in T_x(M)$.

L'ensemble des champs de vecteurs est un module sur l'anneau des fonctions $C^\infty(M)$.

<u>Espaces fibrés</u>

Soit M une variété et G un groupe de Lie, c'est-à-dire un groupe qui est aussi une variété différentiable tel que l'opération de groupe $(a, b) \in G \times G \to ab^{-1} \in G$ est une application différentiable entre les variétés $G \times G$ et G (voir à ce sujet par exemple [2], chapitre 1, paragraphe 4).

Définition 1.1.9
Un <u>espace fibré principal</u> ou fibré principal sur M avec pour groupe G consiste en une variété P et une action de G sur P qui satisfont les conditions suivantes ;

1. *G agit librement à droite sur P;*
2. *M est l'espace quotient de P par la relation d'équivalence induite par G, M = P/G, et la projection canonique $\pi : P \to M$ est différentiable;*
3. *P est localement triviale : tout point x de M admet un voisinage U tel que $\pi^{-1}(U)$ est isomorphe à $U \times G$, i.e. il existe un difféomorphisme $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tel que $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$ où ϕ est une application de $\pi^{-1}(U)$ dans G vérifiant $\phi(ug) = (\phi(u))g$ pour tout $u \in \pi^{-1}(U)$ et tout $g \in G$.*

Un fibré principal est noté $P(M, G, \pi)$ ou simplement $P(M, G)$. Pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ est appelé *fibre sur* x . C'est une sous-variété de P, difféomorphe à G.
On considère un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de M pour lequel chaque $\pi^{-1}(U_\alpha)$ est pourvu du difféommorphisme qui envoie $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sur $U_\alpha \times G$, qui est de la forme $u \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u))$. Si $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, alors :

$$\phi_\beta(ug)(\phi_\alpha(ug))^{-1} = \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}$$

ce qui prouve que $\phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}$ dépend uniquement de $\pi(u)$ et pas de u. On définit alors une application $\psi_{\alpha\beta}$ de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans G par :

$$\psi_{\alpha\beta}(\pi(u)) = \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}$$

Définition 1.1.10

L'ensemble de ces fonctions $\psi_{\alpha\beta}$ est appelé fonctions de transition sur le fibré P correspondant au recouvrement $\{U_\alpha\}$.

Il est facile de vérifier :

$$\psi_{\alpha\beta}(u) = \psi_{\alpha\gamma}(u)\psi_{\gamma\beta}(u) \tag{1.1}$$

pour $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Réciproquement on a :

Proposition 1.1.1

Soit M une variété, $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de M et G un groupe de Lie. Si on se donne une famille de fonctions $\psi_{\alpha\beta}$ définies sur $U_\alpha \cap U_\beta$ vérifiant l'égalité (1.1), on peut construire un espace fibré principal $P(M, G)$ ayant les fonctions $\psi_{\alpha\beta}$ pour fonctions de transition.

démonstration : voir [2], page 52, proposition 5.2

Si $P(M, G)$ est un fibré principal et si F est une variété sur laquelle G agit à gauche, on peut montrer (voir [2], pages 54-55) qu'on peut faire agir G à droite sur $P \times F$, que l'espace quotient noté E obtenu alors, est une variété et l'application de $P \times F$ dans M qui à (u, ζ) associe $\pi(u)$ induit une application π_E de E dans M telle que $\pi_E^{-1}(U)$ est isomorphe à $U \times F$ pour tout ouvert U de M. E ou plus précisément $E(M, F, G, P)$ est *l'espace fibré de base M, avec la fibre standard F et le groupe (de structure) G, associé au fibré principal P* .

Le fibré tangent à une variété est un exemple de fibré (vectoriel) associé à un fibré principal. Si la variété M est de dimension n, on considère en chaque point $x \in M$ une base $X_1, \ldots, X_n$ de l'espace tangent $T_x(M)$. Soit $L(M)$ l'ensemble de toutes ces bases en tous les points de M et soit π l'application de $L(M)$ dans M qui à une base en x associe x. Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ agit à droite sur $L(M)$. $T(M)$ est ainsi le fibré associé avec $L(M)$ et avec pour fibre standard $\mathbb{R}^n$. Il est facile de montrer que la fibre de $T(M)$ au dessus de $x \in M$ peut être considérée comme $T_x(M)$.

Pour plus de détails sur les espaces fibrés, voir [2], chapitre 1, paragraphe 5.

1.2 Algèbre tensorielle

Tenseurs

On se place dans le cas d'un F-module E et on note E' son espace dual. On définit E_r^s comme l'ensemble de toutes les applications F-multilinéaires de

$$\underbrace{E \times \ldots \times E}_{r\ fois} \times \underbrace{E' \times \ldots \times E'}_{s\ fois}$$

dans F. Il est facile de voir que E_r^s est un F-module et $E_0 = E^0 = E_0^0 = F$. Notons que $E^1 = E"$ et $E_1 = E'$. On définit aussi les sommes directes suivantes :

$$E_\star = \bigoplus_{r=0}^{\infty} E_r$$

$$E^\star = \bigoplus_{s=0}^{\infty} E^s$$

$$E_\star^\star = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} E_r^s$$

Un élément u appartient à $E_\star^\star$ s'il s'exprime sous la forme :

$$u = \sum_{r,s=0}^{\infty} u_r^s$$

où les $u_r^s \in E_r^s$ sont tous nuls, sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

Pour $u \in E_r^s$, $v \in E_{r'}^{s'}$, on définit $u \otimes v$ dans $E_{r+r'}^{s+s'}$ par :

$$\begin{aligned}&(u \otimes v)(X_1, \ldots, X_{r+r'}, \omega^1, \ldots, \omega^{s+s'})\\ = \ & u(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s)\ v(X_{r+1}, \ldots, X_{r'}\omega^{s+1}, \ldots, \omega^{s'})\end{aligned}$$

pour $\omega^1, \ldots, \omega^{s+s'}$ dans E' et $X_1, \ldots, X_{r+r'}$ dans E. Ce produit est bien associatif, mais n'est pas commutatif en général.
Alors $E_\star$ et $E^\star$ sont des F-algèbres graduées et $E_\star^\star$ est une F-algèbre bi-graduée, toutes avec $\otimes$ comme multiplication. Rappelons qu'une algèbre graduée K est une somme directe

$$K = \bigoplus_{r=-\infty}^{+\infty} K_r$$

telle que $K_r K_s \subset K_{r+s}$.

Définition 1.2.1

On appelle tenseur un élément de $E_\star^\star$, un tenseur dans E_r^s est dit covariant de rang r et contravariant de rang s. $E_\star$ est l'algèbre tensorielle covariante, $E^\star$ l'algèbre tensorielle contravariante, $E_\star^\star$ l'algèbre tensorielle mixte.

Supposons maintenant que E est de type fini de rang n. Alors E est isomorphe à $E"$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E avec comme base duale $e^1, \ldots, e^n$. Alors :

Théorème 1.2.1
$\{e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r} \otimes e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}, 1 \leq i_k \leq n, 1 \leq j_l \leq n\}$ est une base de E_r^s.

Donc E_r^s est de rang fini n^{r+s}.

Dans ce paragraphe, on a défini le produit tensoriel de deux tenseurs. On peut montrer que cette notion est liée à la notion de produit tensorielle entre modules, dont on va rappeler maintenant la définition.
On considère V,W et U des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On définit d'abord le produit tensoriel de V et W. Soit $F(V, W)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les couples $(v, w) \in (V, W)$ (c'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de paires (v,w)). On définit alors le sous-espace $R(V, W)$ engendré par l'ensemble de tous les éléments de $F(V, W)$ de la forme suivante :

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$
$$(av, w) - a(v, w)$$
$$(v, aw) - a(v, w)$$

où v, v_1, v_2 sont dans V, w, w_1, w_2 sont dans W et a est dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.2
On appelle <u>produit tensoriel de V et de W</u> l'espace quotient F(V,W)/R(V,W) et on le note $V \otimes W$.

Le produit tensoriel a les propriétés suivantes :

1. *propriété universelle du produit tensoriel* :
   Soit ϕ l'application bilinéaire de $V \times W$ dans $V \otimes W$ définie par $\phi(v, w) = v \otimes w$. Si U est un autre espace vectoriel, et si $l : V \times W \to U$ est une application bilinéaire, il existe une unique application linéaire $\tilde{l} : V \otimes W \to U$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "l"'] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\tilde{l}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

   De plus s'il existe X espace vectoriel et $\tilde{\phi} : V \times W \to X$, vérifiant la même propriété universelle, alors il existe un isomorphisme $\alpha : V \otimes W \to X$ tel que $\alpha \circ \phi = \tilde{\phi}$;

2. $V \otimes W$ est canoniquement isomorphe à $W \otimes V$;

3. $V \otimes (W \otimes U)$ est canoniquement isomorphe à $(V \otimes W) \otimes U$;

4. $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$;

5. Si $\{e_i, i = 1, \ldots, c\}$ et $\{f_j, j = 1, \ldots, d\}$ sont des bases de V et W, alors $\{e_i \otimes f_j, i = 1, \ldots, c \text{ et } j = 1, \ldots, d\}$ est une base de $V \otimes W$.

On peut alors définir à partir de E les F-modules suivants :

$$\widetilde{E}^r = \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{r\ fois}$$

$$\widetilde{E}_s = \underbrace{E' \otimes \ldots \otimes E'}_{s\ fois}$$

$$\widetilde{E}_s^r = \widetilde{E}^r \otimes \widetilde{E}_s$$

On peut définir les tenseurs comme des éléments de ces ensembles. Pour la cohérence des notations on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.1
$\widetilde{E}_r$ est isomorphe à E_r.
$\widetilde{E}^r$ est isomorphe à E^r.

Pour la démonstration de toutes ces propriétés, voir [2], chapitre1, paragraphe 2. La correspondance entre $\widetilde{E}_r^s$ et E_r^s est traitée plus précisément dans le livre de Nelson ([1]).

Algèbre de Grassman

Soit S_k l'ensemble des permutations de l'espace $\{1, \ldots, k\}$. Si σ appartient à S_k, on définit : $\tilde{\sigma} : E^k \to E^k$ où $E^k = E \times \ldots \times E$ (k fois), par

$$\tilde{\sigma}(X_1, \ldots, X_k) = (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)})$$

Il est à peu près immédiat que : $\sigma \,\tilde{\circ}\, \tau = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\tau}$. Si $u \in E_r$, on définit $\sigma u \in E_r$ par $\sigma u = u \circ \tilde{\sigma}$. On peut définir alors un opérateur d'antisymétrisation $\mathcal{A}$ sur E_r par :

$$\mathcal{A}u = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)(\sigma u)$$

et on étend cet opérateur sur $E_\star$ par additivité.

Définition 1.2.3
Un élément u de $E_\star$ tel que $\mathcal{A}u = u$ est dit antisymétrique ou alterné et est aussi appelé forme extérieure.
L'ensemble des éléments de E_r est noté A_r et les éléments de A_r sont appelés r-formes.

L'ensemble de tous les tenseurs alternés dans $E_\star$ est noté A_r tel que

$$A_\star = \sum_{r=0}^{\infty} A_r$$

Soit $u \in A_r$ et $v \in A_{r'}$. On pose $u \wedge v = \mathcal{A}(u \otimes v)$. Alors $u \wedge v$ est dans $A_{r+r'}$.

Définition 1.2.4
$u \wedge v$ est le produit extérieur de u et de v.

C'est un produit sur A_r associatif qui vérifie :

1. $\wedge : E_r \times E_{r'} \rightarrow E_{r+r'}$ est F-bilinéaire;

2. Si $u \in E_r$ et $v \in E_{r'}$, alors $u \wedge v = (-1)^{kl}(v \wedge u)$.

A_r munie de ce produit est une F-algèbre graduée, appelée algèbre (covariante) extérieure ou algèbre de Grassman.

On suppose maintenant que E est de type fini de rang n (si F est un corps, E est de dimension finie n). Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E avec comme base duale $e^1, \ldots, e^n$. Alors :

Théorème 1.2.2

$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n\}$ est une base de A_r.

A_r est donc un F-module de rang C_n^r. Et toute r-forme s'écrit de manière unique :

$$\omega = \omega_{|i_1 \ldots i_r|} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}$$

ce qui signifie que l'on a : $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Si on est sur un espace vectoriel de dimension n, $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ est une base de A_n où $e^1, \ldots, e^n$ est une base de E'. Terminons par la proposition suivante de changement de base :

Proposition 1.2.2

Soit $\omega \in E_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ une base de E. Soit $w_j = \alpha_j^i v_i$. Alors :

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = det(\alpha_j^i)\omega(v_1, \ldots, v_n)$$

1.3 Formes différentielles

Formes extérieures sur une variété

On s'intéresse maintenant à une variété M de dimension n. On a défini sur M les notions de fibré tangent et de champ de vecteurs. On a rappelé aussi que l'espace tangent en un point $x \in M$ est un espace vectoriel réel de dimension n. Donc on peut définir par exemple l'algèbre tensorielle des tenseurs covariants de rang p. Notons la $(T_x(M))_p$. On peut voir en faisant une construction analogue à celle des champs de vecteurs que l'on peut munir l'espace des couples $(x, t_x) \in M \times (T_x(M))_p$ d'une structure de variété et d'espace fibré (de base M, de fibre standard $\mathbb{R}^{n^p}$). On note cet espace $(T(M))_p$. On définit les champs de tenseurs (p covariants) de la façon suivante :

Définition 1.3.1

Un champ de tenseurs de type $\binom{0}{p}$ sur une variété M est une section de l'espace fibré $(T(M))_p$, c'est-à-dire une application qui à un point $x \in M$ associe un tenseur $T(x) \in (T_x)M))^0_p$, où $T_x(M)$ est l'espace tangent à M en x.

Ce champ est dit *différentiable* si l'application définie est différentiable, ce qu'on supposera toujours vrai par la suite. De là on arrive à la définition de forme différentielle.

Définition 1.3.2

Une forme différentielle extérieure de degré p ou p-forme sur M est un champ de tenseurs p-covariants complètement antisymétriques, i.e. dans l'algèbre de Grassman correspondante.

Une p-forme est dite différentiable s'il en est ainsi du champ de vecteurs correspondant.

A partir de maintenant quand on parlera de p-forme, on sous-entendra forme extérieure de degré p différentiable. On notera $\Lambda^p(M)$ l'ensemble des p-formes sur une variété M. Bien sûr on a $\Lambda(M)$ qui est l'algèbre de Grassman avec le produit extérieur défini précédemment qui vient naturellement comme produit sur les formes et qui vérifie les mêmes propriétés.

On va fixer maintenant les notations de la base de l'algèbre extérieure d'ordre p. On a vu que pour un point $x \in M$, pour une base $e^1, \ldots, e^n$ donnée de $T_x(M)'$ toute p-forme ω s'écrit $\omega = \omega_{|i_1 \ldots i_r|} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}$. Donc en particulier il n'y a pas de (n+1)-formes. Ceci nous donne une base de $\Lambda^p(M)$ sur le domaine d'un système de coordonnées locales (i.e. d'une carte) en prenant pour $\{e^i\}$ le repère naturel $\{dx^i\}$ ou un changement de ce repère par une matrice régulière a^i_j ($e^i = a^i_j dx^j$). Donc toute p-forme différentielle s'écrit de manière unique $\omega = \omega_{|i_1 \ldots i_r|} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ où $\omega_{|i_1 \ldots i_r|}$ est une application différentiable de M dans $\mathbb{R}$. Souvent par abus, on notera $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ au lieu de $\omega_{|i_1 \ldots i_r|}$.

Différentiation extérieure

Sur $\Lambda(M)$, on va définir une opération de (anti-) dérivation respectant le fait que $\Lambda^0(M)$ est l'ensemble $C^\infty(M, \mathbb{R})$, i.e. cette opération devra coïncider avec l'opération de différentiation des fonctions définies sur M. On va d'abord la définir localement, puis on passera au cas global.

Théorème 1.3.1

Soit U un ouvert de M qui soit le domaine d'une carte. Alors il existe une unique famille d'applications $d_U : \Lambda^k(U) \to \Lambda^{k+1}(U)$, pour $k \geq 0$, telles que :

1. *si $f \in \Lambda^0(U)$ alors $d_U f$ est la différentielle usuelle de f;*

2. *si $\alpha \in \Lambda^k(U)$ et $\beta \in \Lambda^l(U)$, alors : $d_U(\alpha + \beta) \;=\; d_U\alpha \;+\; d_U\beta$;*

3. *de plus [1] : $d_U(\alpha \wedge \beta) \;=\; (d_U\alpha) \wedge \beta \;+\; (-1)^k \alpha \wedge (d_U\beta)$;*

4. *$d_U(d_U\alpha) \;=\; 0$ pour tout $\alpha \in \Lambda^k(U)$, $k \geq 0$.*

démonstration :
On va commencer par montrer l'unicité d'une telle famille. Si $\alpha \in \Lambda^k(U)$, α est une somme de termes de la forme :

$$f\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},\ \text{avec}\ f \in \Lambda^0(U),\ i_1 < \ldots < i_k$$

Donc

$$d_U(f\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \;=\; \sum_{l=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

qu'on note par commodité $f_{,l}\ dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, d'où on déduit que d_U est unique.
Pour l'existence, soit $\alpha \;=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ et on définit :

$$d_U\alpha \;=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|,l}\ dx^{i_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

A priori notre définition dépend du choix de la base. Mais si les assertions (1) et (4) sont valables quelle que soit la base, alors il s'en suit que cette opération d_U est indépendante du choix de coordonnées. Maintenant il est immédiat que (1) et (2) sont vraies. Notons aussi que si les $i_1, \ldots, i_k$ sont tous différents sans être ordonnés, on a bien :

$$d_U(f\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \;=\; f_{,l}\ dx^{i_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

(c'est une conséquence de la linéarité de d_U et des propriétés de permutation des dx^i).
Pour prouver le (3), posons :

$$\alpha \;=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},\ \beta \;=\; \beta_{|j_1 \ldots j_l|} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$$

d'où :

$$\alpha \wedge \beta \;=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} \beta_{|j_1 \ldots j_l|} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$$

Donc

$$\begin{aligned}
d_U(\alpha \wedge \beta) \;&=\; \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} \beta_{|j_1 \ldots j_l|}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} \\
&=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|,p}\ \beta_{|j_1 \ldots j_l|} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} \\
&\quad + \beta_{|j_1 \ldots j_l|,p}\ \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} \\
&=\; (d_U\alpha) \wedge \beta \\
&\quad + (-1)^k \alpha_{|i_1 \ldots i_k|} \beta_{|j_1 \ldots j_l|,p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^p \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}
\end{aligned}$$

Pour le (4), il suffit de le prouver pour $\alpha \;=\; f\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Or

$$d_U\alpha \;=\; f_{,l}\ dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

[1] si f est une 0-forme, $f \wedge \omega \;=\; f\omega$

d'où

$$d_U(d_U\alpha) \;=\; f_{,lp} dx^p \wedge dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

ce qui vaut bien 0 car on a $f_{,lp} \;=\; f_{,pl}$.

□

Remarque : si V est un ouvert inclus dans U alors $d_V(\alpha\,|_V) \;=\; (d_U\alpha)\,|_V$. On passe maintenant à une définition globale sur M.

Théorème 1.3.2

Sur une variété M, il existe une unique famille d'applications $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ telles que :

1. *si $f \in \Lambda^0(M)$ alors df est la différentielle usuelle de f;*
2. *si $\alpha \in \Lambda^k(M)$ et $\beta \in \Lambda^l(M)$, alors : $d(\alpha+\beta) \;=\; d\alpha \;+\; d\beta$;*
3. *avec :*
$$d(\alpha \wedge \beta) \;=\; (d\alpha) \wedge \beta \;+\; (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$$
4. *$d(d\alpha) \;=\; 0$ pour tout $\alpha \in \Lambda^k(U)$, $k \geq 0$.*

démonstration :

Soit $\alpha \in \Lambda^k(M)$. Si $p \in M$, on doit définir $d\alpha(p)$. Soit $p \in U$, où $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ est une carte de M. On pose comme définition :

$$d\alpha(p) \;=\; d_U(\alpha\,|_U)(p)$$

Si $(V, (y^1, \ldots, y^n))$ est une autre carte contenant p, on prend un ouvert W tel que $p \in W \subset U \cap V$. Alors, d'après la remarque précédente, $d_U(\alpha\,|_U)(p) \;=\; d_W(\alpha\,|_W)(p) \;=\; d_V(\alpha\,|_V)(p)$. Donc $d\alpha(p)$ est bien défini. Comme $(d\alpha)\,|_U = \; d_U(\alpha\,|_U)$, on voit que $d\alpha$ est bien une (k+1)-forme différentiable. Reste à vérifier les quatre propriétés désirées.

(1). Pour $f \in \Lambda^0(M)$, $(df)_U \;=\; d_U(f\,|_U) =$ différentielle de f sur U. Comme M est recouvert par des cartes, (1) est vérifiée.

(2). Immédiat.

(3). Pour tout ouvert U lié à une carte, on a :

$$\begin{aligned}
(d(\alpha \wedge \beta))\,|_U \;&=\; d_U(\alpha\,|_U \wedge \beta\,|_U) \\
&=\; d_U(\alpha\,|_U) \wedge \beta\,|_U \;+ (-1)^k \alpha\,|_U \wedge d_U(\beta\,|_U) \\
&=\; (d\alpha)\,|_U \wedge \beta\,|_U \;+ (-1)^k \alpha\,|_U \wedge (d\beta)\,|_U \\
&=\; (d\alpha \wedge \beta \;+\; (-1)^k \alpha \wedge d\beta)\,|_U
\end{aligned}$$

(4). De même.

Il faut maintenant montrer l'unicité de cette famille. Soit $\alpha \in \Lambda^k(M)$, $p \in M$. On suppose d'abord que $\alpha \;=\; \beta$ sur un voisinage V de p. Soit h une fonction C^∞ sur M telle que $h \;=\; 1$ autour de p et $h \;=\; 0$ en dehors de V. Alors $h\alpha \;=\; h\beta$ sur M, d'où on déduit :

$$d(h\alpha)(p) \;=\; dh(p) \wedge \alpha(p) \;+\; h(p) \wedge d\alpha(p) \;=\; d\alpha(p)$$

et de même $d(h\beta)(p) \;=\; d\beta(p)$. Donc $d\alpha(p) \;=\; d\beta(p)$.

