Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique

Séminaire des doctorants
Bordeaux, mercredi 12 mars 2003

1 Introduction

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste Robert Brown en 1828. Ce mouvement "aléatoire", dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion ou diffusion du pollen dans l'eau. Le champ d'application du mouvement brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension et inclut la modélisation du prix des actions, du bruit thermique dans les circuits électriques, du comportement limite des problèmes de files d'attente et des perturbations aléatoires dans un grand nombre de systèmes physiques, biologiques ou économiques.

Bachelier (1900) a eu les premiers résultats quantitatifs en s'intéressant aux fluctuations du prix des actions en économie. Einstein (1905) a obtenu la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur. Le premier traitement mathématique rigoureux est dû à N. Wiener (1923, 1924), qui a prouvé l'existence du brownien.

Le plan de l'exposé est le suivant :

1. Mouvement brownien (MB) : définition et construction.
2. Intégrale stochastique, représentation des martingales et formule d'Itô.
3. Equations différentielles stochastiques (EDS) et équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR).

2 Mouvement brownien : définition et construction

2.1 Processus stochastiques en temps continu

Dans toute la suite de ce résumé, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$. Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1 (Filtration) *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\}$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *: pour* $0 \leq s \leq t < +\infty$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Définition 2 (Processus stochastique) *Un processus stochastique* X *est la donnée de* $\{X_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\}$*, où, à t fixé,* X_t *est une variable aléatoire définie sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *à valeurs dans* $\big(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *désigne la tribu borélienne de* $\mathbb{R}^d$.

A $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$; $t \geq 0$ est une trajectoire du processus X. X_t peut représenter par exemple le nombre de clients qui attendent à un guichet ou le prix d'une action, à l'instant t.

Définition 3 (Processus mesurable, processus continu) *Un processus X est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} ([0,+\infty[\times\Omega,\mathcal{B}([0,+\infty[)\otimes\mathcal{F}) & \to & \left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right) \\ (t,\omega) & \mapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable.
Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).

Définition 4 (Processus adapté)
Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t \ ; \ 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Dans la suite, on aura toujours affaire à des processus mesurables et adaptés à une filtration que l'on précisera.

Définition 5 (Processus progressivement mesurable)
Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t \ ; \ 0 \leq t < +\infty\}$, si pour tout $t \geq 0$ l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} ([0,t]\times\Omega,\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) & \to & \left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right) \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est mesurable.

2.2 Définition du mouvement brownien (M.B.)

Définition 6 (M.B. de dimension k) *Un mouvement brownien de dimension k, $\{B_t, \mathcal{F}_t \ ; \ 0 \leq t < +\infty\}$ est la donnée d'un processus mesurable B à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, et d'une filtration, tels que B est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, est continu, et vérifie :*

1. *$B_0 = 0$ presque sûrement.*
2. *Pour $0 \leq s < t$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.*
3. *Pour $0 \leq s < t$, l'accroissement $B_t - B_s$ suit une loi normale centrée, de matrice de covariance $\sqrt{t-s}Id_k$, où Id_k désigne la matrice identité de dimension k.*

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ fait partie de la définition. Cependant, si on se donne $\{B_t \ ; \ 0 \leq t < +\infty\}$, processus continu et si on sait que :

1. B est à accroissements indépendants et stationnaires, i.e. : pour tout $0 \leq r < s \leq t < u$, $B_u - B_t$ et $B_s - B_r$ sont indépendants et la loi de $B_u - B_t$ ne dépend que de la différence $u - t$,
2. et $B_t = B_t - B_0$ suit une loi normale centrée, de matrice de covariance $\sqrt{t}Id_k$,

alors avec la tribu engendrée par B, $\left\{B_t,\ \mathcal{F}_t^B\ ;\ 0 \leq t < +\infty\right\}$ est un mouvement brownien où : $\mathcal{F}_t^B = \sigma\left\{B_s;\ 0 \leq s \leq t\right\}$.

Proposition 1 (propriétés de martingale)
i. B est une martingale par rapport à la tribu $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, de carré intégrable, i.e.

$$\forall\ 0 \leq s < t;\ \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s.$$

ii. $\{B_t^2 - t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\}$ est aussi une martingale par rapport à la même tribu.