Maintenant, étant donnés α et p, on peut choisir des coordonnées locales autour de p et exprimer α localement comme :

$$\alpha \;=\; \alpha_{|i_1 \ldots i_k|}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

On peut choisir des fonctions $A_{i_1\dots i_k}$ et X^i, C^∞ sur M, et égales à $\alpha_{i_1\dots i_k}$ et x^i sur un voisinage de p. Donc $\alpha \ = \ A_{|i_1\dots i_k|}\ dX^{i_1}\wedge\ldots\wedge dX^{i_k}$ au voisinage de p. Ainsi

$$\begin{aligned} d\alpha(p) &= d(A_{|i_1\dots i_k|})(p)\wedge dX^{i_1}(p)\wedge\ldots\wedge dX^{i_k}(p) \\ &= d(\alpha_{|i_1\dots i_k|})(p)\wedge dx^{i_1}(p)\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}(p) \end{aligned}$$

ce qui suffit pour prouver l'unicité.

□

La propriété (4) se note $d^2 \ = \ 0$. On a donc le diagramme suivant :

$$\Lambda^0(M)\xrightarrow{d_0}\Lambda^1(M)\xrightarrow{d_1}\Lambda^2(M)\longrightarrow\ldots\longrightarrow\Lambda^k(M)\xrightarrow{d_k}\Lambda^{k+1}(M)\longrightarrow\ldots$$

et ceci jusqu'à $\Lambda^n(M)$, où n est la dimension de M. On peut compléter ce diagramme en ajoutant sur $\mathbb{R}$ un opérateur d_{-1} qui envoie les réels dans les fonctions constantes. On a bien $d_0(d_{-1}) = 0$.
On va définir maintenant la notion d'image réciproque d'une forme par une fonction. Soit f une fonction C^∞ entre les variétés M et N. Soit $\omega\in\Lambda^k(N)$.

Définition 1.3.3

On appelle image réciproque (ou pullback) de ω par f qu'on note $f^*\omega$ la k-forme définie sur M par :

$$f^*\omega(x)(v_1,\ldots,v_k) \ = \ \omega(f(x))(d_xf(v_1),\ldots,d_xf(v_k))$$

Si ω est une 0-forme g (une fonction g), on a : $f^*g \ = \ g\circ f$.

Proposition 1.3.1

L'opérateur d commute avec le pullback, i.e. $d(f^*\omega) \ = \ f^*(d\omega)$.

démonstration :

• Soit $f: M\to N$ et $g: N\to\mathbb{R}$ de classe C^∞. Alors $f^*dg \ = \ d(g\circ f) \ = \ d(f^*g)$.
En effet, soit $x\in M$ et $v\in T_x(M)$. Soit c une courbe sur M telle que $c'(0) \ = \ v$. Alors :

$$\begin{aligned} (f^*dg)(x)(v) &= dg(f(x))(d_xf(v)) \\ &= dg(f(x))((f\circ c)'(0)) \\ &= (g\circ f\circ c)'(0) \end{aligned}$$

$d(f^*g)(x)(v) \ = \ ((f^*g)\circ c)'(0) \ = \ (g\circ f\circ c)'(0)$.
Une autre démonstration consiste à considérer des systèmes de coordonnées x^μ sur M, resp. y^i sur N. Alors on a :

$$dg \ = \ \frac{\partial g}{\partial y^i}dy^i \Rightarrow f^*dg \ = \ \frac{\partial f^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial y^i}dx^\mu$$

Or :

$$d(g\circ f) \ = \ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x^\mu}dx^\mu \ = \ \frac{\partial f^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial y^i}dx^\mu$$

• Soit $f: M\to N$ et $\omega\in\Lambda^k(N)$ où $k\geq 1$. Localement :

$$\omega \ = \ \omega_{i_1\dots i_k}\ dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

$$d\omega \ = \ d(\omega_{i_1\dots i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

Alors on obtient :

$$f^*\omega = (\omega_{i_1\ldots i_k} \circ f)\ d(x^{i_1} \circ f) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ f)$$

d'où :

$$d(f^*\omega) = d(\omega_{i_1\ldots i_k} \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ f)$$

Et :

$$\begin{aligned} f^*d\omega &= f^*d(\omega_{i_1\ldots i_k}) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ f) \\ &= d(f^*\omega_{i_1\ldots i_k}) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ f) \end{aligned}$$

d'après ce qui a été fait sur les fonctions.
□

Lemme de Poincaré

On va définir une sorte de réciproque de l'opérateur d. On considère un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une application $\phi : U \times [0,1] \to U$ de classe C^∞ qui vérifie pour tout $x \in U$: $\phi(x,1) = x$ et $\phi(x,0) = p$ où p est une constante (un point de U). On dit que U est contractible ou homotope à un point (voir Schwarz ([5]), le chapitre 1 : Fundamental Concepts). On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 (Lemme de Poincaré)
Soit U un ouvert contractible. Alors il existe un opérateur I sur $\Lambda(M)$ tel que si $\omega \in \Lambda^k(M)$:

1. *$I\omega$ est une (k-1)-forme;*
2. *$dI + Id = 1$, i.e. $dI\omega + Id\omega = \omega$.*

I est appelé homotopie de Poincaré.
démonstration :
Soit $\omega \in \Lambda^k(U)$. Localement ω s'écrit : $\omega = \omega_{\mu_1\ldots\mu_k}\ dy^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\mu_k}$. Alors si on note ∂_{μ_0} pour exprimer la dérivée partielle par rapport à y^{μ_0}, on a :

$$d\omega = \partial_{\mu_0}\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}\ dy^{\mu_0} \wedge dy^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\mu_k}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= (\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k} dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \\ &\quad + (\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dt \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \end{aligned}$$

est une k-forme définie sur $U \times [0,1]$. On pose alors :

$$I\omega = \left(\int_0^1 (\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dt \right)\ dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k}$$

C'est bien une (k-1)-forme définie sur $U \times [0,1]$. Calculons $dI\omega$.

$$\begin{aligned} dI\omega &= \partial_{\nu_1} \left(\int_0^1 (\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dt \right)\ dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \\ &= \left(\int_0^1 \partial_{\nu_1}(\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dt \right)\ dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \end{aligned}$$

De même on a :

$$Id\omega \;=\; \left(\int_0^1 (\phi^* d\omega)_{t\nu_1\ldots\nu_k} dt\right)\; dx^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_k}$$

Or $\phi^* d \;=\; d\phi^*$, d'après la proposition. Et on a :

$$\begin{aligned}(\phi^* d\omega)_{t\nu_1\ldots\nu_k} \;=\; (d\phi^*\omega)_{t\nu_1\ldots\nu_k} \;&=\; \partial_t(\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k} dt\wedge dx^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_k}\\ &\quad +\partial_{\nu_1}(\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dx^{\nu_1}\wedge dt\wedge dx^{\nu_2}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_k}\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 (\phi^* d\omega)_{t\nu_1\ldots\nu_k} dt \;=\; \int_0^1 \partial_t(\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k} dt \;-\; \int_0^1 \partial_{\nu_1}(\phi^*\omega)_{t\nu_2\ldots\nu_k} dt$$

(le signe - vient de : $dt\wedge dx^{\nu_1} \;=\; -\, dx^{\nu_1}\wedge dt$). Ainsi :

$$\begin{aligned}Id\omega \;+\; dI\omega \;&=\; \left(\int_0^1 \partial_t(\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k} dt\right) dx^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_k}\\ &=\; [(\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k}(x,1) \;-\; (\phi^*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_k}(x,0)]\, dx^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_k}\\ &=\; \omega_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) dy^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\mu_k} \;-\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}(p) dy^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\mu_k}\end{aligned}$$

par définition de $\phi(.,1)$ et $\phi(.,0)$. Or $\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}(p)dy^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\mu_k}$ peut être pris égal à 0. Donc on a bien $Id + dI \;=\; 1$.

□

Dans le cas d'une 0-forme f, on pose $(If)(x) \;=\; f(p)$ où p est donc le point fixe de la contraction. Alors dIf est simplement le d_{-1}, qui est l'inclusion des réels dans les fonctions constantes. De plus on a :

$$d(\phi^* f) \;=\; \partial_t(f\circ\phi)dt \;+\; \partial_{\mu_0}(f\circ\phi)dx^{\mu_0}$$

d'où : $d(\phi^* f)_t \;=\; \partial_t(f\circ\phi)$. Donc pour $x\in M$:

$$\begin{aligned}(dIf \;+\; Idf)(x) \;&=\; \int_0^1 \partial_t(f\circ\phi)dt \;=\; (f\circ\phi)(x,1)-(f\circ\phi)(x,0)+f(p)\\ &=\; f(x)-f(p)+f(p)\end{aligned}$$

En particulier, ce lemme est vrai pour $\mathbb{R}^n$, les boules ouvertes de centre p et les ouverts étoilés par rapport à un point p. Il suffit de poser $\phi(x,t) \;=\; tx+(1-t)p$. Ce lemme est important pour calculer les groupes de cohomologie de de Rham (voir paragraphe suivant et le lemme 1.4.1).

1.4 Cohomologie de Čech-de Rham :

Groupes de cohomologie, cas de $\mathbb{R}^n$

On a vu que sur $\Lambda(M)$ on avait une application linéaire d (ou plus exactement une famille d'applications d) telle que :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{d_{-1}} \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_0} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_1} \Lambda^2(M) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^k(M) \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1}(M) \longrightarrow \ldots$$

et ceci jusqu'à $\Lambda^n(M)$, où n est la dimension de M.

Définition 1.4.1
Soit $\omega \in \Lambda(M)$. On dit que ω est fermée si $d\omega = 0$ et que ω est exacte si $\omega = d\eta$.

Comme $d^2 = 0$, une forme exacte est fermée. Par contre la réciproque n'est pas vraie. Par exemple sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme ω suivante :

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

est fermée ($d\omega = 0$). Pourtant elle n'est pas exacte car sinon, si $\omega = d\alpha$:

$$\int_0^{2\pi} \omega(c(t))c'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(\alpha \circ c)dt = \alpha(c(2\pi)) - \alpha(c(0)) = 0$$

où $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Or ceci est faux car :

$$\int_0^{2\pi} \omega(c(t))c'(t)dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)(\cos(t))dt = 2\pi$$

(une conséquence est alors que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas contractible! Sinon une forme fermée serait exacte.).

On définit alors pour $k \geq 0$, $H^k_{deR}(M)$ comme le groupe-quotient :

$$H^k_{deR}(M) = \frac{Ker(d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M))}{Im(d : \Lambda^{k-1}(M) \to \Lambda^k(M))}$$

Définition 1.4.2
$H^k_{deR}(M)$ est le k-ième groupe de cohomologie de Rham de M.

$H^0_{deR}(M)$ est simplement isomorphe à $\mathbb{R}^c$ où c est le nombre de composantes connexes de M. En effet une 0-forme fermée ($df = 0$) est une application constante sur chaque composante connexe.
Comme l'opération d commute avec le pullback, deux espaces difféomorphes (même simplement homotopes) ont les mêmes groupes de cohomologie. Donc on a le lemme suivant :

Lemme 1.4.1

$$\begin{aligned} H^k_{deR}(\mathbb{R}^n) = H^k_{deR}(B^n) = H^k_{deR}(\{p\}) &\simeq 0 \textit{ pour } k \geq 1 \\ &\simeq \mathbb{R} \textit{ pour } k = 0 \end{aligned}$$

démonstration :
C'est une conséquence directe du lemme de Poincaré, car sur un ouvert contractible, une forme fermée ω peut toujours s'écrire $\omega = dI\omega$, donc est fermée.
$\square$

Néanmoins en général, ces groupes ne sont pas aussi simples à calculer (pour le tore $T^1 = S^1 \times S^1$, $H^1_{deR}(T^1) \simeq \mathbb{R}^2$) et ne sont pas forcément de dimension finie (en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels). Par contre :

Théorème 1.4.1
Si M est compacte, les groupes de cohomologie $H^k_{deR}(M)$ sont de dimension finie.

démonstration : voir paragraphe sur les recouvrements simples finis.

<u>**Suite de Mayer-Vietoris**</u>

Le but ici est de montrer la dimension finie des groupes de cohomologie pour une variété ayant un recouvrement fini en s'inspirant très largement du livre de Bott et Tu ([4]). Soit

$$C = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$$

une somme directe d'espaces vectoriels. Cette somme est appelée *complexe différentiel* s'il existe des morphismes

$$\ldots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow \ldots$$

tels que $d^2 = 0$. On définit $H^q(C)$ comme :

$$H^q(C) = \frac{Ker\ d \cap C^q}{Im\ d \cap C^q}$$

Si A et B sont deux complexes différentiels, une application $f : A \to B$ est dite *chain map* si $fd_A = d_B f$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.4.2
Soit A, B, C trois complexes différentiels et soit :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de chain maps. Alors on obtient la suite longue exacte suivante :

$$\begin{tikzcd}
H^{q+1}(A) \arrow[r, "f^*"] & \cdots & \\
H^q(A) \arrow[r, "f^*"] & H^q(B) \arrow[r, "g^*"'] & H^q(C) \arrow[ull, "d^*"'] \\
 & & H^{q-1}(C) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

démonstration :
On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
0 \arrow[r] & A^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "f"] & B^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "g"] & C^{q+1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^q \arrow[u, "d"] \arrow[r, "f"] & B^q \arrow[u, "d"] \arrow[r, "g"] & C^q \arrow[u, "d"] \arrow[r] & 0 \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On note $[a]$ la classe de a dans $H^q(A)$ si $da = 0$. f^* et g^* désignent les images directes, i.e. $f^*[a] = [f(a)]$, et d^* est défini de la façon suivante : soit $[c] \in H^q(C)$; alors $c \in C^q$, donc comme g est surjective, il existe $b \in B^q$ tel que $g(b) = c$. Comme $g(db) = d(g(b)) = dc = 0$, $db \in Im(f) = Ker(g)$. Donc il existe $a \in A^{q+1}$ tel que $f(a) = db$. Et $f(da) = df(a) = 0$. Comme f est injective, $da = 0$. On pose alors $d^*[c] = [a]$.

d^* est bien défini car si $c, c' \in C^q$ avec $dc = dc' = 0$ et $[c] = [c']$, alors :

$$c \longrightarrow b/g(b) = c \longrightarrow a/f(a) = db$$

$$c' \longrightarrow b'/g(b') = c' \longrightarrow a'/f(a') = db'$$

Or on a $c - c' = dc_1$ pour $c_1 \in c^{q-1}$. Donc il existe $b_1 \in B^{q-1}$ tel que $c_1 = g(b_1)$. Ainsi $g(b - b' - db_1) = 0$. Donc il existe $a_1 \in A^q$ tel que $f(a_1) = b - b' - db_1$, d'où $f(da_1) = db - db' = f(a - a')$, d'où $a - a' = da_1$. Donc $[a] = [a']$.
Reste à montrer qu'elle est exacte :

- $Im(f^*) = Ker(g^*)$:

Soit $[b] \in H^q(B)$ tel que $[b] = f^*[a]$. Alors $g^*[b] = [g(b)] = [g(f(a) + da_1)] = [0 + dg(a_1)] = [0]$
Soit $[b] \in H^q(B)$ tel que $g^*[b] = 0$. Alors nécessairement $g(b) = dc$ où $c \in C^{q-1}$. Or g étant surjective, $c = g(b')$ où $b' \in B^{q-1}$ et $g(b) = g(db')$. Donc $g(b - db') = 0$. Ainsi $b - db' = f(a)$ avec $a \in A^q$. Or $f(da) = d(f(a)) = d(b - db') = db = 0$ car $b \in H^q(B)$. Comme f est injective, $da = 0$. Donc : $[f(a)] = f^*[a] = [b - db'] = [b]$.

- $Im(d^*) = Ker(f^*)$:

Soit $[c] \in H^q(C)$ avec $d^*[c] = [a]$. Par construction, $f(a) = db$, donc $[f(a)] = 0$.
Soit $[a] \in Ker(f^*) \subset H^{q+1}(A)$. Comme $[f(a)] = 0$, $f(a) = db$ avec $b \in B^q$. Donc $g(b) \in C^q$, avec $d(g(b)) = g(f(a)) = 0$. Donc $d^*[g(b)] = [a]$.

- $Im(g^*) = Ker(d^*)$:

Soit $[b] \in H^q(B)$ et $c = g(b)$. Comme $db = 0 = f(a)$, $a = 0$. Donc par construction, $d^*[b] = 0$.
Soit $[c] \in H^q(C)$ tel que $d^*[c] = [a] = 0$. Comme $c \in C^q$, il existe $b \in B^q$ tel que $c = g(b)$. De plus $g(db) = dc = 0$. On prend $a \in A^q$ tel que $f(a) = db$. Or $[a] = 0$ car $d^*[c] = [a] = 0$. Donc $a = da_1$, donc $d(f(a_1) - b) = 0$ et $g(b) = g(b - f(a_1))$. On prend $[c] = g^*[b - f(a_1)]$.

□

Soit maintenant U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On pose $X = U \cup V$. On définit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \Lambda(X) \xrightarrow{f} \Lambda(U) \oplus \Lambda(V) \xrightarrow{g} \Lambda(U \cap V) \longrightarrow 0$$

où si $\tilde{\omega}$ est une forme sur $\Lambda(X)$, $f(\tilde{\omega}) = (\omega, \tau)$ avec $\omega = \tilde{\omega}\mid_U$ et $\tau = \tilde{\omega}\mid_V$ et $g(\omega,\tau) = \tau - \omega$ sur $U \cap V$. Cette suite est bien exacte :

• $Ker(f) = \{\tilde{\omega}/(\omega,\tau) = (0,0)\}$, donc $\tilde{\omega} = 0$ sur U et V, et donc vaut bien 0 sur X.

• $Ker(f) = \{(\omega,\tau)/\tau - \omega = 0\}$. Donc $\omega = \tau$ sur $U \cap V$. Donc on peut définir $\tilde{\omega}$ sur X avec $\omega = \tilde{\omega}\mid_U$ et $\tau = \tilde{\omega}\mid_V$. Ainsi $Ker(f) \subseteq Im(f)$. La réciproque est immédiate par définition.

• Soit h une fonction définie sur $U \cap V$. Soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U, V). Alors $\rho_V f$ est une fonction sur U. De même pour $\rho_U f$ sur V. Et $\rho_U f - (-\rho_V f) = f$. Donc $(-\rho_V f, \rho_U f)$ convient. On généralise avec $(-\rho_V\omega, \rho_U\omega)$ si ω est une forme définie sur $U \cap V$.

D'après le théorème précédent, cette suite exacte courte induit une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{q+1}(X) \arrow[r, "f^*"] & \cdots & \\
\Lambda^q(X) \arrow[r, "f^*"] & \Lambda^q(U) \oplus \Lambda^q(V) \arrow[r, "g^*"'] & \Lambda^q(U \cap V) \arrow[llu, "d^*"'] \\
& & \Lambda^{q-1}(U \cap V) \arrow[llu, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

Définition 1.4.3

Cette suite exacte longue est appelée suite de Mayer-Vietoris.

On a alors :

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} \Lambda^q(U \cup V) \xrightarrow{f^*} \Lambda^q(U) \oplus \Lambda^q(V) \longrightarrow \ldots$$

Donc $\Lambda^q(U \cup V) \simeq Ker(f^*) \oplus Im(f^*) \simeq Im(d^*) \oplus Im(f^*)$. Donc si les q-ièmes groupes de cohomologie de U, V et $U \cap V$ sont de dimension finie, il en est de même de celui de $U \cup V$. Or les seuls espaces sur lesquels on sait calculer sans difficulté les groupes de cohomologie, ce sont les espaces contractibles en appliquant le lemme de Poincaré. Donc on va chercher à travailler sur de tels espaces, donc en particulier sur des variétés ayant des recouvrements sur lesquels on puisse appliquer ce lemme. On arrive donc naturellement à la notion de recouvrement simple.

Recouvrements simples

Définition 1.4.4

Soit M une variété de dimension n. Un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de M est appelé un recouvrement simple si toute intersection finie $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.4.3

Toute variété paracompacte admet un recouvrement simple.

Remarque : si M est compacte, ce recouvrement simple peut être choisi fini.

démonstration :

Voir Annexe.

□

Proposition 1.4.1

Si une variété M admet un recouvrement simple fini, alors ses groupes de cohomologie sont de dimension finie.

démonstration :

On rappelle que $H^q_{deR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ si $q = 0$ et vaut 0 sinon. De là, la proposition se démontre par récurrence sur le cardinal du recouvrement. Si M a un recouvrement avec un seul ouvert, d'après le rappel, le résultat est immédiat. Si M est une variété avec un recouvrement simple $\{U_0, \dots, U_p\}$ à p+1 éléments, alors $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ a un recouvrement simple à p éléments, à savoir $\{U_{0,p}, \dots, U_{p-1,p}\}$. Par hypothèse de récurrence, $U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}$, U_p et $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ ont des groupes de cohomologie de dimension finie. Donc d'après ce qu'on a fait grâce à la suite de Mayer-Vietoris, $U_0 \cup \dots \cup U_{p-1} \cup U_p$ aussi.

□

Définition de $\check{\mathbf{C}}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$

On va reprendre ici les idées de Weil ([6]), en changeant quelque peu les notations. Supposons donné, une fois pour toutes, un recouvrement simple $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M. Si $J \subset I$, on pose :

$$U_J = \bigcap_{i \in J} U_i$$

Définition 1.4.5

L'ensemble $\mathcal{N}$ des parties non vides J de I telles que $U_J \neq \emptyset$ s'appelle le nerf de la famille $\mathcal{U}$.

Soit $H = (i_0, \dots, i_p)$ une suite quelconque d'éléments de I tous distincts. On considère la famille $(\omega_H) = (\omega_{i_0 \dots i_p})$ de q-formes, où H est dans $\mathcal{N}$ et ω_H est définie dans U_H (ne pas confondre cette écriture avec celle de la décomposition de ω dans un système de coordonnées locales). Une telle famille sera notée $\omega^{(p,q)}$ et $\check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$ est l'ensemble de ces éléments (Weil appelle ces éléments *coélément différentiel de bidegré (q,p)* (faire attention à l'inversion des notations !)). On dit que ω_H est alternée si c'est une fonction alternée des indices $i_0, \dots, i_p$.

On peut alors définir $d\omega^{(p,q)}$ comme un élément de $\check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^{q+1}(M)$, i.e. la famille $(d\omega_H)$. Comme chaque U_H est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc est contractible, on peut définir sur U_H un opérateur I_H tel que pour toute q-forme ($q \geq 1$) fermée ω définie sur U_H, on ait : $\omega = dI_H\omega$ (lemme de Poincaré appliqué à U_H). Alors $I\omega^{(p,q)} = (I_H\omega_H)$ est bien défini et est dans $\check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^{q-1}(M)$. Pour un $\omega^{(p,0)} = (f_H)$ (famille de fonctions), $d\omega^{(p,0)} = 0$ entraîne que (f_H) sont des constantes. Dans ce cas $\omega^{(p,0)}$ n'est autre qu'une famille de nombres réels. C'est ce qu'on appelle une cochaine de $\mathcal{N}$ (à coefficients réels) qu'on note par convention $\omega^{(p,-1)}$.