Preuve.

$$\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0.$$
$$\mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2|\mathcal{F}_s) = (t - s).$$

Utilisation de l'indépendance et du caractère loi normale. □

La seconde propriété est très importante car elle démontre que le mouvement brownien est *à variation quadratique finie* presque sûrement. Si $\Pi = \{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,t]$, la variation quadratique sur l'intervalle $[0,t]$ par rapport à Π est

$$V_t^2(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2.$$

Si $V_t^2(\Pi)$ converge quand le pas de la subdivision Π tend vers 0, on dit que le processus est à variation quadratique finie.

Quelques résultats concernant la régularité des trajectoires.

Théorème 1 (Régularité)

1. *Le M.B. est à variation infinie sur tout intervalle.*
2. *Le M.B. n'est dérivable en aucun point (Paley, Wiener, Zygmund 1933).*
3. *Les trajectoires du MB sont localement Hölder-continues d'ordre α, avec $\alpha < 1/2$. Par contre c'est faux si $\alpha \geq 1/2$.*

2.3 Construction du mouvement brownien en dimension 1

Plusieurs constructions ont été faites.

1. Kolmogorov(1933 et 1956) : Il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\left(\mathbb{R}^{[0,+\infty)},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,+\infty)})\right)$ et un processus stochastique $W = \left\{W_t,\mathcal{F}_t^W; t \geq 0\right\}$ sur le même espace, tels que sous $\mathbf{P}$, W est un mouvement brownien. Construction utilisant la notion de consistence et un critère de continuité.
2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski (1961) : construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert, et sur le caractère Gaussien du M.B.
3. Donsker (1951) : construction sur l'ensemble $C([0,\infty))$ d'une mesure, appelée mesure de Wiener, utilisant la notion de convergence faible de v.a.

C'est cette troisième méthode que l'on va développer.

On se donne une suite de variables aléatoires $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune :

$$\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante :

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ n \geq 1.$$

On construit un processus continu $Y = \{Y_t;\ t \geq 0\}$ par interpolation linéaire :

$$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}.$$

$[t]$ désigne la partie entière de t. On "normalise" l'échelle du temps et celle d'espace. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n = \left\{ X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{nt};\ t \geq 0 \right\}.$$

Faisons quelques remarques. Si on choisit $s = k/n$ et $t = (k+1)/n$, on obtient :

$$X_t^n - X_s^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{k+1},$$

qui est indépendant de la tribu engendrée par X^n jusqu'à l'instant s, car c'est aussi la tribu engendrée par les $\xi_1, \ldots, \xi_k$. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X_t^n - X_s^n) = 0;\ \mathrm{Var}(X_t^n - X_s^n) = \frac{1}{n}.$$

On peut généraliser un peu en prenant une suite de v.a. $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, i.i.d., de moyenne nulle et de variance σ^2 avec $0 < \sigma^2 < \infty$. On définit S_n et Y_t comme précédemment et dans la définition de X^n on normalise par $1/\sigma$.

Le théorème suivant (principe d'invariance) est dû à Donsker (1951) :

Théorème 2 (Construction du brownien) *La suite de processus (X^n) converge en loi vers un processus qui est un mouvement brownien de dimension 1.*

Rappelons que X^n est une fonction de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(C([0, +\infty[), \mathcal{B}(C([0, +\infty[)))$, où $C([0, +\infty[)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, qu'on munit de la distance ρ suivante :

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t\leq n} \left(|f(t) - g(t)| \wedge 1\right).$$

Donc X^n induit une probabilité $\mathbf{P}^n$ sur $(C([0, +\infty[), \mathcal{B}(C([0, +\infty[)))$ et dire que la suite converge en loi, c'est dire que la suite des $\mathbf{P}^n$ converge faiblement. Il est facile de montrer, via le théorème central limite, que pour tout $0 \leq t_1 < \ldots < t_m < +\infty$, $\left(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_m}\right)$ converge en loi vers $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$. Pour se convaincre, rappelons que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, donc $S_{[nt]}/\sqrt{[nt]}$ aussi et ainsi :

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}}\sqrt{\frac{[nt]}{n}}$$

converge vers $\sqrt{t}\mathcal{N}(0,1)$. Finalement X^n_t converge en loi vers $\sqrt{t}\mathcal{N}(0,1)$, car $\xi_{[nt]+1}$ et $S_{[nt]}$ sont indépendantes.

Mais cela ne suffit pas pour prouver la convergence étroite de X^n, la démonstration du théorème demande un peu plus de travail. En particulier il faut montrer que la suite des $\mathbf{P}^n$ est tendue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $C([0, +\infty[)$ tel que pour tout n, $\mathbf{P}^n(K) \geq 1 - \varepsilon$ (on utilise pour cela le théorème d'Ascoli).

3 Intégrale stochastique

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour de phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été géné par la non différentiabilité du MB. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au MB, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à $\int_0^t H_s dB_s$.

3.1 Rappel : intégrale de Stieljes

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur $[a,b]$. Supposons que f soit à variation finie sur $[a,b]$. Alors f se décompose en $f = g - h$ avec g et h croissantes sur $[a,b]$. Rappelons que si g est croissante, g est à variation bornée et pour ϕ fonction définie sur $[a,b]$ et continue, on peut définir l'intégrale au sens de Stieljes de ϕ par rapport à g de la façon suivante :

$$\int_a^b \phi dg = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{k=1}^m \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

où Π est la subdivision $\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$ de l'intervalle $[a,b]$ et $|\Pi|$ est le pas de Π, i.e.

$$|\Pi| = \max_{k=1,\ldots,m} (x_k - x_{k-1}).$$

On pose alors :

$$\int_a^b \phi df = \int_a^b \phi dg - \int_a^b \phi dh.$$

Mais la réciproque est vraie. Si pour toute fonction ϕ continue, la limite suivante :

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{k=1}^m \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

existe et est finie, alors g est à variation bornée.

Donc il est impossible de définir l'intégrale stochastique trajectoire par trajectoire pour tout processus continu. Si H est un processus stochastique continu, à ω fixé, on ne peut pas donner un sens à l'expression :

$$\int_0^t H_s(\omega) dB_s(\omega).$$

Une telle construction a été développée par T. Lyons (1994-...) [3] dans la théorie des *rough paths*. Mais elle impose des condtions supplémentaires de régularité sur H.

3.2 Intégrale par rapport au MB

La construction est dûe à K. Itô (1942-1944) dans le cas du M.B. et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967).

On suppose donné un mouvement brownien B avec sa filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définit deux classes de processus :

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ H = (H_t)_{0\leq t}, \text{ processus adapté, tel que } \forall\ t,\ \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 ds < +\infty \right\},$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

Théorème 3 (Intégrale d'Itô) *Il existe une unique application linéaire, notée I, de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathcal{M}_c^2$ telle que pour tout $H \in \mathbb{H}^2$ et tout t,*

$$\mathbb{E}\left(I(H)_t^2\right) = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 ds.$$

On note :

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

Tel que le théorème est énoncé, on peut se demander où intervient vraiment le M.B. dans l'intégrale. Pour comprendre son rôle, il faut se pencher un peu plus sur la construction. Si le processus H est de la forme :

$$H_t = \Phi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t), \tag{1}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < +\infty$, Φ_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et bornée et pour $i = 1, \ldots ,p$, les Φ_i sont $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurables et bornées, on pose

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \left(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\right).$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale stochastique I vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment sur les processus élémentaires. Ensuite on montre la densité des processus de la forme (1) dans $\mathbb{H}^2$. Et on va prolonger I définie sur les processus élémentaires à la classe $\mathbb{H}^2$. L'unicité signifie que si I et I' sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors $I(H)$ et $I'(H)$ sont indistinguables.