Soit maintenant $\omega^{(p,q)} = (\omega_{i_0 \dots i_p}) \in \check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$. On définit l'opérateur δ par : $\delta\omega^{(p,q)} = (\eta_{i_0 \dots i_{p+1}}) \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$ avec

$$\eta_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{\nu=0}^{p+1} (-1)^\nu \omega_{i_0 \dots \check{i}_\nu \dots i_{p+1}}$$

et $i_0 \dots \check{i}_\nu \dots i_{p+1}$ signifie qu'on enlève le $i_\nu$ème terme. Si ω est une q-forme globalement définie qu'on note par convention $\omega = \omega^{(-1,q)}$, elle induit une q-forme ω_i sur U_i. Dans ce cas on pose : $\delta\omega = (\omega_i) = \omega^{(0,q)}$.

Définition 1.4.6
$\delta\omega^{(p,q)}$ est le cobord de $\omega^{(p,q)}$.

Proposition 1.4.2
δ vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\delta d = d\delta$;*
2. *δ conserve l'alternance;*
3. *$\delta^2 = 0$.*

démonstration :
On note $\delta(\delta\omega^{(p,q)}) = (\epsilon_{i_0 \ldots i_p})$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{i_0\ldots i_p} &= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \eta_{i_0\ldots\check{i}_k\ldots i_{p+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \left(\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu \omega_{i_0\ldots\check{i}_\nu\ldots\check{i}_k\ldots i_{p+2}}\right) \\
&\quad + \left(\sum_{\nu=k+1}^{p+2}(-1)^{\nu-1}\omega_{i_0\ldots\check{i}_k\ldots\check{i}_\nu\ldots i_{p+2}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{k+\nu}\omega_{i_0\ldots\check{i}_\nu\ldots\check{i}_k\ldots i_{p+2}} \\
&\quad -\sum_{k=0}^{p+2}\sum_{\nu=k+1}^{p+2}(-1)^{k+\nu}\omega_{i_0\ldots\check{i}_k\ldots\check{i}_\nu\ldots i_{p+2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car il faut tenir compte du saut en i_k, d'où le signe (-) et car il y a autant de $\nu < k$ que de $k < \nu$.
□

Remarque : d et δ ont des propriétés très similaires et comme pour d, on va définir de la cohomologie pour δ.

Equation de descente d'une forme

On part d'une p-forme ω fermée ($d(\omega) = 0$), définie sur la variété M. Avec la convention du paragraphe précédent, on la note $\omega^{(-1,p)}$. On veut définir un élément $\omega^{(0,p-1)}$ vérifiant l'égalité suivante :

$$\boxed{(-1)^{-1}\delta(\omega^{(-1,p)}) \;=\; d(\omega^{(0,p-1)})} \tag{1.2}$$

où δ dans ce cas est simplement la restriction de $\omega^{(-1,p)}$ à un ouvert U_i. On pose :

$$\omega_{\alpha_0}^{(0,p-1)} \;=\; -I\delta(\omega^{(-1,p)})_{\alpha_0} \;=\; -I\left(\omega^{(-1,p)}\,|_{U_{\alpha_0}}\right)$$

En effet on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
d(\omega^{(0,p-1)}) &= -dI(\delta(\omega^{(-1,p)})) \\
&= -\delta(\omega^{(-1,p)}) + Id(\delta(\omega^{(-1,p)})) \qquad (1.3)\\
&= -\delta(\omega^{(-1,p)}) + I\delta(d\omega^{(-1,p)}) \qquad (1.4)\\
&= -\delta(\omega^{(-1,p)})
\end{aligned}$$

l'équation (1.3) étant simplement l'homototie de Poincaré appliquée sur chaque ouvert U_α (car on a un bon recouvrement), l'équation (1.4) s'obtenant par $\delta d = d\delta$ et car $\omega^{(-1,p)}$ est fermée. Evidemment à $\omega^{(-1,p)}$, on peut toujours ajouter un $d(q^{(0,p-2)})$ sans changer l'égalité . Il y a donc une ambiguité sur la définition de $\omega^{(0,p-1)}$, dont on aura éventuellement à tenir compte.

A partir de là, on définit une "suite" $(\omega^{(k,p-k-1)})$ pour $0 \leq k \leq p-2$, qui vérifie :

$$\boxed{(-1)^k \delta(\omega^{(k,p-k-1)}) \;=\; d(\omega^{(k+1,p-k-2)})} \tag{1.5}$$

en posant $\omega^{(k+1,p-k-2)} = (-1)^k I\delta(\omega^{(k,p-k-1)})$. Là encore on a une ambiguité dans la définition (on peut toujours ajouter un $d(q^{(k+1,p-k-3)})$). De plus l'ambiguité existante sur $\omega^{(k,p-k-1)}$ en $d(q^{(k,p-k-2)})$ se retrouve sur $\omega^{(k+1,p-k-2)}$ sous la forme de $\delta(q^{(k,p-k-2)})$.

On a donc obtenu un $\omega^{(p-1,0)}$ qui vérifie l'égalité (1.5) pour $k = p-2$. On définit alors $\omega^{(p,-1)}$ par :

$$\boxed{\omega^{(p,-1)} \;=\; (-1)^{p-1}\delta(\omega^{(p-1,0)})} \tag{1.6}$$

Par permutation de δ et d et par définition de $\omega^{(p-1,0)}$, on a : $d\delta(\omega^{(p-1,0)}) = 0$. Donc $d(\omega^{(p,-1)}) = 0$, donc $\omega^{(p,-1)}$ est une cochaîne de $\mathcal{N}$ (i.e. une suite de nombres réels). De plus on a bien sûr $\delta(\omega^{(p,-1)}) = 0$. Donc c'est un <u>cocycle</u> de $\mathcal{N}$.

Là encore ce cocycle est défini à un cobord près. Et un cobord, c'est un cocycle (comme les formes exactes et fermées). Donc on va définir les groupes de cohomologie de $\mathcal{N}$ $\underline{\check{H}^p(\mathcal{N})}$ comme le groupe-quotient de l'ensemble des cocycles sur $\mathcal{N}$ $(\{\xi/\delta\xi = 0\})$ par l'ensemble des cobords $(\{\xi/\xi = \delta\eta\})$.

On peut définir d_{-1} qui ne serait rien d'autre que l'inclusion des nombres réels dans les fonctions constantes. Donc l'égalité $\omega^{(p,-1)} = (-1)^{p-1}\delta(\omega^{(p-1,0)})$ devient :

$$d_{-1}(\omega^{(p,-1)}) \;=\; (-1)^{p-1}\delta(\omega^{(p-1,0)})$$

De même le δ sur les formes n'est rien d'autre qu'un δ_{-1} qui est la restriction. Donc les équations de descente (1.2), (1.5) et (1.6) s'écrivent sous la forme :

$$(-1)^k \delta(\omega^{(k,p-k-1)}) \;=\; d(\omega^{(k+1,p-k-2)}) \tag{1.7}$$

pour $-1 \leq k \leq p-1$ avec toutes les conventions précédentes. Sur $\check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$, on définit une opération linéaire $D = D_{(p,q)}$ par : $D_{(p,q)} = \delta_p + (-1)^p d_q$. Alors on a, pour $\omega^{(p,q)}$:

$$\begin{aligned}
D(D\omega^{(p,q)}) &= D(D_{(p,q)}\omega^{(p,q)}) \\
&= D(\delta_p(\omega^{(p,q)}) + (-1)^p d_q(\omega^{(p,q)})) \\
&= D_{(p+1,q)}(\delta_p(\omega^{(p,q)})) + (-1)^p D_{(p,q+1)}(d_q(\omega^{(p,q)})) \\
&= \delta_{p+1}(\delta_p(\omega^{(p,q)})) + (-1)^{p+1} d_q(\delta_p(\omega^{(p,q)})) \\
&\quad + (-1)^p \delta_p(d_q(\omega^{(p,q)})) + (-1)^p(-1)^p d_{q+1}(d_q(\omega^{(p,q)})) \\
&= (-1)^p \left(-d_q(\delta_p(\omega^{(p,q)})) + \delta_p(d_q(\omega^{(p,q)}))\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc D vérifie : $D^2 = 0$. Si on définit Ω par la somme formelle :

$$\Omega \;=\; \sum_{k=-1}^{p} \omega^{(k,p-k-1)}$$

alors on a la propriété suivante qui résume les équations de descente (1.7) pour une forme fermée :

Lemme 1.4.2

$$\boxed{D\Omega \;=\; 0} \tag{1.8}$$

démonstration :
On a :

$$\begin{aligned}
D\Omega &= \sum_{k=-1}^{p} D(\omega^{(k,p-k-1)}) \\
&= (-1)^{-1} d(\omega^{(-1,p)}) + \delta_{-1}(\omega^{(-1,p)}) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{p-1} \Big((-1)^k d(\omega^{(k,p-k-1)}) + \delta(\omega^{(k,p-k-1)}) \Big) \\
&\quad + (-1)^p d_{-1}(\omega^{(p,-1)}) + \delta(\omega^{(p,-1)})
\end{aligned}$$

Or $\omega^{(-1,p)}$ est fermée, donc $d(\omega^{(-1,p)}) = 0$. De plus $\omega^{(p,-1)}$ est un cocycle, donc $\delta(\omega^{(p,-1)}) = 0$. Donc on obtient :

$$\begin{aligned}
D\Omega &= \delta_{-1}(\omega^{(-1,p)}) + \sum_{k=0}^{p-1} \delta(\omega^{(k,p-k-1)}) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k d(\omega^{(k,p-k-1)}) + (-1)^p d_{-1}(\omega^{(p,-1)}) \\
&= \sum_{k=-1}^{p-1} \delta(\omega^{(k,p-k-1)}) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k d(\omega^{(k,p-k-1)}) \\
&= \sum_{k=-1}^{p-1} \Big(\delta(\omega^{(k,p-k-1)}) + (-1)^{k+1} d(\omega^{(k+1,p-k-2)}) \Big)
\end{aligned}$$

Les équations (1.7) sont donc bien équivalentes à $D\Omega = 0$.
□

On peut montrer, en définissant une homotopie pour δ grâce à une partition de l'unité, que cette équation de descente définit un isomorphisme entre les classes de cohomologie de de Rham pour les formes et de Čech pour les cochaînes de $\mathcal{N}$ (voir Weil ([6])).

2 Homologie singulière et homologie de Čech

2.1 Cycles et chaînes

Définitions

Dans ce paragraphe, on se sert essentiellement des définitions de Weil ([6]).

Dans un espace affine, on considère $(m+1)$ points $a_0, \ldots, a_m$; soit K l'enveloppe convexe de ces points (plus petit convexe contenant ces points) et soit L le sous-espace affine contenant K. L est l'ensemble des points de la forme :

$$\sum_{\mu=0}^{m} x_\mu a_\mu$$

pour $\sum x_\mu = 1$. De même K est l'ensemble des points de cette forme avec $\sum x_\mu = 1$ et $x_\mu \geq 0$ pour tout μ.

Définition 2.1.1

Si L est de dimension m, K est un simplexe euclidien de dimension m, de sommets $a_0, \ldots, a_m$.

En particulier dans $\mathbb{R}^{m+1}$, on a le simplexe particulier, celui dont les sommets sont la base canonique de $\mathbb{R}^{m+1}$, i.e. l'ensemble des $x = (x_\mu) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $\sum x_\mu = 1$ et $x_\mu \geq 0$ pour tout μ. On le note $\underline{\Sigma^m}$. Ainsi pour $\mathbb{R}^2$, Σ^1 est un segment (la variété le portant étant une droite), pour $\mathbb{R}^3$, Σ^2 est un triangle (la variété associée étant un plan).

Soit M une variété différentiable.

Définition 2.1.2

On appelle simplexe singulier différentiable de dimension m dans M la restriction à Σ^m d'une application différentiable f définie sur un voisinage de Σ^m à valeurs dans M.

Soit K et L définis comme précédemment à partir de points $a_0, \ldots, a_m$. Soit f une application différentiable d'un voisinage de K dans M (voisinage dans l'espace affine ambiant ou dans L). Alors l'application de $\mathbb{R}^{m+1}$ dans M, qui à $(x_0, \ldots, x_m)$ associe $f(\sum x_\mu a_\mu)$, restreinte à Σ^m, est un simplexe singulier différentiable noté $\underline{[f; a_0, \ldots, a_m]}$. Il est dit *dégénéré* si le sous-espace L qui porte les points $a_0, \ldots, a_m$, est de dimension $\leq m$.

Dans ce qui suit on sous-entendra le mot différentiable quand on parlera de simplexe singulier.

Soit maintenant G un groupe (additif). Dans la partie 2.3 on s'intéressera surtout au cas où $G = \mathbb{R}$.

Définition 2.1.3

On appelle chaine de dimension m dans M à coefficients dans G toute expression de la forme :

$$t = \sum_\nu c_\nu s_\nu$$

avec s_ν des simplexes de dimension m dans M dont les supports sont localement finis et $c_\nu \in G$.

La chaîne est dite *réduite* si tous les s_ν sont distincts et tous les c_ν sont non nuls. Le *support* $\mid t \mid$ d'une chaîne t sera la réunion des supports des simplexes figurant dans l'expression réduite de t. Une chaîne est *finie* si son support est compact. Si t est une chaîne finie, on pose :

$$deg(t) \ = \ \sum_\nu c_\nu$$

. Sur les chaînes on va définir des opérations b et ∂ avec leurs "homotopies" telles que l'ensemble des chaînes pour $G = \mathbb{R}$ avec ces opérations soit le dual de l'ensemble des formes différentielles avec les opérations d et δ, via l'intégration des formes sur des chaînes.

Si sur M on a un recouvrement $\mathcal{U}$, on appelle $\underline{\mathcal{U}\text{-simplexe}}$ un simplexe singulier contenu dans au moins l'un des U_i, c'est-à-dire que s'il est contenu dans deux U_i différents, il est contenu dans l'intersection. Cela revient au même que de définir des formes différentielles sur un ouvert U_i (de prendre $\omega^{(0,p)}$). Evidemment une $\underline{\mathcal{U}\text{-chaine}}$ est une chaîne dont tous les simplexes sont des $\mathcal{U}$-simplexes.

Opérations b et ∂

Si $s = [f; a_0, \ldots, a_m]$ et si on pose :

$$s_\mu \ = \ [f; a_0, \ldots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots, a_m]$$

on définit la chaîne finie suivante :

$$bs \ = \ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu s_\mu$$

s_μ est bien défini comme simplexe car K associé à $a_0, \ldots, a_m$ est convexe et si on enlève un point, le convexe alors obtenu est inclus dans K. Donc f est bien définie sur ce nouveau convexe. De plus on voit que si le simplexe s est de dimension m, bs est de dimension $m - 1$. Enfin on étend cet opérateur aux chaînes par G-linéarité.

Définition 2.1.4

Une chaîne de dimension m de bord nul s'appelle un $\underline{\text{cycle}}$ singulier.

Si t est une chaîne de dimension 0 (c'est-à-dire que la variété L est réduite à un point), $bt = 0$. On pose alors :

$$b_0(t) \ = \ deg(t)$$

si t est finie.
Remarque : le b_0 est l'analogue du d_{-1} ou du δ_{-1}; en effet d sur les nombres vaut 0 et donc on définit un d_{-1}.

Proposition 2.1.1

$b^2 = 0$, *i.e. si t est une chaîne de dimension $m > 1$, $b(bt) = 0$ et si elle est de dimension 1,* $b_0(bt) = 0$.

démonstration :

Soit $s = [f; a_0, \ldots, a_m]$ un simplexe de dimension ≥ 2. On a : $s_\mu \ = \ [f; a_0, \ldots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots, a_m]$.

Donc :

$$\begin{aligned}
b(bs) &= \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}b(s_{\mu}) \\
&= \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\left(\sum_{\nu=0}^{\mu-1}(-1)^{\nu}(s_{\mu})_{\nu} + \sum_{\nu=\mu+1}^{m}(-1)^{\nu-1}(s_{\mu})_{\nu}\right)
\end{aligned}$$

où $(s_{\mu})_{\nu} = [f; a_0, \ldots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \ldots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots, a_m]$. Il faut tenir compte du saut en a_{μ} et donc du changement de signe que cela induit. Donc :

$$\begin{aligned}
b(bs) &= \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}(-1)^{\mu+\nu}(s_{\mu})_{\nu} - \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=\mu+1}^{m}(-1)^{\nu+\mu}(s_{\mu})_{\nu} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car il y a autant de $\mu < \nu$ que de $\nu < \mu$.
Enfin si $s = [f; a_0, a_1]$, $bs = [f; a_0] - [f; a_1]$, donc $b_0(bs) = 1 - 1 = 0$.

□

Remarque : la démonstration est la même que pour $\delta^2 = 0$.
Maintenant on va définir une homotopie P pour b sur un ouvert contractible. Soit donc U un tel ouvert avec ϕ comme rétraction. Soit p la valeur constante de $\phi(x, 0)$. On désignera par $\overline{s_m}$ le simplexe dégénéré $[f; aa \ldots a]$ de dimension m, où $f(a) = p$. Les $\overline{s_m}$ vérifient les propriétés suivantes :

Lemme 2.1.1
$b\overline{s_m} = \overline{s_{m-1}}$ *si* m *est pair et* > 0;
$b\overline{s_m} = 0$ *si* m *est impair ou 0.*

démonstration :
Dans tous les cas où m est non nul on a :

$$b\overline{s_m} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\overline{s_{mk}}$$

avec $\overline{s_{mk}} = \overline{s_{m-1}}$ pour tout k. Donc si m est pair, $\sum(-1)^k = 1$ et sinon $\sum(-1)^k = 0$.

□

A partir de là, si on considère un simplexe singulier $s = [f; a_0, \ldots, a_m]$ dans U, les a_{μ} étant les points d'un espace affine E, on désigne par a_{μ}^0 et par a_{μ}^1 les points $(a_{\mu}, 0)$ et $(a_{\mu}, 1)$ dans $E \times \mathbb{R}$. Par définition, f est une application différentiable d'un voisinage de l'enveloppe convexe K des points a_{μ} dans U. On pose alors :

$$\tilde{f}(x, t) = \phi(f(x), t)$$

définie sur un voisinage de $K \times \mathbb{R}$. $\tilde{f}$ est différentiable et on définit alors l'opérateur P par :

$$Ps = \sum_{\mu-0}^{m}(-1)^{\mu}[\tilde{f}; a_0^0, a_1^0, \ldots, a_{\mu}^0, a_{\mu}^1, a_{\mu+1}^1, \ldots, a_m^1] + \overline{s_{m+1}}$$

avec $P0 = 0$ et l'on étend cet opérateur par linéarité aux chaînes finies dans U.

Proposition 2.1.2
Pour $m > 0$, $bPs + Pbs = s$ et pour $m = 0$, $bPs + Pbs = s - \overline{s_0}$.

Remarque : cette proposition est la même que le lemme de Poincaré sur les formes.
démonstration :
• $m > 0$: Soit $s = [f; a_0, \dots, a_m]$ dans U. Donc :

$$bs = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r [f; a_0 \dots \check{a}_r \dots a_m]$$

D'où on déduit :

$$\begin{aligned}
bPs &= \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} b\left([\tilde{f}; a_0^0, \dots, a_\mu^0, a_\mu^1, \dots, a_m^1]\right) \; + \; b(\overline{s_{m+1}}) \\
&= b(\overline{s_{m+1}}) \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\mu-1} (-1)^k [\tilde{f}; a_0^0 \dots \check{a}_k^0 \dots a_\mu^0 a_\mu^1 \dots a_m^1] \right) \qquad (2.1) \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \left(\sum_{k=\mu+1}^{m} (-1)^{k+1} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\mu^0 a_\mu^1 \dots \check{a}_k^1 \dots a_m^1] \right) \qquad (2.2) \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} (-1)^{\mu} [\tilde{f}; a_0^0 \dots \check{a}_\mu^0 a_\mu^1 \dots a_m^1] \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} (-1)^{\mu+1} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\mu^0 \check{a}_\mu^1 \dots a_m^1]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Pbs &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(P[f; a_0 \dots \check{a}_r \dots a_m] \right) \\
&= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \overline{s_m} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^{\nu} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\nu^0 a_\nu^1 \dots \check{a}_k^1 \dots a_m^1] \right) \qquad (2.3) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\sum_{\nu=r+1}^{m} (-1)^{\nu-1} [\tilde{f}; a_0^0 \dots \check{a}_k^0 \dots a_\mu^0 a_\mu^1 \dots a_m^1] \right) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Les équations (2.1) et (2.4) (resp. (2.2) et (2.3)) sont inverses l'une de l'autre. Donc on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
bPs + Pbs &= b(\overline{s_{m+1}}) + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \overline{s_m} \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu (-1)^\mu [\tilde{f}; a_0^0 \dots \check{a}_\mu^0 a_\mu^1 \dots a_m^1] \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu (-1)^{\mu+1} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\mu^0 \check{a}_\mu^1 \dots a_m^1] \\
&= b(\overline{s_{m+1}}) + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \overline{s_m} \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{m} [\tilde{f}; a_0^0 \dots \check{a}_\mu^0 a_\mu^1 \dots a_m^1] \qquad (2.5) \\
&\quad - \sum_{\mu=0}^{m} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\mu^0 \check{a}_\mu^1 \dots a_m^1] \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Les équations (2.5) et (2.6) sont égales respectivement à :

$$\sum_{\mu=0}^{m} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_{\mu-1}^0 a_\mu^1 \dots a_m^1]$$

et

$$-\sum_{\mu=0}^{m} [\tilde{f}; a_0^0 \dots a_\mu^0 a_{\mu+1}^1 \dots a_m^1]$$

Donc (2.5) + (2.6) est égal à :

$$[\tilde{f}; a_0^1 \dots a_m^1] - [\tilde{f}; a_0^0 \dots \dots a_m^0]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
bPs + Pbs &= b(\overline{s_{m+1}}) + \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \overline{s_m} \\
&\quad + [\tilde{f}; a_0^1 \dots a_m^1] - [\tilde{f}; a_0^0 \dots \dots a_m^0]
\end{aligned}$$

Or par définition des a_μ^0 et a_μ^1, on obtient :

$$\begin{aligned}
[\tilde{f}; a_0^1 \dots a_m^1] &= [f; a_0 \dots a_m] = s \\
[\tilde{f}; a_0^0 \dots a_m^0] &= [f; a \dots a] = \overline{s_m}
\end{aligned}$$

De plus si m est pair :

$$\begin{aligned}
b(\overline{s_{m+1}}) &= 0 \\
\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \overline{s_m} &= \overline{s_m}
\end{aligned}$$

et si m est impair :

$$b(\overline{s_{m+1}}) = \overline{s_m}$$

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\overline{s_m} \;=\; 0$$

Donc on a bien l'égalité voulue si $m > 0$.