Proposition 2 (Propriétés de l'intégrale d'Itô) *Pour $H \in \mathbb{H}^2$ et $T \in \mathbb{R}^+$,*

1. *$I(H)$ est à variation quadratique finie et cette variation sur $[0,T]$ est égale à $\int_0^T H_s^2 ds$;*
2. $$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t H_s dB_s\right|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\int_0^T H_s^2 ds.$$

Une dernière extension consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H, en introduisant :

$$\widetilde{\mathbb{H}^2} = \left\{ H = (H_t)_{0\leq t}, \text{ processus adapté, tel que } \forall t \geq 0 \int_0^t H_s^2 ds < +\infty, \mathbf{P}\text{-p.s.} \right\}.$$

On peut encore prolonger I sur cet ensemble, mais on n'a plus une martingale, mais seulement une martingale locale.

3.3 Représentation des martingales

Un intérêt de l'intégrale stochastique est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 4 (Martingales browniennes) *Soit* $\{B_t, \mathcal{F}_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\}$ *un mouvement brownien. Soit* $M = \{M_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ *une martingale brownienne, i.e. une martingale par rapport à la filtration du mouvement brownien, de carré intégrable et telle que* $M_0 = 0$*. Alors il existe un processus* $H \in \mathbb{H}^2$ *tel que pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

De plus si $\widetilde{H}$ *est un autre représentant de* M*, presque sûrement :*

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{H}_t - H_t|^2 dt = 0.$$

D'une certaine manière, toute martingale de carré intégrable est une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien (cf. Karatzas-Shreve [1], chapitre 3.4) :

Théorème 5 (Représentation des martingales, Doob, 1955) *Supposons que*

$$\left\{M_t = \left(M_t^{(1)}, \ldots, M_t^{(d)}\right),\ \mathcal{F}_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\right\}$$

soit définie sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *et que* $M^{(i)}$ *soit une martingale continue, de carré intégrable pour* $1 \leq i \leq d$*. Supposons aussi que pour* $1 \leq i,j \leq d$*, les crochets* $\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle$ *soient tous des fonctions absolument continues en* t*,* $\mathbf{P}$*-p.s. Alors il existe une extension* $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathbf{P}})$ *de* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *sur laquelle sont définis un M.B. d-dimensionnel*

$$W = \left\{W_t = \left(W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)}\right),\ \widetilde{\mathcal{F}}_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\right\}$$

et une matrice

$$X = \left\{\left(X_t^{(i,k)}\right)_{1 \leq i,k \leq d},\ \widetilde{\mathcal{F}}_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty\right\}$$

de processus mesurables et adaptés avec

$$\widetilde{\mathbf{P}}\left[\int_0^t \left(X_s^{(i,k)}\right)^2 ds < \infty\right] = 1;\ 1 \leq i,k \leq d,\ 0 \leq t < \infty;$$

tels que l'on a, $\widetilde{\mathbf{P}}$*-p.s., les représentations suivantes :*

$$M_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} dW_s^{(k)};\ 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq t < \infty;$$

$$\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle_t = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} X_s^{(j,k)} ds;\ 1 \leq i,j \leq d,\ 0 \leq t < \infty.$$

3.4 Formule d'Itô

La formule d'Itô (ou formule de changement de variables) est un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques. On a un M.B. d-dimensionnel.

Définition 7 (Processus d'Itô ou semi-martingales) *Un processu X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est appelé* <u>*semi-martingale*</u> *s'il se décompose de la manière suivante : pour tout t, presque sûrement :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

avec X_0 et K à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, H à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$, $H \in \mathbb{H}^2$ et

$$\mathbb{E}\int_0^t |K_s| ds < \infty, \forall t.$$

Cette décomposition, si elle existe, est unique.

Théorème 6 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, une fois continument dérivable en temps et deux fois en espace (i.e. toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues). Soit X une semi-martingale :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s.$$

Alors $\{f(t,X_t);\ 0 \leq t < +\infty\}$ est encore une semi-martingale et admet la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s).K_s ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s).H_s dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathit{Trace}\left(H_s^* D^2 f(s,X_s) H_s\right) ds \end{aligned}$$

où ∇f désigne le gradient de f par rapport aux variables d'espace et $D^2 f$ désigne la matrice hessienne de f.