• $m = 0$: Soit $s = [f; a_0]$. On a $bs = 0$. Donc $Pbs = 0$ et :

$$\begin{aligned} bPs &= b[\tilde{f}; a_0^0 a_0^1] \;=\; [\tilde{f}; a_0^1] - [\tilde{f}; a_0^0] \\ &= s - \overline{s_0} \end{aligned}$$

□

Donc pour toute chaîne finie t de dimension m, on a $t = bPt+Pbt$ si $m > 0$ et $t = bPt+(b_0t)\overline{s_0}$ si $m = 0$.

Les propriétés de b permettent de définir des groupes d'homologie singulière à l'aide de b et du groupe des chaînes (ou encore du groupes des chaînes finies) à coefficients dans G, comme groupe des m-cycles ($bt = 0$) quotienté par le groupe des m-bords (t=bs).

Evidemment l'homotopie P de b est définie sur des ouverts contractibles (comme I pour d). Donc on va faire de l'homologie plutôt sur un recouvrement simple $\mathcal{U}$ de M. Pour cela on se restreindra aux $\mathcal{U}$-chaînes, i.e. à celles contenues toutes entières dans au moins un ouvert U_i. Cela ne change en rien les groupes d'homologie (théorème de S. Eilenberg : idée de la démonstration dans ([6]), paragraphe3).

2.2 Isomorphisme entre homologie singulière et de Čech

Définition de $\check{\mathrm{C}}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$

On a défini dans le chapitre 1, $\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$ comme l'ensemble des q-formes définies sur des $(p+1)$-intersections d'ouverts U_i. On va faire de même avec des q-chaînes contenues des $(p+1)$-intersections.
Soit $H = (i_0, \ldots, i_p)$ une suite quelconque d'éléments de I tous distincts. On considère la famille $(t_H) = (t_{i_0 \ldots i_p})$ de q-chaînes, où H est dans $\mathcal{N}$ et t_H est contenue dans U_H (ici U_H contient, alors que dans le cas des formes on définit dessus). Une telle famille sera notée $\underline{t_{(p,q)}}$ et $\underline{\check{\mathrm{C}}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)}$ est l'ensemble de ces éléments (Weil appelle ces éléments *élément singulier de bidegré (q,p)* (faire attention aux différentes notations !)). On dit que $t_{(p,q)}$ est finie si les t_H sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux et t_H est alternée si c'est une fonction alternée des indices $i_0, \ldots, i_p$.

On peut alors définir $bt_{(p,q)}$ comme un élément de $\check{\mathrm{C}}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_{q-1}(M)$, i.e. la famille (bt_H). Pour un $t_{(p,0)}$, $b_0 t_{(p,0)} = (b_0 t_H)$ fait corespondre à tout H un élément $b_0 t_H$ du groupe G. C'est ce qu'on appelle une chaine de $\mathcal{N}$ (à coefficients dans G) qu'on note par convention $t_{(p,-1)}$.

Comme chaque U_H est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc est contractible, on peut définir sur U_H un opérateur P_H tel que pour toute q-chaîne ($q \geq 1$) t de bord nul contenue dans U_H, on ait : $t = bP_H t$ (proposition 2.1.2 appliquée à U_H). Ainsi on a : $Pt_{(p,q)} = (P_H t_H)$, qui est bien défini et est dans $\check{\mathrm{C}}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_{q+1}(M)$. Si $q = 0$, $b_0 t_{(p,0)} = 0$ entraîne $t_{(p,0)} = bPt_{(p,0)}$.

Soit maintenant $t_{(p,q)} = (t_{i_0 \ldots i_p}) \in \check{\mathrm{C}}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$ et $p > 0$. On définit l'opérateur ∂ *sur les éléments alternés* par : $\partial t_{(p,q)} = (u_{i_0 \ldots i_{p-1}}) \in \check{\mathrm{C}}_{p-1}(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$ avec

$$u_{i_0 \ldots i_{p-1}} = \sum_k t_{i_0 \ldots i_{p-1} k}$$

où la somme doit être étendue à l'ensemble des $\mid i_0 \ldots i_{p-1} k \mid \in \mathcal{N}$.
Pour $t_{(0,q)} = (t_i)$, on pose $\partial t_{(0,q)} = \sum_k t_k$. Dans ce cas $\partial t_{(0,q)}$ est une chaîne finie si $t_{(0,q)}$ est fini.

Proposition 2.2.1
∂ a les propriétés suivantes :

1. *∂ et b permutent;*
2. *$\partial^2 = 0$.*

démonstration :
La première propriété vient simplement du fait que b n'agit pas sur l'espace d'arrivée des simplexes, mais uniquement sur les convexes sur lesquels les simplexes sont définis.
Pour la seconde, on prend $t_{(p,q)} = (t_{i_0 \ldots i_p})$, $\partial t_{(p,q)} = (u_{i_0 \ldots i_{p-1}})$ et $\partial(\partial t_{(p,q)}) = (v_{i_0 \ldots i_{p-2}})$ qui

vérifient :

$$\begin{aligned} v_{i_0\ldots i_{p-2}} &= \sum_{k=0}^{p-1} u_{i_0\ldots i_{p-2}k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p} t_{i_0\ldots i_{p-2}kl} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1} t_{i_0\ldots i_{p-2}kl} + \sum_{l=k+1}^{p} t_{i_0\ldots i_{p-2}kl}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car ce sont des éléments alternés.

□

(remarque : Weil définit ∂ de manière différente sur tous les éléments et définit ∂' sur les alternés)

Les groupes d'homologie de $\mathcal{N}$ sont ceux qui sont définis au moyen des chaînes alternées sur $\mathcal{N}$ et de l'opérateur ∂.

Par rapport à ce qu'on a fait sur les formes, on va ici en plus démontrer qu'il y a un isomorphisme entre les groupes d'homologie singulière et les groupes d'homologie de $\mathcal{N}$ (ou de Čech). Pour cela on a besoin de faire correspondre à ∂ une homotopie, propriété que l'on a admise pour δ.

On définit un opérateur L tel que $\partial t_{(p,q)} = 0$ implique $t_{(p,q)} = \partial L t_{(p,q)}$. Pour cela pour s un $\mathcal{U}$-simplexe, on note $U_{f(s)}$ l'un des ouverts dans lequel il est contenu. Soit $t_{(p,q)} = (t_{i_0\ldots i_p})$ et soit $t_H = \sum_\nu c^\nu_{i_0\ldots i_p} s_\nu$ l'expression réduite de $t_{i_0\ldots i_p}$. Alors on définira un élément $Lt_{(p,q)} = v_{i_0\ldots i_{p+1}}$ dans $\check{\mathrm{C}}_{p+1}(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$ en posant :

$$v_{i_0\ldots i_{p+1}} = \sum_{\mu=0}^{p+1} \sum_{f(s_\nu)=i_\mu} (-1)^{p+1+\mu} c^\nu_{i_0\ldots\check{i}_\mu\ldots i_{p+1}} s_\nu$$

(remarque : c'est le L' de Weil). Si $t_{(p,q)}$ est fini, $Lt_{(p,q)}$ est fini. Et si $t = \sum_\nu c^\nu s_\nu$ est l'expression réduite d'une $\mathcal{U}$-chaîne de dimension q, on définit, grâce à :

$$v_i = \sum_{f(s_\nu)=i} c^\nu_i s_\nu$$

un élément Lt dans $\check{\mathrm{C}}_0(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$.

Proposition 2.2.2

On a donc :

$$t_{(p,q)} = \partial L t_{(p,q)} + L\partial t_{(p,q)}$$

si $p \geq 0$ et :

$$t = \partial L t$$

si t est une chaîne.

démonstration :

• si t est une chaîne, t s'écrit :

$$t = \sum_\nu c^\nu s_\nu$$

Donc Lt devient :

$$Lt = \sum_{f(s_\nu)=i_0} c^\nu_{i_0} s_\nu$$

Ainsi on obtient :

$$\partial Lt = \sum_{i_0} \sum_{f(s_\nu)=i_0} c^\nu_{i_0} s_\nu$$

Comme on parcourt tous les i_0, on récupère bien t.

• si $t_{(p,q)} = (t_{i_0 \dots i_p})$ avec :

$$t_{i_0 \dots i_p} = \sum_\nu c^\nu_{i_0 \dots i_p} s_\nu$$

On pose : $\partial t_{(p,q)} = (u_{i_0 \dots i_{p-1}})$ avec :

$$u_{i_0 \dots i_{p-1}} = \sum_k \sum_\nu c^\nu_{i_0 \dots i_{p-1} k} s_\nu$$

et ainsi :

$$(L \partial t_{(p,q)})_{i_0 \dots i_p} = \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{f(s_\nu)=i_\mu} \sum_k (-1)^{p+\mu} c^\nu_{i_0 \dots \check{i}_\mu \dots i_p k} s_\nu$$

De plus :

$$\begin{aligned}
(\partial L t_{(p,q)})_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{i_{p+1}} \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{f(s_\nu)=i_\mu} \sum_k (-1)^{p+1+\mu} c^\nu_{i_0 \dots \check{i}_\mu \dots i_p i_{p+1}} s_\nu \\
&\quad + \sum_{i_{p+1}} \sum_{f(s_\nu)=i_{p+1}} (-1)^{p+1+p+1} c^\nu_{i_0 \dots i_p} s_\nu \\
&= -\sum_k \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{f(s_\nu)=i_\mu} \sum_k (-1)^{p+\mu} c^\nu_{i_0 \dots \check{i}_\mu \dots i_p k} s_\nu \\
&\quad + (t_{(p,q)})_{i_0 \dots i_p}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Descente sur les chaînes et isomorphisme

Pour homogénéiser les notations, on note : $t_{(-1,p)}$ une p-chaîne de M, et $t_{(p,-1)}$ une p-chaîne de $\mathcal{N}$. De plus on note pour $0 \leq h \leq p$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_p &= \{t_{(-1,p)} / b t_{(-1,p)} = 0\} \\
\mathcal{B}_p &= \{t_{(-1,p)} / \exists t'_{(-1,p+1)}, t_{(-1,p)} = b t'_{(-1,p+1)}\} \\
\mathcal{C}_{h,p} &= \{t_{(h,p-h)} / b \partial t_{(h,p-h)} = 0\} \\
\mathcal{B}_{h,p} &= \{t_{(h,p-h)} / t_{(h,p-h)} \in \mathcal{C}_{h,p}, t_{(h,p-h)} = b(t'_{(h,p-h+1)}) + \partial(t''_{(h+1,p-h)})\} \\
\mathcal{C}(\mathcal{N}) &= \{t_{(p,-1)} / \partial t_{(p,-1)} = 0\} \\
\mathcal{B}(\mathcal{N}) &= \{t_{(p,-1)} / t_{(p,-1)} = \partial t'_{(p+1,-1)}\}
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{C}_{p,p} = \{t_{(p,0)} / b_0 \partial t_{(p,0)} = 0\}$. Comme sur les formes, on définit des équations de descente à partir d'un p-cycle sur M.

Soit $t_{(-1,p)}$ un p-cycle (i.e. $bt_{(-1,p)} = 0$). On considère $t_{(0,p)}$ tel que :

$$t_{(-1,p)} \;=\; \partial t_{(0,p)} \tag{2.7}$$

D'abord il existe un tel $t_{(0,p)}$, en posant $t_{(0,p)} = Lt_{(-1,p)}$. D'après les propriétés de L, $t_{(0,p)}$ est bien défini, à un ∂ près et on a bien l'équation (2.7). De plus si $t_{(-1,p)}$ est lui-même défini à un bord près, i.e. si on prend : $t_{(-1,p)} = bt'_{(-1,p+1)}$, on pose $t'_{(0,p)} = t_{(0,p)} - b(Lt'_{(-1,p+1)})$. Alors $\partial t'_{(0,p)} = 0$, donc $t'_{(0,p)} = \partial Lt'_{(0,p)}$. Ainsi $t_{(0,p)} = b(Lt'_{(-1,p+1)}) + \partial(Lt'_{(0,p)})$. Donc on a un isomorphisme entre les groupes :

$$\frac{\mathcal{C}_p}{\mathcal{B}_p} \simeq \frac{\mathcal{C}_{0,p}}{\mathcal{B}_{0,p}}$$

donné par l'égalité (2.7).

Les équations suivantes pour $0 \leq h \leq p-1$ sont données par :

$$bt_{(h,p-h)} = \partial t_{(h+1,p-h-1)} \tag{2.8}$$

On va montrer que ces égalités donnent pour $0 \leq h \leq p-1$ un isomorphisme entre :

$$\frac{\mathcal{C}_{h,p}}{\mathcal{B}_{h,p}} \simeq \frac{\mathcal{C}_{h+1,p-h-1}}{\mathcal{B}_{h+1,p-h-1}}$$

On satisfera l'égalité (2.8) en posant $t_{(h+1,p-h-1)} = Lbt_{(h,p-h)}$ si $t_{(h,p-h)}$ est donné dans $\mathcal{C}_{h,p}$ et $t_{(h,p-h)} = P\partial t_{(h+1,p-h-1)}$ si $t_{(h+1,p-h-1)}$ est donné dans $\mathcal{C}_{h+1,p}$.
Si $t_{(h,p-h)}$ est dans $\mathcal{B}_{h,p}$, i.e. si $t_{(h,p-h)} = b(t'_{(h,p-h+1)}) + \partial(t''_{(h+1,p-h)})$, en posant : $v_{(h+1,p-h-1)} = t_{(h+1,p-h-1)} - bt''_{(h+1,p-h)}$ on a $\partial v_{(h+1,p-h-1)} = 0$, d'où $v_{(h+1,p-h-1)} = \partial(Lv_{(h+1,p-h-1)})$ et $t_{(h+1,p-h-1)} = bt''_{(h+1,p-h)} + \partial(Lv_{(h+1,p-h-1)})$, i.e. $t_{(h+1,p-h-1)} \in \mathcal{B}_{h+1,p}$.
Réciproquement, si $t_{(h+1,p-h-1)} = b(t'_{(h+1,p-h)}) + \partial(t''_{(h+2,p-h-1)})$, on aura $bw_{(h,p-h)} = 0$ en posant $w_{(h,p-h)} = t_{(h,p-h)} - \partial(t'_{(h+1,p-h)})$. Donc $w_{(h,p-h)} = bPw_{(h,p-h)}$ car $p-h > 0$. On a donc : $t_{(h,p-h)} = b(Pw_{(h,p-h)}) + \partial(t'_{(h+1,p-h)})$, d'où l'isomorphisme.

Enfin on termine par l'égalité :

$$b_0 t_{(p,0)} = t_{(p,-1)} \tag{2.9}$$

qui fournit un isomorphisme :

$$\frac{\mathcal{C}_{p,p}}{\mathcal{B}_{p,p}} \simeq \frac{\mathcal{C}(\mathcal{N})}{\mathcal{B}(\mathcal{N})}$$

En effet si $t_{(p,0)}$ est donné dans $\mathcal{C}_{p,p}$, $b_0 t_{(p,0)}$ fournit bien un cycle de $\mathcal{N}$. De plus si $t_{(p,0)} = b(t'_{(p,1)}) + \partial(t''_{(p+1,0)})$, $t_{(p,-1)} = \partial(b_0 t''_{(p+1,0)})$.
Inversement, supposons $t_{(p,-1)}$ donné comme cycle ce $\mathcal{N}$. Il est clair que l'on peut former $t_{(p,0)}$ vérifiant l'égalité (2.9). Il suffit de revenir à la définition de b_0, car on manipule des éléments d'un groupe G. Et si $t_{(p,-1)} = \partial(t'_{(p+1,-1)})$ avec $b_0 t'_{(p+1,0)} = t'_{(p+1,0)}$, en posant $v_{(p,0)} = t_{(p,0)} - \partial t'_{(p+1,0)}$, on obtient $b_0 v_{(p,0)} = 0$, donc $v_{(p,0)} = bPv_{(p,0)}$ et $t_{(p,0)} = b(Pv_{(p,0)}) + \partial(t'_{(p+1,0)}$.

Ainsi on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.2.1

Les groupes d'homologie singulière et les groupes d'homologie de Čech sont isomorphes, via les relations (2.7), (2.8) et (2.9). De plus cet isomorphisme est G-linéaire.

La G-linéarité est immédiate, car les opérateurs qu'on a construit sont tous G-linéaires.

2.3 Théorèmes de de Rham : dualité simplexes-formes différentielles

Intégration des formes différentielles

Pour parler d'intégration sur une variété, il faut d'abord préciser quelques idées sur l'orientation d'une variété. On va se contenter de rappeler la définition et les principaux résultats qui vont avec.
On se donne E un espace vectoriel et M une variété tous deux de dimension n. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ et $(w_1, \ldots, w_n)$ deux bases de E. On dit que ces deux bases ont la même orientation si $w_i = \alpha_i^j v_j$ avec $det(\alpha_i^j) > 0$. Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases, avec deux classes d'équivalence.

Définition 2.3.1
Une orientation sur E est une de ces classes d'équivalence. Un espace vectoriel orienté est un espace vectoriel avec le choix d'une orientation.

Sur chaque $T_x(M)$, on peut faire le choix d'une orientation μ_x.

Définition 2.3.2
Une orientation μ sur une variété M est le choix d'une orientation μ_x sur $T_x(M)$ pour chaque $x \in M$ telle que : pour chaque $x_0 \in M$ il existe un voisinage W_{x_0} de x_0 et des champs de vecteurs $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sur W_{x_0} tels que pour $x \in W_{x_0}$, $(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_n(x)) \in \mu_x$.
Une variété sur laquelle une telle orientation peut être construite est dite orientable .

On a les deux résultats suivants :

Proposition 2.3.1
Une variété M est orientable si et seulement si M a un atlas $\{(U_i, \Phi_i)\}$ tel que $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ ait un jacobien strictement positif sur le domaine de définition de cette application. On dit alors que l'on a un atlas orienté de façon cohérente.

Théorème 2.3.1
Une variété est orientable si et seulement s'il existe une n-forme différentiable qui ne s'annule en aucun point de la variété.

démonstration : : voir ([7]), pages 146-156 ou ([8]), pages 215-219.
□
Exemples : $\mathbb{R}^n$, S^n, T^n (tore à n trous), $\mathbb{R}P(m)$ (espace projectif de $\mathbb{R}^{m+1}$) pour m impair sont orientables. Le ruban de Möbius, les $\mathbb{R}P(m)$ pour m pair ne le sont pas.
On va pouvoir maintenant définir l'intégrale d'une n-forme à support compact sur une variété de dimension n orientée, qu'on note :

$$\int_M \omega$$

Soit ω une telle n-forme. On suppose que son support est inclus dans un ouvert U du recouvrement de la variété. Dans ce cas, on peut donc écrire sur U :

$$\omega \;=\; h dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

où $\Phi = (x^1, \ldots, x^n)$ sont les coordonnées locales associées à U. Il est immédiat que le support de ω et de h sont les mêmes. On pose alors comme définition de l'intégrale :

$$\int_M \omega \;=\; \int_{\Phi(U)} (h \circ \Phi^{-1}) d\mu$$

où $d\mu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Il faut bien sûr vérifier que cette intégrale est correctement définie, i.e. vérifier que sur les intersections du recouvrement on n'est pas deux valeurs différentes de l'intégrale. Pour cela, on n'a besoin que de la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin dans le cas général, on se donne une partition de l'unité $\{\theta_i\}_{i\in I}$ subordonnée au recouvrement donné. Pour ω une n-forme à support compact, on voit que $\theta_i\omega$ est identiquement nul sauf pour un nombre fini de $i \in I' \subset I$. Alors on obtient :

$$\omega \;=\; \sum_{i\in I'} \theta_i\omega \;=\; \sum_{i\in I} \theta_i\omega$$

On pose alors :

$$\int_M \omega \;=\; \sum_{i\in I'} \int_M \theta_i\omega \;=\; \sum_{i\in I} \int_M \theta_i\omega$$

la seule chose à vérifier étant que cette définition ne dépend pas de la partition choisie. Bien sûr cette intégrale est une application $\mathbb{R}$-linéaire, si on change l'orientation, on change le signe de l'intégrale et enfin si $F : M \to N$ est un difféomorphisme et si ω est une forme sur N, on a la formule :

$$\int_M F^*\omega \;=\; \pm \int_N \omega$$

le signe dépendant du fait que F préserve ou non l'orientation.

Il nous reste à voir le théorème de Stokes pour les variétés à bord, dont on rappelle la définition.
Soit $H^n \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. C'est le demi-espace supérieur de $\mathbb{R}^n$. On note par ∂H^n l'ensemble suivant :

$$bH^n \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$$

C'est à la fois un sous-ensemble et de $\mathbb{R}^n$ et de H^n. On l'appelle *bord* de H^n . Il est clairement difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. On peut encore parler d'ouverts U et V de H^n (intersections d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec H^n et de difféomorphismes entre ces ouverts (applications bijectives entre des ouverts, bi-C^∞) . Mais on voit que l'on a deux cas à distinguer :

1. soit les ouverts sont contenus dans $H^n \setminus bH^n$, et alors ce sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et les notions de difféomorphismes coïncident;

2. soit $U \cap bH^n \neq \emptyset$ et à ce moment là si V est difféomorphe à U, on a : $V \cap bH^n \neq \emptyset$. De plus le difféomorphisme envoie les points du bord sur des points du bord et les points intérieurs sur les points intérieurs.

On peut maintenant définir les variétés à bord :

Définition 2.3.3
Une variété différentiable à bord M est un espace de Hausdorf avec un atlas $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ tel que les ouverts U_α recouvrent la variété et les Φ_α sont des homéomorphismes de U_α dans un ouvert de H^n (lui-même sous-espace topologique de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ et $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ sont des difféomorphismes de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ et de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

L'ensemble des points tels que $\Phi(p) \in bH^n$ est appelé le *bord de* M et on le note bM. Alors $M \setminus bM$ est une variété au sens du paragraphe 1. Si $bM = \emptyset$, M est une *variété sans bord.* Le bord vérifie les théorèmes suivants :

Théorème 2.3.2

Si M est une variété de dimension n à bord, alors la structure différentiable de M induit une structure différentiable de dimension $n-1$ sur le sous-espace bM de M.

Théorème 2.3.3

Soit M une variété orientée et supposons que bM ne soit pas vide. Alors bM est orientable et l'orientation sur M détermine une orientation sur bM.

Pour les démonstrations de ces théorèmes, voir ([7]), pages 162-164 ou ([8]), pages 251-259.

Terminons ce paragraphe par le théorème suivant :

Théorème 2.3.4 (théorème de Stokes)

Soit M une variété de dimension n orientée à bord bM. Soit ω une $(n-1)$-forme sur M à support compact. Alors :

$$\int_M d\omega \;=\; \int_{bM} \omega$$

En particulier sur une variété compacte sans bord, l'intégrale de la dérivée d'une forme est toujours nulle.

On a intégré des formes sur des variétés. Maintenant on va voir comment intégrer ces formes sur des simplexes (et des chaînes). Rappelons qu'un simplexe singulier s de dimension p est la restriction d'une fonction f définie sur le voisinage d'un certain simplexe euclidien s^p dans M à ce simplexe. On va poser :

$$\int_s \omega \;=\; \int_{s^p} f^*\omega$$

pour toute p-forme ω. Pour une p-chaîne $c = \sum_\nu c_\nu s_\nu$, on pose :

$$\int_c \omega \;=\; \sum_\nu c_\nu \int_{s_\nu} \omega$$

en supposant que le groupe G soit $\mathbb{R}$ ou un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

On se retrouve avec deux défintions de l'intégration. On peut montrer que ce sont les "mêmes" (voir ([9]), pages 334-349). Donc on définit une forme bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à une chaîne c de dimension m et à une m-forme ω associe l'intégrale de ω sur c. Le problème est de montrer que cette forme est non-dégénérée.

Dualité simplexe-forme

Pour l'instant on a montré qu'on avait un isomorphisme entre les groupes d'homologie singuliére et les groupes d'homologie de Čech. On a admis que les équations (1.8) fournissent un isomorphisme entre les groupes $H^p_{deR}(M)$ et les groupes de cohomologie de Čech (Weil en donne la démonstration). On a une forme bilinéaire naturelle entre les groupes de Čech. En effet soit $\omega^{(p,-1)}$ une cochaîne de $\mathcal{N}$ et $t_{(p,-1)}$ une chaîne de $\mathcal{N}$. On pose :

$$\langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)} \rangle \;=\; \sum_{i_0 \ldots i_p} (t_{(p,-1)})_{i_0 \ldots i_p} (\omega^{(p,-1)})_{i_0 \ldots i_p} \tag{2.10}$$

(on multiplie les nombres définis sur la même intersection et on somme).
Il est à peu près évident que cette forme bilinéaire est non-dégénérée. En effet si on fixe $t_{(p,-1)}$ tel que pour tout $\omega^{(p,-1)}$, $\langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)}\rangle$ soit nul, alors en prenant $\omega^{(p,-1)}$ valant 1 sur l'intersection $U_{i_0\dots i_p}$ et 0 ailleurs, on a $(t_{(p,-1)})_{i_0\dots i_p} = 0$, et ceci pour toute intersection, donc $t_{(p,-1)}$ est nul.

De plus on a une forme entre les p-chaînes singulières et les p-formes, définie par l'intégration. On se place dans le cas où le groupe G est $\mathbb{R}$. Pour un élément $\omega^{(p,q)}$ de $\check{C}^p(\mathcal{U}) \otimes \Lambda^q(M)$ et un élément $t_{(p,q)}$ de $\check{C}_p(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{S}_q(M)$, on définit une forme bilinéaire :

$$\langle t_{(p,q)}, \omega^{(p,q)}\rangle \;=\; \sum_{i_0\dots i_p} \int_{(t_{(p,q)})_{i0,\dots,i_p}} (\omega^{(p,q)})_{i_0,\dots,i_p}$$

La formule de Stokes donne que :

$$\langle bt_{(p,q+1)}, \omega^{(p,q)}\rangle \;=\; \langle t_{(p,q+1)}, d\omega^{(p,q)}\rangle$$

et on vérifie que :

$$\langle \partial t_{(p+1,q)}, \omega^{(p,q)}\rangle \;=\; \langle t_{(p+1,q)}, \delta\omega^{(p,q)}\rangle$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.3.1
Si $\omega^{(-1,p)}$ et $\omega^{(p,-1)}$ sont reliées par les équations de descente (1.8) et si $t_{(-1,p)}$ et $t_{(p,-1)}$ sont liés par les équations (2.7), (2.8) et (2.9), alors on obtient :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} \;=\; \pm\langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)}\rangle$$

démonstration :
Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} &= \langle \partial t_{(0,p)}, \omega^{(-1,p)}\rangle \;=\; \langle t_{(0,p)}, \delta\omega^{(-1,p)}\rangle \\
&= \langle t_{(0,p)}, (-1)d\omega^{(0,p-1)}\rangle \;=\; (-1)\langle bt_{(0,p)}, \omega^{(0,p-1)}\rangle \\
&= (-1)\langle \partial t_{(1,p-1)}, \omega^{(0,p-1)} \;=\; (-1)\langle t_{(1,p-1)}, \delta\omega^{(0,p-1)}\rangle \\
&= \langle t_{(1,p-1)}, (-1)^{-1+0} d\omega^{(1,p-2)}\rangle \;=\; (-1)^{-1+0}\langle bt_{(1,p-1)}, \omega^{(1,p-2)}\rangle \\
&= (-1)^{-1+0}\langle \partial t_{(2,p-2)}, (-1)^{-1+0} d\omega^{(1,p-2)}\rangle \;=\; \dots \\
\\
&= (-1)^{-1+0+1+\dots+(p-3)}\langle \partial t_{(p-1,1)}, \omega^{(p-2,1)}\rangle \;=\; (-1)^{(\dots)}\langle t_{(p-1,1)}, \delta\omega^{(p-2,1)}\rangle \\
&= (-1)^{-1+0+1+\dots+(p-2)}\langle t_{(p-1,1)}, d\omega^{(p-1,0)}\rangle \;=\; (-1)^{(\dots)}\langle bt_{(p-1,1)}, \omega^{(p-1,0)}\rangle \\
&= (-1)^{-1+0+1+\dots+(p-2)}\langle \partial t_{(p,0)}, \omega^{(p-1,0)}\rangle \;=\; (-1)^{(\dots)}\langle t_{(p,0)}, \delta\omega^{(p-1,0)}\rangle \\
&= (-1)^{-1+0+1+\dots+(p-1)}\langle t_{(p,0)}, \omega^{(p,-1)}\rangle \;=\; (-1)^{(\dots)}\langle b_0 t_{(p,0)}, \omega^{(p,-1)}\rangle \\
&= (-1)^{-1+0+1+\dots+(p-1)}\langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)}\rangle
\end{aligned}$$

Le $\pm$ de l'énoncé du lemme vaut précisément $(-1)^{-1+0+1+\dots+(p-1)}$. $\square$

Donc *les groupes de cohomologie de de Rham et les groupes d'homologie singulière à coefficients réels de M ont entre eux les mêmes relations de dualité que les groupes de cohomologie et d'homologie de $\mathcal{N}$*. En particulier comme on a des isomorphismes entre classes, on obtient :

Théorème 2.3.5 (théorème de de Rham)

La forme bilinéaire entre formes et chaînes est non-dégénérée, i.e. :

1. *si une forme fermée ω à support compact sur M est telle que $\int_t \omega = 0$ pour tout cycle t, alors ω est égale à $\omega = d\eta$ avec η à support compact (même résultat en remplaçant fermée à support compact par fermée et cycle par cycle fini);*

2. *si un cycle fini t est tel que pour toute forme fermée ω $\int_t \omega = 0$, t est homologue à 0.*

Diagramme bilan

On peut résumer les résultats obtenus jusqu'ici par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^p_{deR}(M) \arrow[r, shift left, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \check{H}^p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\
(H_{sing})_p(M) \arrow[r, shift left, "(2)"] & \check{H}_p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

où :

1. (1) est l'isomorphisme dû aux équations de descente (1.8) sur une forme fermée (démontré par Weil) (paragrphe 1.4);

2. (2) est l'isomorphisme dû aux équations de descente (2.7), (2.8) et (2.9) sur un cycle (paragraphe 2.2);

3. (3) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces, qui deviennent donc duaux l'un de l'autre (paragraphe 2.3);

4. (4) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces (théorème de de Rham).

3 "Collating formula"

3.1 Partition de l'unité : θ_p^p

Définition des θ_p^p

On se donne un recouvrement simple $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ sur une variété M et une partition de l'unité $\{\theta_\alpha\}$ subordonnée à ce recouvrement. En particulier, les θ_i vérifient la relation :

$$\sum_\alpha \theta_\alpha \;=\; 1$$

Les θ_α sont des fonctions définies sur M, à support dans U_α, donc des 0-formes. On les notera donc θ_α^0 ou encore collectivement θ_0^0. Si on pose θ_{-1}^{-1} le réel 1, c'est en quelque sorte une (-1)-forme. De plus θ_0^0 et θ_{-1}^{-1} vérifient la relation :

$$\sum_{i_0} (\theta_0^0)_{i_0} \;=\; \theta_{-1}^{-1}$$

ou en souvenant comment on a défini notre opérateur ∂ sur les chaînes, on pose :

$$\partial\theta_0^0 \;=\; \sum_{i_0} (\theta_0^0)_{i_0} \;=\; \theta_{-1}^{-1}$$

Attention : a priori ce ne sont pas les mêmes opérateurs, vu qu'ils ne s'appliquent pas aux mêmes objets.

Comme les θ_{α_i} sont des 0-formes, on peut appliquer toutes les formules des formes différentielles, en particulier le produit extérieur. Donc on pose :

$$\theta_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \;=\; \sum_{j=0}^{p} (p!)(-1)^{j+1}\theta_{\alpha_j} d\theta_{\alpha_0} \wedge \ldots \wedge \check{d\theta}_{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge d\theta_{\alpha_p}$$

où, on le rappelle, $d\theta_{\alpha_0} \wedge \ldots \wedge \check{d\theta}_{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge d\theta_{\alpha_p}$ signifie qu'on a "sauté" le j-ème terme.
Alors on définit θ_p^p comme la collection $\theta_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$. On peut remarquer que le support d'un $\theta_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ est contenu dans l'intersection $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}$.

Définition de l'opérateur ∂ sur les θ_p^p et équation de montée

On définit sur les θ_p^p un opérateur ∂ par la formule :

$$(\partial\theta_p^p)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} \;=\; \sum_k (\theta_p^p)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}k}$$

la somme étant étendue à l'ensemble des $(\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}k)$ appartenant à $\mathcal{N}$. Cet opérateur vérifie $\partial^2 = 0$ (même démonstration que pour le ∂ sur les chaînes).

Alors les θ_p^p vérifient la propriété suivante :

Proposition 3.1.1
Pour $p \geq 0$:

$$\boxed{(-1)^p(\partial\theta_p^p) \;=\; d\theta_{p-1}^{p-1})} \tag{3.1}$$

démonstration :

• pour $p = 0$, on a :

$$\sum_k (\theta_0^0)_k = d_{-1}(\theta_{-1}^{-1}) = 1$$

ce qui est la définition d'une partition de l'unité.

• pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
(\partial\theta_p^p)_{i_0\dots i_{p-1}} &= \sum_k (\theta_p^p)_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}k} \\
&= \sum_k \sum_{j=0}^{p-1} (p!)(-1)^{j+1}\theta_{\alpha_j} d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge \check{d\theta}_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}} \wedge d\theta_k \\
&\quad + \sum_k (p!)(-1)^{p+1}\theta_k d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}} \\
&= 0 + (p!)(-1)^{p+1} d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}}
\end{aligned}$$

car $\sum_k \theta_k = 1$, donc $\sum_k d\theta_k = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}
(d\theta_{p-1}^{p-1})_{i_0\dots i_{p-1}} &= d\left(\sum_{j=0}^{p-1}(p-1)!(-1)^{j+1}\theta_{\alpha_j} d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge \check{d\theta}_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1}(p-1)!(-1)^{j+1} d\theta_{\alpha_j} \wedge d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge \check{d\theta}_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1}(p-1)!(-1) d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}} \\
&= (-1)p(p-1)! d\theta_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge d\theta_{\alpha_{p-1}}
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien la formule annoncée.

□

Remarque : on a pris ici une réalisation possible des θ_p^p pour obtenir les égalités (3.1). Mais comme on l'a signalé pour les formes, ce n'est pas la seule possible et donc on a des ambiguités sur les θ_p^p.

On peut comme pour les formes, définir $D_{(p,p)} = \partial_p + (-1)^p d_p$ pour $p \geq -1$ ($D^2 = 0$, même démonstration que pour les formes) et :

$$\Theta = \sum_{p=-1}^{n} \theta_p^p$$

où n est la dimension de M. Alors on obtient :

Lemme 3.1.1

$$D\Theta = \sum_{p=-1}^{n} D_{(p,p)}\theta_p^p = 0 \tag{3.2}$$

démonstration :

$$
\begin{aligned}
D\Theta &= \sum_{p=-1}^{n} D_{(p,p)}\theta_p^p \\
&= \sum_{p=-1}^{n} (\partial_p + (-1)^p d_p)(\theta_p^p) \\
&= \partial_{-1}\theta_{-1}^{-1} + \sum_{p=0}^{n}(\partial_p\theta_p^p) \\
&\quad + \sum_{p=-1}^{n-1} ((-1)^p d_p\theta_p^p) + (-1)^n(d_n\theta_n^n) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \partial_p\theta_p^p + \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p-1}(d_{p-1}\theta_{p-1}^{p-1}) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \Big(\partial_p\theta_p^p - (-1)^p(d_{p-1}\theta_{p-1}^{p-1})\Big)
\end{aligned}
$$

ce qui vaut 0, d'après l'équation (3.1).

□

Les formules (3.1) et (3.2) sont donc équivalentes.

Produit entre Θ et Ω

On définit le produit suivant entre les θ_k^k et les $\omega^{(k,p-k-1)}$:

$$\theta_k^k.\omega^{(k,n-k-1)} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\alpha_0\ldots\alpha_k} (\theta_k^k)_{\alpha_0\ldots\alpha_k} \wedge \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_k}^{(k,n-k-1)}$$

On a alors la formule suivante :

Lemme 3.1.2

pour $k \geq 0$:

$$\boxed{\theta_k^k.(\delta\omega^{(k-1,p-k)}) = (-1)^k(\partial\theta_k^k).\omega^{(k-1,p-k)}} \tag{3.3}$$

démonstration :

On part de :

$$\theta_k^k.(\delta\omega^{(k-1,p-k)}) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\alpha_0\ldots\alpha_k} (\theta_k^k)_{\alpha_0\ldots\alpha_k} \wedge \delta(\omega^{(k-1,n-k)})_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$$

avec :

$$\delta(\omega^{(k-1,n-k)})_{\alpha_0\ldots\alpha_k} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\omega_{\alpha_0\ldots\check{\alpha}_j\ldots\alpha_k}^{(k-1,p-k)}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\theta^k_k.\delta(\omega^{(k-1,p-k)}) &= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\alpha_0\ldots\alpha_k}(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\wedge\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\right)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left(\sum_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\sum_{\alpha_j}(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\wedge\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\right)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left(\sum_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\left(\sum_{\alpha_j}(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\right)\wedge\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\right)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left(\sum_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\left(\sum_{\alpha_j}(-1)^{k-j}(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k\alpha_j}\right)\wedge\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\right)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left(\sum_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}(-1)^{k-j}\partial(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\wedge\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\right)\\
&= (-1)^k\left(\frac{1}{(k+1)!}k\right)\sum_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\partial(\theta^k_k)_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\wedge\omega^{(k-1,p-k)}_{\alpha_0\ldots\breve{\alpha}_j\ldots\alpha_k}\\
&= (-1)^k(\partial\theta^k_k).\omega^{(k-1,p-k)}
\end{aligned}
$$

On va pouvoir maintenant à partir de ces formules définir notre “collating formula”.

3.2 "Collating formula"

Obtention de cette formule

On suppose qu'on s'est donné un recouvrement simple $\mathcal{U}$ sur une variété M avec une partition de l'unité θ_0^0 sur laquelle on a effectué le travail du paragraphe précédent pour obtenir la formule (3.2). On part d'une p-forme $\omega^{(-1,p)}$ fermée définie sur une variété M. On lui applique la formule de descente (1.8). On a alors :

$$\begin{aligned}\omega^{(-1,p)} = \theta_{-1}^{-1}.\omega^{(-1,p)} &= \partial(\theta_0^0).\omega^{(-1,p)} \\ &= \theta_0^0.\delta(\omega^{(-1,p)})\end{aligned}$$

d'après la formule (3.3). Donc :

$$\omega^{(-1,p)} = -\theta_0^0.(d\omega^{(0,p-1)}$$

d'après la formule (1.2). Ainsi :

$$\begin{aligned}\omega^{(-1,p)} &= d\left(-\theta_0^0.\omega^{(0,p-1)}\right) + (d\theta_0^0).\omega^{(0,n-1)} \\ &= d\left(-\theta_0^0.\omega^{(0,p-1)}\right) + (-1)(\partial\theta_1^1).\omega^{(0,n-1)}\end{aligned}$$

en appliquant la formule (3.1). On continue en effectuant les mêmes opérations :

$$\begin{aligned}(-1)(\partial\theta_1^1).\omega^{(0,n-1)} &= (-1)(-1)\theta_1^1.(\delta\omega^{(0,n-1)}) \\ &= \theta_1^1.(d\omega^{(1,n-2)}\end{aligned}$$

d'où :

$$\omega^{(-1,p)} = d\left(-\theta_0^0.\omega^{(0,p-1)} - \theta_1^1.\omega^{(1,n-2)}\right) + (d\theta_1^1).\omega^{(1,n-2)}$$

Par récurrence, on obtient la formule :

$$\begin{aligned}\omega^{(-1,p)} &= d\left(-\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right) + (d\theta_{p-1}^{p-1}).\omega^{(p-1,0)} \\ &= d(\dots) + (-1)^p(\partial\theta_p^p).\omega^{(p-1,0)} \\ &= d(\dots) + (-1)^p(-1)^p\theta_p^p.(\delta\omega^{(p-1,0)}) \\ &= d(\dots) + (-1)^{p-1}\theta_p^p.\omega^{(p,-1)}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient la formule suivante :

Théorème 3.2.1 (Collating Formula)

$$\boxed{\omega^{(-1,p)} = d\left((-1)\sum_{k=0}^{p-1}\theta_k^k.\omega^{(k,p-k-1)}\right) + (-1)^{p-1}\theta_p^p.\omega^{(p,-1)}} \tag{3.4}$$

Problème des ambiguités

On a déjà vu que dans la définition de Ω (descente sur une forme), il y a un certain nombre d'ambiguités. En effet, la p-forme dont on part, est supposée fermée. Donc on peut y ajouter le d d'une forme de degré $p-1$. On change $\omega^{(-1,p)}$ en :

$$\tilde{\omega}^{(-1,p)} = \omega^{(-1,p)} + (dq^{(-1,p-1)}) \tag{3.5}$$

La formule de descente (1.2) donne une ambiguité sur $\omega^{(0,p-1)}$ de la forme $\tilde{\omega}^{(0,p-1)} = \omega^{(0,p-1)} + \delta(q^{(-1,p-1)}) + d(q^{(0,p-2)})$. On définit ainsi :

$$\tilde{\omega}^{(k,p-k-1)} \;=\; \omega^{(k'p-k-1)} + (-1)^k(d(q^{(k,p-k-2)}) + \delta q^{(k-1,p-k-1)} \tag{3.6}$$

pour $0 \leq k \leq p-1$ et :

$$\tilde{\omega}^{(p,-1)} \;=\; \omega^{(p,-1)} + \delta q^{(p-1,-1)} \tag{3.7}$$

On a ainsi toutes les ambiguités possibles sur notre descente. Mais ce qui est vrai pour Ω l'est aussi pour Θ. On peut poser :

$$\tilde{\theta}_0^0 \;=\; \theta_0^0 + \partial h_1^0 \tag{3.8}$$

et

$$\tilde{\theta}_k^k \;=\; \theta_k^k + (-1)^k(dh_k^{k-1}) + \partial h_{k+1}^k \tag{3.9}$$

Maintenant se pose donc la question de savoir comment notre "collating formula" est à modifier, pour tenir compte des ambiguités. Le but est de montrer qu'elle reste la même si on change Ω en $\tilde{\Omega}$ et Θ en $\tilde{\Theta}$. Pour cela, on commence par calculer $\tilde{\theta}_k^k.\tilde{\omega}^{(k,p-k-1)}$ pour $1 \leq kp-1$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_k^k.\tilde{\omega}^{(k,p-k-1)} \;&=\; \theta_k^k.\omega^{(k,p-k-1)} + (\partial h_{k+1}^k).\omega^{(k,p-k-1)} \\
&\quad + \underbrace{(-1)^k(dh_k^{k-1}).\omega^{(k,p-k-1)}}_{(1)} + \underbrace{\tilde{\theta}_k^k.(-1)^k q^{(k,p-k-2)}}_{(2)} \\
&\quad + \tilde{\theta}_k^k.(\delta q^{(k-1,p-k-1)})
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
(1) \;&=\; d\left(\tilde{\theta}_k^k.q^{(k,p-k-2)}\right) - (d\tilde{\theta}_k^k).q^{(k,p-k-2)} \\
&=\; d(\ldots) - (-1)^{k+1}(\partial\tilde{\theta}_{k+1}^{k+1}).q^{(k,p-k-2)} \\
&=\; d(\ldots) - \tilde{\theta}_{k+1}^{k+1}.(\delta q^{(k,p-k-2)})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2) \;&=\; d\left((-1)^k h_k^{k-1}.\omega^{(k,p-k-1)}\right) + h_k^{k-1}.(d\omega^{(k,p-k-1)}) \\
&=\; d(\ldots) + h_k^{k-1}.(-1)^{k-1}(\delta\omega^{(k-1,p-k)}) \\
&=\; d(\ldots) - (\partial h_k^{k-1}).\omega^{(k-1,p-k)}
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_k^k.\tilde{\omega}^{(k,p-k-1)} \;&=\; \theta_k^k.\omega^{(k,p-k-1)} + (\partial h_{k+1}^k).\omega^{(k,p-k-1)} \\
&\quad + d\left(\tilde{\theta}_k^k.q^{(k,p-k-2)}\right) - \tilde{\theta}_{k+1}^{k+1}.(\delta q^{(k,p-k-2)}) \\
&\quad + d\left((-1)^k h_k^{k-1}.\omega^{(k,p-k-1)}\right) - (\partial h_k^{k-1}).\omega^{(k-1,p-k)} \\
&\quad + \tilde{\theta}_k^k.(\delta q^{(k-1,p-k-1)})
\end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_k^k.\tilde{\omega}^{(k,p-k-1)} &= \theta_k^k.\omega^{(k,p-k-1)} + d(\dots)\\ &\quad +(\partial h_{k+1}^k).\omega^{(k,p-k-1)} - (\partial h_k^{k-1}).\omega^{(k-1,p-k)}\\ &\quad +\tilde{\theta}_k^k.(\delta q^{(k-1,p-k-1)}) - \tilde{\theta}_{k+1}^{k+1}.(\delta q^{(k,p-k-2)})\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p-1}\tilde{\theta}_j^j.\tilde{\omega}^{(j,p-j-1)} &= \sum_{j=1}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\\ &\quad +\underbrace{\tilde{\theta}_0^0.\tilde{\omega}^{(0,p-1)}}_{(3)}\\ &\quad +(\partial h_{p-1}^p).\omega^{(p-1,0)} - (\partial h_1^0).\omega^{(0,p-1)}\\ &\quad +\tilde{\theta}_1^1.(\delta q^{(0,p-2)}) - \tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}(3) &= \theta_0^0.\omega^{(0,p-1)} + (\partial h_1^0).\omega^{(0,p-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\\ &\quad +d\left(\theta_0^0.q^{(0,p-2)}\right) - (d\theta_0^0).q^{(0,p-2)}\\ &\quad +d\left((\partial h_1^0).q^{(0,p-2)}\right) - d(\partial h_1^0).q^{(0,p-2)}\\ &\quad +(\partial h_1^0).(\delta q^{(-1,p-1)})\\ &= \theta_0^0.\omega^{(0,p-1)} + (\partial h_1^0).\omega^{(0,p-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\\ &\quad +d(\dots) + \underbrace{(\partial\theta_1^1).q^{(0,p-2)}}_{=-\theta_1^1.(\delta q^{(0,p-2)})}\\ &\quad +d(\dots) + (dh_1^0).(\delta q^{(0,p-2)})\\ &\quad +\partial(\partial h_1^0).q^{(-1,p-1)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\tilde{\theta}_0^0.\tilde{\omega}^{(0,p-1)} - (\partial h_1^0).\omega^{(0,p-1)} + \tilde{\theta}_1^1.(\delta q^{(0,p-2)})\\ &= \theta_0^0.\omega^{(0,p-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)}) + (\partial h_2^1).(\delta q^{(0,p-2)}) + d(\dots)\\ &= \theta_0^0.\omega^{(0,p-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)}) + d(\dots)\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}(\partial h_p^{p-1}).\omega^{(p-1,0)} &= (-1)^p h_p^{p-1}.(\delta\omega^{(p-1,0)})\\ &= -h_p^{p-1}.\omega^{(p,-1)}\end{aligned}$$