Sans l'hypothèse de régularité sur f, ceci est faux. Sans celle-ci, on tombe dans une autre classe de processus, dit de Dirichlet.
Quelques exemples :

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

Si X et Y sont deux semi-martingales,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s,$$

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M,N\rangle_t,$$

avec

$$\langle M,N\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

4 EDS, EDSR

On se place toujours sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, et on se donne un M.B. d-dimensionnel, avec sa filtration.

4.1 EDS

Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b\ :\ \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma\ :\ \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, mesurables. On se donne également une variable aléatoire ξ, de carré intégrable et indépendante du M.B. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \text{ avec } X_0 = \xi.$$

En fait cette équation doit être interpretée au sens d'une équation intégrale, à savoir :

$$X_t = \xi + \int_0^t b(r,X_r)dr + \int_0^t \sigma(r,X_r)dB_r,\ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Le coefficient b s'appelle la <u>dérive</u> tandis que la matrice $\sigma\sigma^*$ s'appelle la <u>matrice de diffusion</u>.

Définition 8 (Solution (forte) d'une EDS) *Une solution de l'EDS (2), X, est un processus continu tel que :*

1. *X est mesurable et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$;*
2. *$\mathbf{P}$-p.s. $\int_0^T \{|b(r,X_r)| + \|\sigma(r,X_r)\|^2\}\, dr < \infty$;*
3. *$\mathbf{P}$-p.s., on a : $X_t = \xi + \int_0^t b(r,X_r)dr + \int_0^t \sigma(r,X_r)dB_r,\ 0 \le t \le T$.*

où la filtration est définie pour tout t positif par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{\sigma\left\{\xi,B_s; s\le t\right\} \cup \mathcal{N}\right\}.$$

Le théorème suivant est dû à Itô.

Théorème 7 (Existence et unicité de la solution) *On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0,T]$, x, y dans $\mathbb{R}^n$:*

1. *condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :*
$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le K|x-y|;$$
2. *croissance linéaire : $|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \le K(1+|x|)$;*
3. *$\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$.*

Alors l'EDS (2) possède une unique solution. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2\right) < \infty.$$

On retrouve donc le résultat classique des EDO (prendre $\sigma = 0$). Depuis on a montré des résultats d'existence et d'unicité avec des conditions plus faibles sur b et σ (cf. [6]).

Un exemple classique d'EDS est lié à la finance. Le prix d'une action S_t à un instant t est supposée suivre l'EDS suivante :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r,\ 0 \leq t \leq T.$$

S_0 est donnée et σ est appelée *volatilité* de l'action (c'est le paramètre important ici). On montre facilement à l'aide la formule d'Itô que

$$S_t = S_0 \exp\left\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right\}.$$

Un autre exemple vient de la mécanique (Langevin (1908)) (et du calcul de Malliavin) :

$$X_t = X_0 - \int_0^t \alpha X_r dr + \int_0^t \sigma dB_r.$$

Dans cette équation, X_t représente la vitesse d'une particule libre de masse m dans un champ composé d'une force de friction et d'une force aléatoire, α est le coefficient de friction, et $\sigma^2 = 2\alpha kT/m$, où T désigne la température absolue, k est la constante de Boltzmann. La solution est donnée par :

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s,$$

et porte le nom de *processus d'Ornstein-Uhlenbeck*.

4.2 EDSR

4.2.1 Présentation du problème

Considérons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$ une variable aléatoire ξ supposée $\mathcal{F}_T$-mesurable. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dY_t}{dt} = 0,\ t \in [0,T],\ \text{avec } Y_T = \xi,$$

en imposant que Y soit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Le candidat naturel $Y_t = \xi$ n'est pas adapté. La meilleure approximation (dans L^2) adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un MB, le théorème de représentation des martingales permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

4.2.2 Solution d'une EDSR

On se donne une application aléatoire f définie sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$, le processus $(f(t,y,z))_{0\le t\le T}$ soit adapté. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r,\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale.

Définition 9 (Solution d'une EDSR) *Une solution de l'EDSR (3) est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\le t\le T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont mesurables et adaptés à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$;*
2. *$\mathbf{P}$-p.s. $\int_0^T \{|f(r,Y_r,Z_r)| + \|Z_r\|^2\}\, dr < \infty$;*
3. *$\mathbf{P}$-p.s., on a : $Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r,\ 0 \le t \le T$.*

On fait l'hypothèse suivante : il existe une constante K telle $\mathbf{P}$-p.s.

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z et z'

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \le K(|y-y'| + \|z-z'\|);$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr\right] < \infty.$$

Le théorème suivant est dû à Pardoux et Peng (1990).

Théorème 8 (Existence et unicité des solutions) *Sous l'hypothèse précédente, l'EDSR (3) possède une unique solution (Y,Z) telle que :*

$$\mathbb{E}\int_0^T \|Z_r\|^2 dr < \infty.$$

On a de plus que Y est continu et

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\right) < \infty.$$

4.2.3 Un exemple financier

Un problème fréquent en finance consiste à donner un prix aux options. Une option européenne d'achat, un "call", de maturité T et de prix d'exercice K, est un contrat qui donne le droit, mais non l'obligation à son détenteur d'acheter une part de l'action au prix d'exercice K à la date T. Le vendeur de l'option s'engage donc à payer à son détenteur la somme $\xi = (S_T - K)^+$ qui représente le profit que permet l'exercice de l'option. A quel prix v vendre l'option ? Le vendeur doit s'assurer qu'en vendant l'option au prix v à la date $t = 0$, il disposera de la somme ξ à la date $t = T$.

Pour trouver v, l'idée fondamentale est la duplication : le vendeur vend l'option au prix v et investit cette somme dans le marché. Il peut investir soit dans l'action qui suit le cours :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r,\ 0 \leq t \leq T,$$

soit dans un placement sans risque, dont le taux de rendement est fixe, égal à r; le prix d'une part est donné par : $E_t = E_0 e^{rt}$. Donc sa richesse à l'instant t est : $V_t = q_t S_t + p_t E_t$, où q_t est le nombre de parts d'action, p_t celui d'actif sans risque. On peut transformer cette équation :

$$dV_t = q_t dS_t + p_t dE_t = r p_t E_t dt + q_t S_t (\mu dt + \sigma dB_t).$$

L'évolution de la richesse ne dépend que de la variation des prix (*stratégies auto-financées* : pas d'ajout, ni de retrait d'argent). Comme $p_t E_t = V_t - q_t S_t$, on obtient :

$$dV_t = r V_t dt + \sigma q_t S_t \frac{\mu - r}{\sigma} dt + q_t S_t \sigma dB_t.$$

Notons $Z_t = \sigma q_t S_t$ et $\theta = (\mu - r)/\sigma$ (c'est le “risk premium”), on a : $dV_t = r V_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dB_t$. Et le vendeur veut obtenir : $V_T = \xi$, d'où :

$$V_t = \xi - \int_t^T (r V_s + \theta Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On peut calculer explicitement V_t pour tout t (par la formule d'Itô) :

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[\xi \exp \left(-\theta (B_T - B_t) + \frac{\theta^2}{2}(T - t) - r(T - t) \right) \right].$$

Comme $v = V_0$, on a

$$v = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \xi \exp \left(-\theta B_T + \frac{\theta^2}{2} T \right) \right].$$

On peut calculer cette espérance et on obtient la <u>formule de Black-Scholes</u> :

$$v = S_0 \Phi (d) - K e^{-rT} \Phi \left(d - \sigma \sqrt{T} \right),$$

avec

$$d = \frac{\ln (S_0/K) + rT}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}, \text{ et } \Phi (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

On peut remarquer que dans cette formule μ n'apparaît pas; par contre σ joue un rôle primordial.

Références

[1] Karatzas I., Shreve S.E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1988.

[2] Lamberton D., Lapeyre B. : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses Edition Marketing, 1997.

[3] Lyons T. : *Differential equations driven bu rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1998, 14:2, 215-310.

[4] Pardoux E., Peng S. : *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55-61.

[5] Revuz D., Yor M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.

[6] Stroock D.W., Varadhan S.R. : *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer,1979.