Donc si on résume ce qu'on a obtenu jusqu'à maintenant, on obtient :

$$\begin{aligned}d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\tilde{\theta}_j^j.\tilde{\omega}^{(j,p-j-1)}\right) &= d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)\\ &\quad +d\left(\theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\right)\\ &\quad -d\left(h_p^{p-1}.\omega^{(p,-1)} + \tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right)\end{aligned}$$

A cela on ajoute $(-1)^p\tilde{\theta}_p^p.\tilde{\omega}^{(p,-1)}$, ce qui donne, pour :

$$(4) = d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\tilde{\theta}_j^j.\tilde{\omega}^{(j,p-j-1)}\right) + (-1)^p\tilde{\theta}_p^p.\tilde{\omega}^{(p,-1)}$$

le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
(4) \quad = \quad & d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\right) \\
& +(-1)^p\theta_p^p.\omega^{(p,-1)} \\
& -d\left(h_p^{p-1}.\omega^{(p,-1)} + \tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right) \\
& +(-1)^p\left((-1)^p dh_p^{p-1} + \delta h_{p+1}^p\right).\tilde{\omega}^{(p,-1)} \\
& +(-1)^p\theta_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)}) \\
= \quad & d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\right) \\
& +(-1)^p\theta_p^p.\omega^{(p,-1)} \\
& -(dh_p^{p-1}).\omega^{(p,-1)} - d\left(\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right) \\
& +(dh_p^{p-1}).\omega^{(p,-1)} + (-1)^{p+1}(\partial h_{p+1}^p).\omega^{(p,-1)} \\
& +(-1)^p\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})
\end{aligned}$$

car $d(\omega^{(p,-1)}) = 0$ et :

$$(\partial h_{p+1}^p).\omega^{(p,-1)} = (-1)^{p+1}h_{p+1}^p.(\delta\omega^{(p,-1)}) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
(4) \quad = \quad & d\left(\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)} + \theta_0^0.(\delta q^{(-1,p-1)})\right) \\
& +(-1)^p\theta_p^p.\omega^{(p,-1)} \\
& -d\left(\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right) + (-1)^p\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)}) \quad = \quad & \theta_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)}) + (-1)^p(dh_p^{p-1}).(\delta q^{(p-1,-1)}) \\
& + \underbrace{(\partial h_{p+1}^p).(\delta q^{(p-1,-1)})}_{=0}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
d\left(\tilde{\theta}_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right) \quad = \quad & (d\theta_p^p).(\delta q^{(p-1,-1)}) \\
& +(-1)^p\theta_p^p.(\delta q^{(p-1,-1)}) + (-1)^p(-1)^p(dh_p^{p-1}).(\delta q^{(p-1,-1)})
\end{aligned}$$

où en fait on devrait ajouter des d_{-1}. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
-d\left(\tilde{\theta}^p_p.(\delta q^{(p-1,-1)})\right)+(-1)^p\tilde{\theta}^p_p.(\delta q^{(p-1,-1)}) & = & -d(\theta^p_p).(\delta q^{(p-1,-1)}) \\
& = & (-1)^p d(\partial\theta^p_p).q^{(p-1,-1)} \\
& = & (-1)^p d(d\theta^{p-1}_{p-1}).q^{(p-1,-1)} \\
& = & 0
\end{array}$$

Enfin on arrive à :

$$\begin{array}{rcl}
-(4) & = & d\left((-1)\sum_{j=0}^{p-1}\theta^j_j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)+(-1)^{p-1}\theta^p_p.\omega^{(p,-1)} \\
& & -\theta^0_0.(\delta q^{(-1,p-1)}) \\
& = & \omega^{(-1,p)}-d\left((\partial\theta^0_0).q^{(-1,p-1)}\right) \\
& = & \omega^{(-1,p)}-0.q^{(-1,p-1)}-(-1)(\theta^{-1}_{-1}).(dq^{(-1,p-1)}) \\
& = & \tilde{\omega}^{(-1,p)}
\end{array}$$

Ce calcul montre le théorème suivant :

Théorème 3.2.2
La "collating formula" est un isomorphisme entre groupes de cohomologie de de Rham et groupes de cohomologie de Čech.

En effet d'une forme fermée $\omega^{(-1,p)}$, on obtient une cochaîne de $\mathcal{N}$, et réciproquement, à toute cochaîne $\omega^{(p,-1)}$, on associe une p-forme en posant : $\omega^{(-1,p)} = \theta^p_p.\omega^{(p,-1)}$. Bien sûr on n'a pas la remontée complète car il faudrait définir une homotopie à δ, comme le fait Weil. Néanmoins, on n'en est pas très loin, car cette homotopie se construit aussi à l'aide d'une partition de l'unité.

3.3 Lien entre l'intégrale des θ_p^p et l'homologie de Čech dans $\mathbb{R}$, reprise du diagramme bilan

Revenons maintenant sur la dualité entre les p-formes ω et les p-cycles singuliers t. On a vu qu'elle est définie via la formule : $\int_t \omega$. Si on intègre la "collating formula", on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} &= \int_{t_{(-1,p)}} d\left((-1)\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)\\ &\quad +(-1)^{p+1}\int_{t_{(-1,p)}}\left(\theta_p^p.\omega^{(p,-1)}\right)\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de Stokes, l'intégrale sur un cycle d'un d de quelque chose vaut 0. Donc l'égalité précédente devient :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} = (-1)^{p+1}\int_{t_{(-1,p)}}\left(\theta_p^p.\omega^{(p,-1)}\right)$$

De plus les $\omega^{(p,-1)}$ sont des entiers, donc on peut les sortir de l'intégrale :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} = (-1)^{p+1}\left(\int_{t_{(-1,p)}}\theta_p^p\right).\omega^{(p,-1)}$$

ce qui devient le produit de nombres réels. On peut comparer cette formule avec celle obtenue dans le lemme 2.3.1 :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} = \langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)}\rangle$$

Donc on a envie de dire que :

$$(-1)^{p+1}\left(\int_{t_{(-1,p)}}\theta_p^p\right)$$

joue le même rôle que $t_{(p,-1)}$.

Pour cela on se place dans le cas d'une variété compacte. En effet il faut que les intégrales en question soient définies. On a déjà montré, via la suite de Mayer-Vietoris que dans le cas compact, les groupes de cohomologie de de Rham sont de dimension finie. De plus la dualité étant non-dégénérée, on a une application injective du groupe d'homologie singulière $(H_{sing})_p(M)$ dans le dual du groupe de cohomologie $H^p_{deR}(M)$, qui est donc de dimension finie. Ainsi les groupes d'homologie singulière sont de dimension finie et on a des isomorphismes entre les groupes de cohomologie et les duaux des groupes d'homologie singulière et vice-versa. On modifie le diagramme-bilan du paragraphe 2.3 :

$$\begin{tikzcd} H^p_{deR}(M) \arrow[r, shift left, "(1')"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \check{H}^p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\ (H_{sing})_p(M) \arrow[r, shift left, "(2)"] & \check{H}_p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

où :

1. (1') est l'isomorphisme dû à la "collating formula" (paragraphe 3.2);

2. (2) est l'isomorphisme dû aux équations de descente (2.7), (2.8) et (2.9) sur un cycle (paragraphe 2.2);
3. (3) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces, qui deviennent donc duaux l'un de l'autre (paragraphe 2.3);
4. (4) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces (théorème de de Rham).

et tous ces groupes sont aussi des espaces vectoriels de dimension finie. La dimension commune b_p s'appelle *p-ème nombre de Betti.*

Soit $t_{(-1,p)}$ un p-cycle singulier de M. Alors $\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p$ est bien un cycle de Čech car c'est bien une collection de nombres dans des ouverts et car :

$$\begin{aligned}
\partial\left(\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p\right) &\equiv \int_{t_{(-1,p)}} \partial\theta_p^p \\
&= (-1)^p \int_{t_{(-1,p)}} d(\theta_{p-1}^{p-1}) \\
&= (-1)^p \int_{bt_{(-1,p)}} \theta_{p-1}^{p-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes. Supposons maintenant que :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p = 0$$

Alors pour tout $\omega^{(p,-1)} \in \check{H}^p(\mathcal{N})$, on obtient :

$$\left(\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p\right).\omega^{(p,-1)} = 0$$

Or pour chaque $\omega^{(p,-1)}$, il existe un unique $\omega^{(-1,p)} \in H^p_{deR}(M)$ qui vérifie :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} = (-1)^{p+1}\left(\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p\right).\omega^{(p,-1)} = 0$$

Donc cela veut dire que pour toute forme fermée $\omega^{(-1,p)}$, on a :

$$\int_{t_{(-1,p)}} \omega^{(-1,p)} = 0$$

donc $t_{(-1,p)}$ est un bord, donc est nul dans $(H_{sing})_p(M)$. Donc on obtient :

$$\begin{tikzcd}
\omega^{(-1,p)} \arrow[r, shift left, "(1')"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \omega^{(p,-1)} \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\
t_{(-1,p)} \arrow[r, shift left, "(2')"] & \left(\int_{t_{(-1,p)}} \theta_p^p\right) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

avec (2') qui est injective, donc c'est un isomorphisme entre classes car les groupes sont de dimension finie.

C'est maintenant que la notation "homologique" des θ_p^p et de ∂ se justifie complètement. En effet, on voit ici qu'ils jouent un rôle d'homologie, via (2').

3.4 Cas des entiers (problème de torsion)

On se place définitivement sur une variété M compacte. D'après le paragraphe 2.2, on a vu qu'on avait un isomorphisme entre $(H_{sing})_p(M,G)$ et $\check{H}_p(\mathcal{N},G)$ (notations pour préciser le groupe si ce n'est pas $\mathbb{R}$). Donc en particulier, G peut être le groupe des entiers $\mathbb{Z}$. Il s'agit maintenant de voir ce qui se passe dans ce cas.

Cycles réels et cycles entiers

On convient d'appeler chaîne réelle une chaîne à coefficients réels et chaîne entière une chaîne à coefficients entiers.

Lemme 3.4.1

Soit t une chaîne finie à coefficients réels. Alors il existe (t_i) chaînes entières et (ξ_i) nombres réels indépendants sur $\mathbb{Q}$ (i.e. si $\sum r_i\xi_i = 0$ pour $r_i \in \mathbb{Q}$, alors $\xi_i = 0$ pour tout i), tels que :

$$t \;=\; \sum_i \xi_i t_i$$

démonstration :

On va montrer ce résultat par récurrence sur le nombre de composantes de l'expression réduite de la chaîne t. Si on a un seul composant, le résultat est évident. • $t = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2$, $\rho_i \in \mathbb{R}$ et s_i simplexe. On distingue trois cas :

1. $\rho_i \in \mathbb{Q}$: alors on a toujours $\rho_1 = (a/b)\rho_2$ avec a, b entiers et $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$. On pose $\xi_1 = \rho_2/b$ et $t = \xi_1(as_1 + bs_2)$.
2. $\rho_1 \in \mathbb{Q}$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $\xi_i = \rho_i$.
3. $\rho_i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: soit $\rho_1 = (a/b)\rho_2$ avec $a/b \in \mathbb{Q}$ et on revient au premier cas, soit ρ_1 et ρ_2 sont $\mathbb{Q}$-indépendants.

• si :

$$t = \sum_{i=0}^{r} \rho_i s_i = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \rho_i s_i\right) + \rho_r s_r$$

par hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \rho_i s_i \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi_i s_i$$

où la seconde somme est finie. En fait on peut montrer que $k \leq r-1$. On a alors deux cas :

1. ρ_r et (ξ_k) sont $\mathbb{Q}$-indépendants;
2. $\rho_r = \sum(a_k/b_k)\xi_k$: auquel cas, on pose : $\xi'_k = \xi_k/b_k$ et on obtient :

$$t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi'_k\,(b_k t_k + a_k s_r)$$

et on pose $t'_k = b_k t_k + a_k s_r$ qui est bien une chaîne entière et les ξ'_k sont $\mathbb{Q}$-indépendants.

$\square$

De ce lemme on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1

Si $t = \sum \xi_i t_i$*,* $bt = 0 \Rightarrow bt_i = 0\ \forall i$

démonstration :

On peut écrire les bt_i sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{r} \rho_i^k s_k$$

avec $\rho_i^k \in \mathbb{N}$, éventuellement nuls. Donc on obtient :

$$bt = \sum_i \sum_{k=0}^{r} \xi_i \rho_i^k s_k = 0$$

d'où pour tout k :

$$\sum_i \xi_i \rho_i^k = 0$$

donc par indépendance $\rho_i^k = 0$ pour tout i et tout k. Donc bt_i est nul.

$\square$

Ainsi tout cycle réel est la combinaison de cycles entiers. Soit maintenant t' un cycle entier. Alors :

Lemme 3.4.2

Si t' *est le bord d'une chaîne entière* t*, i.e.* $t' = bt$*, alors il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que :* $mt' = bt_1$ *avec* t_1 *une chaîne entière.*

démonstration :

On écrit t sous la forme :

$$t = \sum_i \xi_i t_i$$

où les t_i sont des cycles entiers. Donc t' s'écrit :

$$t' \ = \ \sum_i \xi_i bt_i$$

Donc il existe i_0 tel que ξ_{i_0} appartienne à $\mathbb{Q}$ et $\forall i \neq i_0\ \xi_i = 0$. Sinon tous les ξ_i sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et t' n'est pas entier. Donc $t' = \xi_{i_0}(bt_{i_0})$ et $\xi_{i_0} = (n/m)$. Alors : $mt' = b(nt_{i_0})$.

$\square$

Donc a priori il existe des cycles entiers qui, sans être eux-mêmes des bords, ont un multiple qui est un bord. Par exemple $\mathbb{R}P(2)$ admet de tels cycles.

Torsion

On va faire un détour par la théorie des groupes pour les problèmes de torsion. Soit G un groupe quelconque.

Définition 3.4.1

On dit que :

1. *G est de torsion si tout élément de G est d'ordre fini;*

2. *G est sans torsion si tout élément de G, sauf l'élément neutre, est d'ordre infini;*

3. *G est mixte si on a les deux catégories d'éléments.*

Un groupe abélien est dit libre s'il est somme directe de groupes monogènes infinis, i.e. :

$$G = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$$

avec $I \neq \emptyset$, $\langle x_i \rangle \simeq \mathbb{Z}$ pour tout $i \in I$.

Il est immédiat que tout groupe fini est de torsion et que tout groupe abélien libre est sans torsion. De plus l'ensemble des éléments de torsion forment un sous-groupe de G, dit groupe de torsion. Sur les groupes de type fini, c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments, on a le théorème de décomposition suivant :

Théorème 3.4.1

Tout groupe abélien de type fini est somme directe, de façon unique à isomorphe près, d'un groupe abélien libre de dimension finie et d'un groupe fini.

Le groupe fini est le sous-groupe de torsion et le groupe libre est isomorphe au quotient de G par son groupe de torsion. Pour la démonstration, voir Calais ([10]), pages 290-295 et pages 306-308.

Donc le groupe d'homologie singulière $(H_{sing})_p(M, \mathbb{Z})$ se décompose en un groupe de torsion, i.e. l'ensemble des cycles non nuls dont un multiple est un bord, et d'un groupe abélien libre engendré par des classes d'homologie entière en nombre fini. Soient $t_1, \ldots, t_r$ des cycles entiers appartenant respectivement à ces classes. D'après ce qu'on a vu, ils forment une base du groupe d'homologie réelle.

Formes à périodes entières

Définition 3.4.2

Soit ω une p-forme. On appelle période de cette forme son intégrale sur un cycle entier. On appelera périodes fondamentales les intégrales sur les t_i.

Donc on a la proposition suivante :

Proposition 3.4.1

Sur une variété compacte M, il existe des formes fermées dont les périodes fondamentales sont arbitrairement données. En particulier, toute forme fermée dont les périodes fondamentales sont nulles est cohomologue à 0.

On retrouve ce qu'on avait appelé le théorème de de Rham pour les formes. On va s'intéresser plus particulièrement aux formes à périodes entières , i.e. celles pour lesquelles les périodes fondamentales sont des entiers. Sur ce type de formes, on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.2

Pour qu'une forme fermée $\omega = \omega^{(-1,p)}$ corresponde à un cocycle $\omega^{(p,-1)}$ à coefficients entiers, il faut et il suffit que toutes ses périodes fondamentales soient entières.

démonstration :

Toute forme linéaire de l'ensemble des chaînes réelles de Čech dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme : $t_{(p,-1)} \mapsto \langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)} \rangle$, où $\omega^{(p,-1)}$ est un cocycle de $\mathcal{N}$, d'après les relations de dualité du paragraphe 2.3. De là si on se restreint aux chaînes entières (suite de nombres entiers), et si on veut une forme à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on va prendre un cocycle de $\mathcal{N}$ à coefficients entiers, qu'on note $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$.

Soit $\omega = \omega^{(-1,p)}$ une forme fermée à périodes entières. Soit $\omega^{(p,-1)}$ le cocycle sur $\mathcal{N}$ associé par la "collating formula" ou la "descente" de Weil. Alors on a la forme linéaire sur l'ensemble des cycles entiers de $\mathcal{N}$ dans a priori $\mathbb{R}$ définie par : $t_{(p,-1)} \mapsto \langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)} \rangle$. D'après le lemme 2.3.1, on veut en plus remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, donc on obtient un $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$, tel que $\langle t_{(p,-1)}, \omega^{(p,-1)} \rangle = \langle t_{(p,-1)}, (\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}} \rangle$. Donc d'après le théorème de de Rham, ces deux cocycles diffèrent d'un cobord réel. Donc $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$ aussi bien que $\omega^{(p,-1)}$ correspond à ω.

La réciproque est immédiate, compte-tenu du lemme 2.3.1.

□

On peut montrer aussi à partir de là, que le produit extérieur de deux formes à périodes entières est encore une forme à périodes entières.

Diagramme-bilan dans le cas entier

Donc à condition de supprimer les éléments de torsion, on a les mêmes isomorphismes entre les formes fermées à périodes entières et les cocycles entiers, respectivement entre les cycles singuliers entiers et les cycles de Čech entiers. De plus la dualité entre les objets de Čech est toujours non-dégénérée (voir l'égalité (2.10)). De plus les groupes $H^p_{deR}(M, \mathbb{Z})$ (formes à périodes entières), $\check{H}^p(M, \mathbb{Z})$, $(H_{sing})_p(\mathcal{N}, \mathbb{Z})$ et $\check{H}_p(\mathcal{N}, \mathbb{Z})$ sont des sous-groupes des groupes sur les réels. Ce sont des $\mathbb{Z}$-modules. Donc le caractère de dimension finie n'est pas une simple conséquence de la dimension finie des $\mathbb{R}$-modules. Néanmoins il n'est pas bien compliqué de voir que ce sont quand même des modules de dimension finie, en reprenant les arguments déjà développés. On a la forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire sur $H^p_{deR}(M, \mathbb{Z}) \times \check{H}^p(M, \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ définie par l'intégrale d'une forme à périodes entières sur un cycle singulier entier. Il faut montrer qu'elle est non-dégénérée si on enlève la torsion.

En effet, si ω est une forme fermée et si pour tout cycle entier t, $\int_t \omega$ est nulle, comme les cycles entiers forment une base des cycles réels, on a pour tout cycle, $\int_t \omega = 0$. Donc ω est exacte. Réciproquement soit t un cycle entier, qui n'est pas un cycle de torsion, tel que pour toute forme fermée entière ω, on ait : $\int_t \omega = 0$. On peut écrire t sous la forme : $t = \sum n_i t_i$, où les t_i sont une base et les n_i sont dans $\mathbb{Z}$. Encore une fois c'est vrai parce qu'on a enlevé la torsion. Alors on obtient :

$$\sum_i n_i \int_{t_i} \omega = 0$$

pour toute forme ω fermée. Or on peut choisir ω^j fermée telle que :

$$\int_{t_i} \omega^j = \delta_i^j$$

pour tout i et j. Donc n_i est nul pour tout i. Donc le cycle est nul. En fait on peut montrer que t est un bord d'une chaîne réelle, donc un multiple de t est le bord d'une chaîne entière, et si on a supprimé les cycles de torsion, on a bien que t est un bord entier, donc est nul.

On note $\widehat{H}^p_{deR}(M,\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $H^p_{deR}(M,\mathbb{Z})$ pour lequel on a enlevé la torsion. De même pour : $(\widehat{H}_{sing})_p(M,\mathbb{Z})$, $\widehat{\check{H}}^p(\mathcal{N},\mathbb{Z})$ et $\widehat{\check{H}}_p(\mathcal{N},\mathbb{Z})$. De là on a récupéré le diagramme-bilan de la fin du paragraphe 2.3 dans le cas entier, en enlevant la torsion :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^p_{deR}(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "(1')"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \widehat{\check{H}}^p(\mathcal{N},\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\
(\widehat{H}_{sing})_p(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "(2)"] & \widehat{\check{H}}_p(\mathcal{N},\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

où :

1. (1') est l'isomorphisme dû à la "collating formula";
2. (2) est l'isomorphisme dû aux équations de descente (2.7), (2.8) et (2.9) sur un cycle (paragraphe 2.2);
3. (3) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces, qui deviennent donc duaux l'un de l'autre (paragraphe 2.3);
4. (4) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces (théorème de de Rham).

Mais dans le paragraphe 3.3 précédent, on avait modifié ce diagramme en ajoutant l'intégrale des θ_p^p sur les cycles, à la place des cycles de $\mathcal{N}$. Il nous faut donc montrer que, si t est un p-cycle singulier entier, alors $\int_t \theta_p^p$ est un cycle entier sur $\mathcal{N}$. Le fait que ce soit un cycle est une simple conséquence du théorème de Stokes, indépendamment du problème des entiers ou de la torsion. Il faut maintenant montrer que c'est un entier. Soit $t_1,\ldots,t_r$ une base réelle de p-cycles entiers. On a une forme linéaire sur les cocycles de $\mathcal{N}$ entiers $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left(\int_{t_i} \theta_p^p\right).(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$$

A tout $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$, on associe un $\omega^{(-1,p)}$ à périodes entières par la "collating formula" et on a :

$$\int_{t_i} \omega^{(-1,p)} \;=\; (-1)^{p+1}\left(\int_{t_i} \theta_p^p\right).(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

Donc pour tout $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$:

$$\left(\int_{t_i} \theta_p^p\right).(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$$

est un entier. Donc $\int_{t_i} \theta_p^p$ est un cycle de $\mathcal{N}$ entier à un ∂ près, pour tout t_i. Ainsi pour tout p-cycle singulier entier t sans torsion, $\int_t \theta_p^p$ est un entier modulo un ∂. Donc $(t \mapsto \int_t \theta_p^p)$ envoie l'homologie singulière entière dans l'homologie de Čech entière. De plus cette application entre classes est injective, car si : $\int_t \theta_p^p = 0$ pour tout $(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}}$:

$$\left(\int_t \theta_p^p\right).(\omega^{(p,-1)})^{\mathbb{Z}} = 0$$

donc pour toute $\omega^{(-1,p)}$ forme entière à périodes entières :

$$\int_t \omega^{(-1,p)} = 0$$

donc t est nul (en tant que classe d'homologie). Ainsi on obtient les diagrammes-bilan suivants :

- pour $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} H^p_{deR}(M) \arrow[r, shift left, "(1')"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \check{H}^p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\ (H_{sing})_p(M) \arrow[r, shift left, "(2')"] & \check{H}_p(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

où :

1. (1') est l'isomorphisme dû à ‘collating formula” (paragrphe 3.2);
2. (2') est l'isomorphisme dû à l'intégration des θ_p^p sur les cycles singuliers;
3. (3) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces, qui deviennent donc duaux l'un de l'autre (paragraphe 2.3);
4. (4) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces (théorème de de Rham).

- pour $\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} \widehat{H}^p_{deR}(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "(1')"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & \widehat{\check{H}}^p(\mathcal{N},\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\ (\widehat{H}_{sing})_p(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "(2')"] & \widehat{\check{H}}_p(\mathcal{N},\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

où :

1. (1') est l'isomorphisme dû à ‘collating formula” entre formes à périodes entières et cocycles entiers (paragrphe 3.4);
2. (2') est l'isomorphisme dû à l'intégration des θ_p^p sur les cycles singuliers entiers;
3. (3) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces, qui deviennent donc duaux l'un de l'autre (paragraphe 2.3);
4. (4) est la forme bilinéaire non-dégénérée entre ces deux espaces (théorème de de Rham) pour les formes à périodes entières.

tous ces espaces étant des $\mathbb{Z}$-modules de dimension finie.

Ambiguités sur les cocycles entiers

On va terminer ce chapitre en fixant les ambiguités entières sur les cocycles. En effet on a vu dans le paragraphe 3.2, que si on modifie soit la forme initiale, soit le cocycle, on change a priori la formule mais on ne change pas de classe d'équivalence. Si maintenant on a une p-forme fermée $\omega = \omega^{(-1,p)}$ à périodes entières, par la "collating formula" et par le théorème 3.3.2, on obtient un cocycle entier $\omega^{(p,-1)} = \overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)}$ tel que :

$$\omega^{(-1,p)} \;=\; d\left((-1)\sum_{j=0}^{p-1}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)+(-1)^{p+1}\theta_p^p.\omega^{(p,-1)}$$

Maintenant on fixe comme règle de ne travailler qu'avec des cocycles entiers, i.e. on choisit de ne considérer que les ambiguités entières :

$$\underline{\overset{\mathbb{Z}}{\omega}}{}^{(p,-1)} = \overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)} + \delta(\rho^{(p-1,-1)})$$

avec $\rho^{(p-1,-1)}$ une chaîne entière. Donc on a :

$$\begin{aligned}
\theta_p^p.\underline{\overset{\mathbb{Z}}{\omega}}{}^{(p,-1)} &= \theta_p^p.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)} + \theta_p^p.\delta(\rho^{(p-1,-1)})\\
&= \theta_p^p.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)} + (-1)^p\partial(\theta_p^p).\rho^{(p-1,-1)}\\
&= \theta_p^p.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)} + d(\theta_{p-1}^{p-1}).\rho^{(p-1,-1)}
\end{aligned}$$

Donc on obtient sur la formule totale la modification suivante :

$$\begin{aligned}
\omega^{(-1,p)} \;=\; & d\left((-1)\sum_{j=0}^{p-2}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)\\
&+d\left((-1)\theta_{p-1}^{p-1}.\left(\omega^{(p-1,0)}+(-1)^p\rho^{(p-1,-1)}\right)\right)\\
&+(-1)^{p+1}\theta_p^p.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)}
\end{aligned}$$

Donc si on pose :

$$\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p-1,0)} \;=\; \omega^{(p-1,0)}+(-1)^p\rho^{(p-1,-1)}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\omega^{(-1,p)} \;=\; & d\left((-1)\sum_{j=0}^{p-2}\theta_j^j.\omega^{(j,p-j-1)}\right)\\
&+d\left((-1)\theta_{p-1}^{p-1}.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p-1,0)}\right)\\
&+(-1)^{p+1}\theta_p^p.\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)}
\end{aligned}$$

Ainsi les ambiguités entières sur $\overset{\mathbb{Z}}{\omega}{}^{(p,-1)}$ entraînent que $\omega^{(p-1,0)}$ est défini modulo des entiers (et bien sûr modulo le δ d'un objet réel). Donc dans la formule précédente, on n'a que des cocycles entiers, ce qui implique que le dernier sous le d est défini modulo des entiers.

4 Partie “physique”

4.1 Connexions

On a vu dans le paragraphe 1.1 les notions de groupe de Lie et de fibré principal. On va utiliser ces notions pour définir une connexion sur un fibré principal et les propriétés qui en découlent. On donnera les résultats en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations.

Algèbre de Lie $\mathcal{G}$

Soit G un groupe de Lie. On note L_g (resp. R_g) la translation à gauche (resp. à droite) sur G par un élément $g \in G$: $L_g x = gx$ (resp. $R_g x = xg$), pour tout $x \in G$. L_g induit un isomorphisme linéaire dL_g de $T_h(G)$ dans $T_{gh}(G)$. L'algèbre de Lie de G, $\mathcal{G}$ est l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche, i.e. satisfaisant l'équation $dL_g(X(h)) = X(gh)$, muni du crochet de Lie . Pour définir ce crochet, on doit d'abord définir la dérivée associée à un champ de vecteur X. Soit f une fonction de M dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$(X.f)(x) = d_x f(X(x))$$

C'est une fonction de classe C^∞ sur M qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $X.(\alpha f + \beta g) = \alpha(X.f) + \beta(X.g)$;
2. $X.(fg) = g(X.f) + f(X.g)$.

A ce champ de vecteurs X, on associe la dérivation Δ_X définie par : $\Delta_X(f) = X.f$. La difficulté ici est de montrer que l'on a un isomorphisme entre le C^∞-module des champs de vecteurs sur M et le module des dérivations sur l'anneau $C^\infty(M)$, par cette définition de la dérivation associée à un champ de vecteurs. On peut prendre maintenant pour deux champs X et Y la dérivation suivante : $\Delta_X(\Delta_Y) - \Delta_Y(\Delta_X)$. A cette dérivation, on associe un champ de vecteurs, que l'on note $[X, Y]$. C'est le crochet de Lie de deux champs de vecteurs. Il vérifie en particulier l'identité de Jacobi :

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Avec ce crochet, l'ensemble des champs de vecteurs devient une $\mathbb{R}$ algèbre.

Donc pour en revenir à G, comme le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche est invariant à gauche, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est bien définie. On peut montrer que $\mathcal{G}$ s'identifie naturellement avec $T_e(G)$, l'espace tangent à G en l'identité, avec l'application qui à $X \in \mathcal{G}$ associe la valeur de X en e. L'action adjointe $ad(g)$ de G dans G est définie par : $ad(g)(h) = ghg^{-1}$. Cet automorphisme de G induit un automorphisme sur $\mathcal{G}$, noté $Ad(g)$.

Enfin, on montre qu'on peut définir une application exp de $T_e(G)$ dans G. L'idée est de prendre la valeur en 1 des courbes tracées sur G ayant comme vecteur tangent en 0 un vecteur de $T_e(G)$) (voir [2], page 39). cette application est appelée *l'application exponentielle*, qui coïncide sur les groupes de matrices avec l'application exp classique.

Connexions sur un fibré principal

Soit $P(M, G)$ un fibré principal de base M, de fibre G, de projection π. Pour $u \in P$, on note $T_u(P)$ l'espace tangent à P en u et $\mathbb{V}_u$ le sous-espace de $T_u(P)$ formé par l'ensemble des vecteurs tangents à la fibre au dessus de x tel que $u \in \pi^{-1}(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs v de

$T_u(P)$ qui vérifie : $d\pi(v) = 0$. Une connexion sur un espace fibré principal $P(M, G)$ est la donnée d'une application qui à tout point u de P associe un sous-espace $\mathbb{H}_u$ de $T_u(P)$ telle que :

1. $T_u(P)$ soit la somme directe de $\mathbb{V}_u$ et de $\mathbb{H}_u$;
2. $\mathbb{H}_{ua} = (dR_a)(\mathbb{H}_u)$ pour tout $u \in P$ et $a \in G$, où R_a est la transformation induite sur P par $a \in G$: $R_a u = ua$;
3. $u \mapsto \mathbb{H}_u$ est différentiable.

Cette définition est celle de Kobayashi et Nomizu ([2], page 63). Il en existe une autre (voir Choquet-Bruhat ([3]), page 255), qui est équivalente d'après ([3]), page 256.

Définition 4.1.1

$\mathbb{V}_u$ est appelé sous-espace vertical, $\mathbb{H}_u$ sous-espace horizontal. Un vecteur v est dit vertical (resp. horizontal) s'il est dans $\mathbb{V}_u$ (resp. $\mathbb{H}_u$). Enfin l'union des $\mathbb{V}_u$ (resp. des $\mathbb{H}_u$), noté $\mathbb{V}$ (resp. $\mathbb{H}$), est le fibré vertical (resp. fibré horizontal).

Il est important de remarquer que $\mathbb{V}_u$ existe toujours, indépendamment de l'existence ou non d'une connexion. Par contre $\mathbb{H}_u$ n'existe pas a priori; c'est l'existence d'une connexion qui le fournit.
On a une correspondance canonique entre l'espace tangent à la fibre $\mathbb{V}_u$ qui est égal à $T_u(F_x)$, avec $F_x = \pi^{-1}(x)$, et $\mathcal{G}$. En effet F_x est difféomorphe à G et $\mathcal{G}$ est isomorphe à $T_e(G)$. Etant donné une connexion Γ sur P, celle-ci définit une projection de $T_u(P)$ sur $\mathbb{V}_u$, (qui à un élément de $T_u(P)$ associe sa composante dans $\mathbb{V}_u$, par décomposition en somme directe). Comme $\mathbb{V}_u$ s'identifie avec $\mathcal{G}$, on définit ainsi une 1-forme différentiable, notée aussi Γ sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Cette forme est appelée 1-forme de connexion .

Pour $A \in \mathcal{G}$, on définit sur P l'application A^* par :

$$A^*(u) \;=\; \frac{d}{dt}(u(exp(tA))\,|_{t=0}$$

pour $u \in P$. Elle est à valeurs dans $T_u(P)$. La forme de connexion vérifie alors les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.1

1. *$\Gamma(u)(A^*u) = A$ pour tout $u \in P$ et tout $A \in \mathcal{G}$;*
2. *$\Gamma(ug) \circ dR_g = Ad(g^{-1}) \circ \Gamma(u)$ pour tout $u \in P$ et tout $g \in G$.*

La réciproque est vraie : si on se donne une 1-forme ω à valeurs dans $\mathcal{G}$ sur P satisfaisant les deux propriétés précédentes, alors il existe une unique connexion Γ sur P dont la forme de connexion est ω (voir [2], page 64-65). Cela justifie la notation de la forme de connexion. A partir de là, on peut montrer que :

Lemme 4.1.1

Pour tout $u \in P$, $d_u\pi$ restreinte à $\mathbb{H}_u$ et à valeurs dans $T_{\pi(u)}(M)$ est un isomorphisme.

Transport parallèle de vecteurs et de courbes

Soit $u \in P$ et soit $m = \pi(u)$. On définit l_u de $T_m(M)$ dans $\mathbb{H}_u$ par $l_u = (d_u(\pi)\,|_{\mathbb{H}_u})^{-1}$.

Définition 4.1.2
Pour $v \in T_m(M)$, le vecteur $l_u(v) \in T_u(P)$ est appelé <u>*le transporté par parallélisme de v*</u> *.*

Lemme 4.1.2
Soit $u \in P$ et $g \in G$. Alors :

1. $(dR_g)(\mathbb{H}_u) = \mathbb{H}_{ug}$;
2. $l_{ug} = (dR_g) \circ l_u$.

démonstration : voir [7], page 338.

Théorème 4.1.1 (théorème de relèvement)
Soit $m(t)$ est une courbe tracée sur M pour $a \leq t \leq b$ et supposons que : $\pi(u) = m(a)$. Alors il existe une unique courbe tracée sur P, $u(t)$, pour $a \leq t \leq b$, telle que :

1. $u(a) = u$;
2. $\pi(u(t)) = m(t)$ *pour* $a \leq t \leq b$;
3. $du/dt \in \mathbb{H}_{u(t)}$ *pour* $a \leq t \leq b$.

démonstration : voir [7], page 340.
Ces deux lemmes sont géométriquement importants, car ils permettent d'éclairer la notion de connexion. En effet sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir des vecteurs et des bases affines. On sait naturellement comment transporter un vecteur ou une courbe d'une base à une autre. Par exemple on sait ramener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à un vecteur $\overrightarrow{OC}$ par un transport parallèle et écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ où O est l'origine d'un repère. Si maintenant on veut étendre ce qu'on sait faire naturellement sur $\mathbb{R}^n$, à un fibré principal, on a besoin des notions de connexion et donc de transport parallèle lié à cette connexion. Par exemple une courbe sur le fibré tangent $P = TM$ définie par le théorème précédent va déterminer des "bases parallèles" le long de la courbe $m(t)$.

<u>Dérivée covariante et courbure</u>

Une autre notion importante attachée à celle de connexion est celle de dérivée covariante. Sur l'algèbre des formes différentielles $\Lambda(M)$, on a défini la dérivée extérieure. On peut bien sûr généraliser cette opération à des formes à valeurs non plus dans $\mathbb{R}$, mais dans un espace vectoriel E, ensemble noté $\Lambda(M) \otimes E$. On note cette opération encore d.
Soit Γ une connexion sur un fibré principal P, et soit $\omega \in \Lambda^r(P) \otimes E$ une r-forme différentielle extérieure sur P à valeurs dans E, et soit $X_1, \ldots, X_{r+1}$ des vecteurs de $T_u(P)$.

Définition 4.1.3
<u>*La dérivée covariante D*</u> *de ω est définie par :*

$$D(\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = (d\omega)(X_1^{\mathbb{H}}, \ldots, x_{r+1}^{\mathbb{H}})$$

C'est donc une $(r+1)$-forme extérieure sur P à valeurs dans E.

La justification de cette définition est donnée dans [2], page 76, proposition 5.1. $X_i^{\mathbb{H}}$ désigne la composante horizontale de X_i. Pour E, on va prendre l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Définition 4.1.4

La *2-forme de courbure* *est par définition la dérivée covariante de la 1-forme de connexion* Γ *:*

$$\Omega = D\Gamma \in \Lambda^2(P) \otimes \mathcal{G}$$

C'est donc une 2-forme sur P *à valeurs dans* $\mathcal{G}$*.*

La courbure Ω vérifie les deux équations suivantes :

Proposition 4.1.2

Pour X *et* Y *dans* $T_u(P)$ *:*

1. $\Omega(X, Y) = (d\omega)(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$ *: équation (de structure) de Cartan;*

2. $D\Omega = 0$ *: équation de Bianchi.*

démonstration : voir [2], pages 77-79, théorèmes 5.2 et 5.4.
L'équation de Cartan s'écrit aussi sous la forme : $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$.

Expression locale et existence d'une connexion

Sur M, base du fibré principal, on considère un recouvrement $\{U_\alpha\}$. Sur chaque ouvert U_α, on peut définir une section σ_α de U_α dans P, donc : $\pi \circ \sigma_\alpha =$ identité. On peut sur U_α définir une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{G}$ par : $\mathcal{A}_\alpha = \sigma_\alpha^*(\Gamma)$. Une telle forme s'appelle le *potentiel de jauge* local associé à la connexion Γ par la section σ_α. Evidemment on se pose la question inverse : est-ce que si on se donne $(U_\alpha, \sigma_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ sur M, il existe une connexion Γ sur P, dont les $\mathcal{A}_\alpha$ soient les potentiels de jauge ? D'abord on peut voir que si elle existe, elle est forcément unique. En fait si elle existe, sa restriction Γ_α à $\pi^{-1}(U_\alpha)$ doit être égale à :

$$\Gamma_\alpha \; = \; g_\alpha^{-1}(\pi^* \mathcal{A}_\alpha) g_\alpha + g_\alpha^{-1} d g_\alpha$$

où d est la dérivée extérieure généralisée, et $g_\alpha = \phi_\alpha(u)$ pour $u \in \pi^{-1}$ (on a montré que c'était indépendant de u). De là on déduit la formule suivante, en notant $\psi_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition sur M :

$$\mathcal{A}_\alpha \; = \; (\psi_{\beta\alpha})^{-1} \mathcal{A}_\beta (\psi_{\beta\alpha}) + (\psi_{\beta\alpha})^{-1} d(\psi_{\beta\alpha}) \tag{4.1}$$

C'est l'équation de transformation de jauge. Si l'équation de transformation de jauge est vérifiée, alors on peut définir une connexion sur P. Voir Schwarz ([5]), chapitre 15. La courbure Ω associée à la connection Γ est elle une 2-forme dur P. Sa projection sur la base M reste elle par contre une vraie 2-forme, avec laquelle on n'a pas les problèmes de recollement précédents.

4.2 Electromagnétisme

Transformations de Lorentz

Tous les résultats donnés dans ce paragraphe sont montrés dans ([7]), chapitre 11 : The special theory of relativity.
On considère deux référentiels $O, (t, x, y, z)$ et $\overline{O}, (\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ qui à $t = \overline{t} = 0$ coïncident. O et $\overline{O}$ sont les origines des repères, t ou $\overline{t}$ est la coordonnée temporelle, x, y, z et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ les coordonnées

spatiales. Le second référentiel est en translation rectiligne uniforme par rapport au premier. C'est un changement de référentiels galiléen. On cherche alors à les coordonnées d'un événement dans le second référentiel en fonction des coordonnées de cet événement dans le premier. Alors on peut considérer deux cas physiques importants :

- Mécanique de Newton-Galilée : on a une transformation galiléenne :

$$\begin{aligned}
\overline{t} &= t \\
\overline{x} &= x - ut \\
\overline{y} &= y \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

- Electromagnétisme de Maxwell : dans ce cas, on a une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned}
\overline{t} &= \frac{t - (ux/c^2)}{(1 - (u^2/c^2))^{1/2}} \\
\overline{x} &= \frac{x - ut}{(1 - (u^2/c^2))^{1/2}} \\
\overline{y} &= y \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

Maintenant à la place de x, y, z on utilise les notations x^1, x^2, x^3 et $x^0 = ct$ plutôt que t, ce qui possible car c est une constante. On note ces coordonnées (x^μ). On pose :

$$\begin{aligned}
\beta &= u/c \\
\gamma &= 1/(1 - (u^2/c^2))^{1/2}
\end{aligned}$$

La transformation obtenue précédemment devient alors :

$$\begin{aligned}
\overline{x^0} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\
\overline{x^1} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\
\overline{x^2} &= x^2 \\
\overline{x^3} &= x^3
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{pmatrix} \overline{x^0} \\ \overline{x^1} \\ \overline{x^2} \\ \overline{x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Il est évident qu'on obtient le même genre d'égalité si on translate suivant non plus l'axe x^1, mais suivant l'un ou l'autre des deux axes x^2 ou x^3. On définit maintenant α par :

$$\beta = \tanh(\alpha)$$

Alors notre égalité matricielle (4.2) devient :

$$\begin{pmatrix} \overline{x^0} \\ \overline{x^1} \\ \overline{x^2} \\ \overline{x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Dans ce cas, si on considère encore un autre repère $\overline{\overline{x^\mu}}$, lui-même en translation uniforme par rapport à $\overline{x^\mu}$, pour retrouver l'expression de ces coordonnées $\overline{\overline{x^\mu}}$ dans les premières, il suffit d'effectuer le produit des matrices des égalités (4.3).
Dans le cadre relativiste, on munit $\mathbb{R}^4$ d'une <u>métrique hyperbolique</u> :

$$g = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$$

qui est conservée par une transformation de Lorentz. De plus si on s'intéresse à l'ensemble des transformations qui conservent la métrique hyperbolique, on voit qu'il y a :

1. les matrices du style (4.3) :

$$\begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. les matrices du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (a_{ij}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

   où (a_{ij}) est une matrice 3×3 de rotation;

3. les translations.

Définition 4.2.1
Le sous-groupe de $GL(4)$ engendré par les matrices du type (1) et (2) est appelé <u>groupe de Lorentz</u> . Le <u>groupe de Poincaré</u> est le sous-groupe de $GL(4)$ engendré par le groupe de Lorentz et le groupe des translations.

Donc l'espace-temps (l'espace de tous les "événements") dans le cadre de la relativité est une variété de dimension 4, munie d'une métrique hyperbolique. Les changements de référentiels s'effectuent grâce au groupe de Poincaré. On va maintenant s'intéresser aux équations de Maxwell.

<u>Equations de Maxwell</u>

On se place dans un référentiel galiléen, dans lequel se trouve une charge électrique q *fixe*. On sait alors que le champ électrique créé est de la forme :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r}$$

où r est la distance à la charge et $\mathbf{u_r}$ le vecteur unitaire allant de la source au point où l'on mesure le champ. C'est la loi de Coulomb. On montre sans difficulté que l'on a $\mathbf{E} = \nabla V$ [2] avec :

$$V = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

[2]en général, on prend $\mathbf{E} = -\nabla V$

V est le potentiel créé par la charge q, défini à une constante près. Maintenant dans un autre référentiel galiléen, en translation rectiligne uniforme par rapport au premier, notre charge q n'est pas fixe : on a une *charge en mouvement*. Donc l'électrostatisme est une notion liée au référentiel. Cette charge en mouvement crée un courant $\mathbf{J}$ et alors la théorie classique du champ électromagnétique repose sur les équations de Maxwell qui s'écrivent classiquement dans $\mathbb{R}^3 = (x, y, z)$ ($\nabla\times = rot$ et $\nabla. = div$) :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.4}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{4.5}$$

$$\nabla.\mathbf{E} = (1/\epsilon_0)\rho = \mu_0\rho \tag{4.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = (\partial \mathbf{E}/\partial t) + \mu_0 \mathbf{J} \tag{4.7}$$

avec $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ et $c = 1$. ρ est la densité de charge et $\mathbf{J}$ est le courant électrique. L'égalité (4.4) s'appelle *équation de Faraday*, la (4.7) *équation d'Ampère*. Enfin la seconde traduit le fait qu'il n'existe pas de charge magnétique libre et la troisième traduit simplement la conservation de la charge.
L'équation (4.5) $\nabla.\mathbf{B} = 0$ peut être “résolue” en posant :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$ étant le potentiel-vecteur (a priori, on n'est pas sûr qu'il est défini). A partir de là, en reprenant l'égalité (4.4), on obtient : $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0$ ce qui peut être résolu par :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla V$$

(ce qui dans le cas de charge fixe, sans courant, redonne l'électrostatique). On a donc un potentiel-vecteur $\mathbf{A}$ et un potentiel-scalaire V avec :

$$\mathbf{E} = \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Mais $\mathbf{A}$ est défini à un gradient d'une f fonction de (t, x, y, z) près et V au $\partial_t f$ près. En effet ces ambiguités de définition ne changent pas le résultat concernant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, qui sont les “vraies grandeurs physiques” (ce sont eux que l'on peut vraiment mesurer) :

$$\nabla(V + \partial_t f) - \frac{\partial(\mathbf{A} + \nabla f)}{\partial t} = \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\partial_t f - \partial_t \nabla f$$

comme $\nabla\partial_t = \partial_t\nabla$, on retrouve bien $\mathbf{A}$ et

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla f)$$

et $\nabla \times \nabla = 0$. On retrouve dans le cas où $\partial_t f =$ constante, le cas de l'électrostatisme (V défini à une constante près).
Les équations de Maxwell ont la particularité d'être invariantes non pas par transformation de Galilée, mais par transformation de Lorentz. Donc on se place dans le cadre relativiste : on choisit un repère $(x^\mu) = (t, x, y, z)$ et on introduit le 4-vecteur densité de courant $(J^\mu) = (\rho, J^1, J^2, J^3)$ qui est bien conservé par transformation de Lorentz (voir [7], pages 243-244). On

définit aussi le 4-vecteur potentiel (A_μ) par : $(A_\mu) = (V, A^1, A^2, A^3)$. Si on change de potentiel (A'_μ), comme on ne doit pas changer les grandeurs **E** et **B**, on obtient l'égalité :

$$(A'_\mu) = (A_\mu) + df$$

qui ressemble beaucoup à l'équation (4.1) obtenue sur les connexions.

On définit la 2-forme F suivante (qui est une forme globalement définie) :

$$\begin{aligned} F &= E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy + E_z dt \wedge dz \\ &\quad - B_x dy \wedge dz - B_y dz \wedge dx - B_z dx \wedge dy \end{aligned}$$

qui sous forme matricielle est :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Alors F vérifie l'égalité suivante : $dF = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} dF &= \left(\frac{E_x}{dy} - \frac{E_y}{dx} - \frac{B_z}{dt}\right) dt \wedge dx \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{E_x}{dz} - \frac{E_z}{dx} + \frac{B_y}{dt}\right) dz \wedge dt \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{E_y}{dz} - \frac{E_z}{dy} - \frac{B_x}{dt}\right) dy \wedge dz \wedge dt \\ &\quad + \left(-\frac{B_x}{dx} - \frac{B_y}{dy} - \frac{B_z}{dz}\right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

et avec les égalités (4.4) et (4.5), on obtient le résultat.

Dualité de Hodge et seconde équation sur F

On revient à des définitions plus abstraites. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n et orienté. Soit g une métrique sur E, i.e. une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soit ϵ la forme *élément de volume* de E, c'est-à-dire la forme définie par :

$$\sqrt{|g|} v^1 \wedge \ldots \wedge v^n$$

où $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orientée positivement de E et $g = det(g(v_i, v_j))$ (pour les propriétés de cette forme, voir [9], chapitre 9). Soit Φ de E dans E' l'isomorphisme défini par la métrique : $\Phi(v)(w) = g(v, w)$. L'application Φ induit alors une application Φ_* entre E_0^r et E_r^0 (pour les notations, voir paragraphe 1) définie par :

$$\Phi_* \alpha(\beta^1, \ldots, \beta^k) = \alpha(\Phi^{-1}\beta^1, \ldots, \Phi^{-1}\beta^k)$$

C'est aussi une isomorphisme. Donc si $\omega \in \Lambda^k(M)$, alors $\Phi_*\omega \otimes \epsilon$ est dans E_k^n. Soit $C : E_k^n \to E^{n-k}$ la contraction qui contracte le ième terme contravariant avec le ième terme covariant, pour $1 \leq i \leq k$ (en supposant $k \leq n$).

Définition 4.2.2

L'opérateur * de Hodge entre $\Lambda^k(E)$ et $\Lambda^{n-k}(E)$ est donné par :

$$\omega \mapsto {}^*\omega = (1/k!)C(\Phi_*\omega \otimes \epsilon)$$

Concretement pour $E = \mathbb{R}^3$ avec la métrique euclidienne et (e_1, e_2, e_3) pour base standard, on obtient :

$$^*e^1 = e^2 \wedge e^3, \quad ^*e^2 = e^3 \wedge e^1, \quad ^*e^3 = e^1 \wedge e^2$$

pour $E = \mathbb{R}^4$ avec (e_0, e_1, e_2, e_3) pour base standard et avec la métrique hyperbolique, on a $\epsilon = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ et :

$$\begin{aligned}
^*e^0 &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
^*e^1 &= e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \\
^*e^2 &= -e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \\
^*e^3 &= e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \\
^*(e^1 \wedge e^3) &= -e_0 \wedge e_2
\end{aligned}$$

Dans ce cas, si α est un produit extérieur de e^i, son dual $^*\alpha$ est le produit extérieur des autres e^j. L'ordre des autres doit être pris pour que le produit extérieur de α et de $^*\alpha$ donne ϵ. Après il suffit d'ajouter à $^*\alpha$ un (-1) chaque fois que e^i apparaît dans α pour $i = 1, 2, 3$.

Lemme 4.2.1

Si la métrique g admet s carrés négatifs ($g(e_i, e_i) = -1$), sur les k-formes, on a :

$$^{**} = (-1)^{k(n-k)+s}$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^4$ avec la métrique hyperbolique, $(-1)^{p(4-p)+3} = (-1)^{p+1}$, donc pour une p-forme ω, $^{**}\omega = (-1)^{p+1}\omega$.

Maintenant on considère les équations de Maxwell (4.7) et (4.6). Si $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$, ces équations deviennent :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla . \mathbf{E} = 0$$

Donc ces sont les mêmes que (4.4) et (4.5) si $\mathbf{B}$ est remplacé par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}$ par $-\mathbf{B}$. Soit F' la 2-forme obtenue à partir de F en effectuant les remplacements précédents. On obtient :

$$(F'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Alors on a aussi :

$$\begin{aligned}
dF' &= \left(-\frac{B_x}{dy} + \frac{B_y}{dx} - \frac{E_z}{dt}\right) dt \wedge dx \wedge dy \\
&+ \left(-\frac{B_x}{dz} + \frac{B_z}{dx} + \frac{E_y}{dt}\right) dz \wedge dt \wedge dx \\
&+ \left(-\frac{B_y}{dz} + \frac{E_z}{dy} - \frac{E_x}{dt}\right) dy \wedge dz \wedge dt \\
&+ \left(-\frac{E_x}{dx} - \frac{E_y}{dy} - \frac{E_z}{dz}\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Si on prend J sous forme d'une 1-forme : $J = \rho dt - J_x dx - J_y dy - J_z dz$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_0\,{}^*J &= \mu_0^*(\rho dt + J_x dx + J_y dy + J_z dz) \\
&= \mu_0(\rho dx \wedge dy \wedge dz - J_x dy \wedge dt \wedge dz - J_y dt \wedge dx \wedge dz \\
&\quad - J_z dx \wedge dt \wedge dy) \\
&= \mu_0 J_z dt \wedge dx \wedge dy - \mu_0 J_y dt \wedge dx \wedge dz + \mu_0 J_x dy \wedge dz \wedge dt \\
&\quad + \mu_0 \rho dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell (4.7) et (4.6) donnent donc : $dF' = \mu_0\,{}^*J$, d'où ${}^*dF' = \mu_0\,{}^{**}J = \mu_0 J$. On remarque que $F' = {}^*F$ et on obtient finalement :

$$ {}^*d^*F = \mu_0 J $$

Donc la 2-forme F vérifie : $\boxed{\begin{array}{c} dF = 0 \\ {}^*d^*F = \mu_0 J \end{array}}$

Lien entre les vecteurs potentiels et les connexions

Le fait que $dF = 0$ nous incite à appliquer le lemme de Poincaré pour dire que localement il existe une 1-forme A telle que $F = dA$. Bien sûr à A, on peut ajouter un df (où f est une 0-forme, donc une fonction), sans que cela change F. On retrouve ainsi le fait que les 4-vecteurs potentiels (A_μ) sont définis à un df près. Plus précisément, on ne change pas les grandeurs physiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en changeant (A_μ) en (A'_μ) si on a la relation :

$$ (A'_\mu) = (A_\mu) + df \tag{4.8} $$

où f est une fonction scalaire des variables (x_μ). Cette équation (4.8) est appelée une transformation de jauge. Le fait de pouvoir prendre des potentiels différents pour calculer le champ électromagnétique est appelé dégénérescence de jauge . Donc a priori A est une 1-forme définie localement sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ et qui vérifie l'égalité (4.8). On a déjà fait remarquer que cette égalité ressemblait à l'équation (4.1). Donc on retrouve complètement l'idée de potentiel de jauge. Reste à savoir avec quel groupe on peut travailler.

On considère une variété M de dimension 4, et comme fibré principal, le fibré trivial $P = M \times U(1)$ avec comme groupe le groupe $U(1)$. Sur un tel fibré, on a une seule trivialisation à considérer (une trivialisation est un difféomorphisme de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ dans $U_\alpha \times G$). Donc le potentiel de jauge devient : $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha,\mu} dx^\mu$. De plus l'équation de transformation de jauge devient :

$$ \mathcal{A}_\alpha \;=\; \mathcal{A}_\beta + i d\lambda_{\alpha\beta} $$

car dans ce cas, les fonctions $\psi_{\alpha\beta}$ sont de la forme $exp(i\lambda_{\alpha\beta})$ où $\lambda_{\alpha\beta}$ est une simple fonction scalaire.

De plus pour un $U(1)$-fibré principal P avec une connexion α, on peut définir une 1-forme β à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\alpha = i\beta$ (car l'algèbre de Lie est $i\mathbb{R}$). En effet pour $u \in P$ et $v \in T_u(P)$ on a : $\alpha(u)(v) \in i\mathbb{R}$. Donc on pose $i\beta(u)(v) = \alpha(u)(v)$. De là si $\Omega = D\alpha$ est la courbure de α, on a :

$$ \Omega(X_1, X_2) = d\alpha(X_1, X_2) = i d\beta(X_1, X_2) $$

par l'équation de Cartan, car [,]=0 (dans $U(1)$. De plus il existe une unique 2-forme χ sur M telle que $\pi^*(\chi) = d\beta$. Elle est définie par :

$$ \chi(m)(v, w) \;=\; d\beta(z)(l_z(v), l_z(w)) $$

pour $m \in M$, $\pi(z) = m$ et l_z est le transport parallèle (qui va de $T_m(M)$ dans $\mathbb{H}_z$). Pour montrer qu'elle est bien définie, il faut montrer que si on change z en $z' = zg$, on ne change pas la définition. Pour cela, il suffit de se rappeler que : $l_{z'} = (dR_g) \circ l_z$. Alors :

$$\begin{aligned} d\beta(z')(l_{z'}(v), l_{z'}(w)) &= d\beta(R_g(z))(dR_g \circ l_z(v), dR_g \circ l_z(w)) \\ &= (R_g^* d\beta)(z)(l_z(v), l_z(w)) \\ &= (dR_g^* \beta)(z)(l_z(v), l_z(w)) \end{aligned}$$

En utilisant la seconde propriété des formes de connexion (proposition 4.1.1), et le fait que la représentation adjointe est l'identité car on est sur un groupe commutatif, on obtient le résulat.

Donc on s'aperçoit que le potentiel de jauge $\mathcal{A}$ diffère de notre potentiel-vecteur A d'un coefficient i (A s'identifie avec le β précédent). De plus la courbure Ω associée au potentiel de jauge $\mathcal{A}$ donne une 2-forme χ sur M, qui s'identifie à la 2-forme F. Donc l'égalité $dF = 0$ vérifiée par F n'est rien d'autre que l'équation de Bianchi d'une courbure liée à une connexion. Seule l'autre équation est "une égalité" totalement physique. Donc le 4-vecteur potentiel A peut être interprété en terme de connexion sur un fibré $U(1)$, la courbure étant la 2-forme F, qui donne le champ électromagnétique.

On peut être plus précis encore en disant que le vecteur potentiel A est défini sur un fibré en droite (le groupe est $\mathbb{R}$) et montrer que tout fibré en droite se ramène à un fibré $U(1)$.
On va terminer ce paragraphe sur l'électromagnétisme en montrant que F est à périodes entières.

F à périodes entières

On se place dans le cas d'un $U(1)$-fibré P de base M de dimension 4 sur lequel existe une connexion α. On a déjà défini β et χ.

Si $\sigma : V \to P$ est une section de $\pi : P \to M$ et si $\widehat{\beta} = \sigma^*(\beta)$, alors $\chi = d(\widehat{\beta})$. En effet on a $\pi^*(\chi) = d\beta$, d'où :

$$\begin{aligned} d(\widehat{\beta}) &= d(\sigma^*(\beta)) \\ &= \sigma^*(d\beta) \\ &= \sigma^*(\pi^*(\chi)) \\ &= (\sigma^* \circ \pi^*)(\chi) \\ &= (\pi \circ \sigma)^*(\chi) \\ &= \chi \end{aligned}$$

Au passage on peut remarquer qu'on retrouve $d\chi = 0$.

Soit $m \in M$ et $\sigma : V \to P$ une section de P avec $m \in V$. Soit γ une courbe fermée tracée sur M, $\gamma(t)$, avec $a \leq t$
eqb, telle que γ soit contenue toute entière dans V et telle qu'elle soit le bord d'une variété R de dimension 2, compacte inclus dans M. Le transporté horizontal $u(t) = (\gamma(t), z(t))$ avec $u(a) = (\gamma(a), z(a)) = (m, 1)$ est donné par :

$$z(t) = exp\left(-i \int_{\gamma_t} \widehat{\beta}\right) \in U(1)$$

(voir comment on démontre le théorème de relèvement). Alors par le théorème de Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned} z(b) &= exp\left(-i\int_\gamma \widehat{\beta}\right) \\ &= exp\left(-i\int_R \chi\right) \end{aligned}$$

car $\chi = d\widehat{\beta}$. Maintenant on prend une variété K de dimension 2 orientée compacte et incluse dans M. On fixe $m \in K$. Pour tout $\epsilon > 0$, on se donne un voisinage V_ϵ contenant m tels que, si $\epsilon' < \epsilon$, on ait : $V_{\epsilon'} \subset V_\epsilon$ et quand ϵ tend vers 0, l'adhérence de V_ϵ a pour limite m. On définit $\gamma_\epsilon : [0,1] \to K$ comme une courbe fermée tracée sur K contenue dans V_ϵ ($\gamma_\epsilon(0) = \gamma_\epsilon(1) = m$) (sur une sphère, on prendrait comme courbes des cercles de rayon ϵ). On considère donc les couples $(V_\epsilon, \gamma_\epsilon)$. Alors γ_ϵ divise K en deux parties K_ϵ et D_ϵ, avec $D_\epsilon \subset V_\epsilon$ l'intérieur de la courbe. On suppose que γ_ϵ est paramétré de façon à ce que son orientation corresponde à celle induite par D_ϵ. Alors on obtient :

$$exp\left(-i\int_{D_\epsilon} \chi\right) = exp\left(-i\int_{\gamma_\epsilon} \widehat{\beta}\right) = exp\left(-i\int_{K_\epsilon} \chi\right)$$

Or quand ϵ tend vers 0, $\int_{D_\epsilon} \chi$ tend vers 0. Donc on en déduit que :

$$exp\left(-i\int_K \chi\right) = 1$$

donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\int_K \chi = 2\pi n$.

On en déduit que F qui est une vraie 2-forme sur $\mathbb{R}^4$ et qui joue le rôle de χ a pour périodes $2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$. Donc à une normalisation près, F est à périodes entières.

On va maintenant appliquer notre "collating formula" du paragraphe 3.2 à $F = F^{(-1,2)}$. Evidemment on a : $F = dA$. Mais comme ceci n'est vrai a priori que localement, pour reprendre ce qu'on a fait sur les formes il faut plutôt prendre : $\delta F = dA$, avec $A = A^{(0,1)}$. De là on définit une descente sur F par :

$$\begin{aligned} \delta F &= dA \\ \delta A &= dA^{(1,0)} \\ \delta A^{(1,0)} &= d_{-1}A^{(2,-1)} \end{aligned}$$

(faire attention : on a changé les signes par rapport à la descente sur les formes). Donc la "collating formula" appliquée à cette descente pour une partition $\{\theta_\alpha\}$ devient :

$$F = d(\theta_0^0.A + \theta_1^1.A^{(1,0)}) - \theta_2^2.A^{(2,-1)}$$

Comme F est à périodes entières (modulo 2π), on peut choisir $A^{(2,-1)} = \overset{\mathbb{Z}}{A}{}^{(2,-1)}$ entier. Et si on veut se limiter aux cocycles entiers, on a vu à la fin du paragraphe 3.3, que cela entraîne une ambiguité entière sur $A^{(1,0)}$. Donc la formule devient :

$$\boxed{F = d(\theta_0^0.A + \theta_1^1.\overset{\mathbb{Z}}{A}{}^{(1,0)}) - \theta_2^2.\overset{\mathbb{Z}}{A}{}^{(2,-1)}}$$

avec $\overset{\mathbb{Z}}{A}{}^{(1,0)}$ défini modulo les entiers.

Conclusion

Pour définir l'intégrale "$\int_j A$", on a un début de réponse en posant à la place de A, ce qu'on a obtenu sous le d dans la "collating formula" appliquée à F. Pour poursuivre et donner une définition complète, on a besoin de la notion de caractère différentiel.

Annexe

Le but ici est de montrer le théorème suivant : **Toute variété paracompacte peut être munie d'un recouvrement simple.**

Pour cela on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.2.3

Une structure riemanienne sur une variété différentiable M est la donnée d'un champ de tenseurs g deux fois covariant, dit tenseur métrique, tel que :

1. *g est symétrique;*
2. *pour chaque $x \in M$, g_x est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T_x(M) \times T_x(M)$.*

La structure est dite proprement riemanienne si g_x est définie positive.

En coordonnées locales, les deux premières conditions se traduisent sur les composantes de g par :

1. $g_{ij} \ = \ g_{ji}$;
2. la matrice (g_{ij}) est inversible.

Théorème 4.2.1

Toute variété différentiable M paracompacte peut être munie d'une structure proprement riemanienne.

démonstration :

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de M par des cartes locales $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ et soit $\{\theta_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Désignons par g_i le tenseur deux fois covariant, défini dans U_i, dont les composantes dans les coordonnées (x_i^j) sont :

$$(g_i)_{hk} \ = \ \delta_{hk}$$

En fait comme U_i est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, on remonte par une carte la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Alors il suufit de définir un tenseur g deux fois covariant sur M par :

$$g \ = \ \sum_i \theta_i g_i$$

$\square$

A partir de cette métrique on peut définir la *lonqueur* d'une courbe tracée sur cette variété riemanienne (cf. [9], page 424). On définit alors une géodésique entre deux points comme une courbe tracée entre ces points (il faut une variété connexe par arcs) qui soit un point critique de la fonction :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle dt$$

(voir [9], pages 424-450).

Définition 4.2.4

Un ensemble $U \subset M$ est dit géodésiquement convexe si tout couple de points $(x, x') \in U^2$ admet une unique géodésique de longueur minimale entre les deux points et si cette géodésique est contenue dans U.

Proposition 4.2.1

Un ouvert $U \subset M$ géodésiquement convexe est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

démonstration : voir [3], page 117.

Théorème 4.2.2

Soit $x \in M$, variété proprement riemanienne. Alors x admet un voisinage $W_x \subset M$ géodésiquement convexe.

démonstration : voir [2], pages 138-151 ou [9], exercice 32, page 491.

L'intersection de deux voisinages géodésiquement convexes est encore géodésiquement convexe. Donc l'union de tous ces voisinages W_x est un recouvrement simple de M.

References

[1] Tensor Analysis
Edward Nelson
Princeton University Press and the University of Tokyo Press (1967)

[2] Foundations of differential geometry (vol. 1)
Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu

[3] Géométrie différentielle et systèmes extérieurs
Y. Choquet-Bruhat
Dunod, Paris, 1968

[4] Differential Forms in Algebraic Topology
Raoul Bott and Loring W. Tu
Graduate Texts in Mathematics, Springer (1982)

[5] Topology for Physicists
Albert S. Schwarz
Springer-Verlag

[6] Sur les théorèmes de de Rham
A. Weil
Comment. Math. Helv. (1952)

[7] Differential manifolds and theoretical physics
W. D. Curtis and F. R. Miller
Academic Press Inc.

[8] An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry (second edition)
W. M. Boothby Academic Press Inc.

[9] A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (vol. 1)
Michael Spivak

[10] Eléments de théorie des groupes
Josette Calais
Presses Universitaires de France