Chaînes de Markov.

Alexandre Popier

ENSAI, Bruz

apopier@univ-lemans.fr

http://www.univ-lemans.fr/∼apopier

Janvier-Mars 2011

PLAN

DÉFINITION

Une suite récurrente aléatoire sur un espace E est une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ solution d'une équation récurrente de la forme :

$$X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n)$$

où

1. *$\theta_1, \theta_2, \ldots$ sont des v.a. i.i.d. à valeurs dans Θ ;*
2. *$f : \Theta \times E \to E$ est une application mesurable ;*
3. *X_0 (la condition initiale) est une v.a. (éventuellement déterministe) indépendante de la suite $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.*

BATTRE LES CARTES.

- E : ensemble des permutations (d'un jeu de 52 cartes), de cardinal 52! ;
- Θ : un sous-ensemble de E ;
- $X_0 = e$: identité (les cartes sont ordonnées), $X_{n+1} = \theta_{n+1} \circ X_n$.

HYPOTHÈSES :

- Θ est mélangeant, i.e. engendre E ;
- la loi des θ_i charge tous les éléments de Θ.

THÉORÈME

La suite (X_n) est récurrente, satisfait une loi des grands nombres :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k=x} = \frac{1}{52!}.$$

Théorème

La suite (X_n) est récurrente, satisfait une loi des grands nombres :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k = x} = \frac{1}{52!}.$$

- On a une asymptote de type exponentiel (condition de Doeblin) :

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in E} \left| \mathbb{P}(X_n = x) - \frac{1}{52!} \right| \leq C\rho^n, \quad \text{avec } \rho < 1.$$

- Diaconis a montré qu'*il suffit de battre le jeu 7 fois* !

Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$.

- $e_1, \ldots, e_d$: base canonique de $\mathbb{R}^d$;
- $E = \mathbb{Z}^d$;
- $\Theta = \{-e_1, \ldots, -e_d, e_1, \ldots, e_d\}$; θ_i de loi uniforme sur Θ ;
- $X_0 = 0$, $X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$: marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$.

Théorème (Polya, 1921)

Pour $d = 1$ ou 2, la marche aléatoire (X_n) est récurrente :

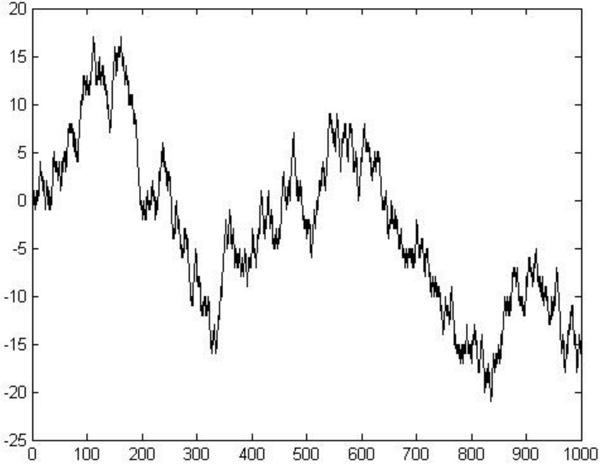
$$\mathbb{P}(\exists n > 0,\ X_n = 0) = 1.$$

Pour $d \geq 3$, elle est transiente : $\mathbb{P}(\exists n > 0,\ X_n = 0) < 1$.

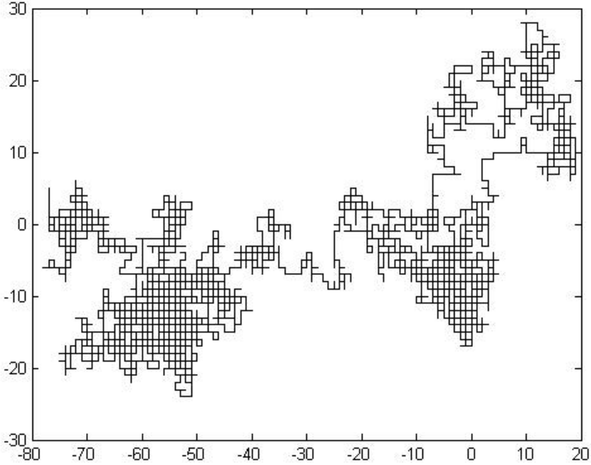
Constante de Polya

C'est $p(d) = \mathbb{P}(T_0 < +\infty)$, T_0 étant le temps de retour à 0. Alors $p(1) = p(2) = 1$, $p(3) \approx 0,34$, $p(4) \approx 0,19$, $p(10) \approx 0,06$.

MARCHE ALÉATOIRE EN DIMENSION 1.



Marche aléatoire en dimension 2.



Convolution de Bernoulli.

- $a > 0$;
- $E = \mathbb{R}$;
- $\Theta = \{-1, 1\}$; θ_i de loi uniforme sur Θ ;
- $X_0 = 0$, $X_{n+1} = aX_n + \theta_{n+1}$.

- Pour $a = 1$, marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
- Pour $a > 1$, $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n \in \{-\infty, +\infty\}) = 1$.
- Pour $0 < a < 1$?

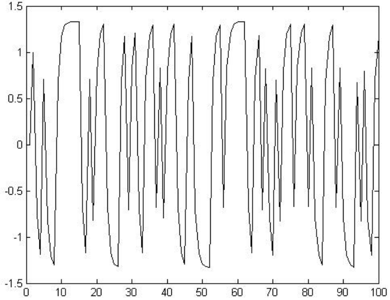
- $X_n - a^n X_0 = a^{n-1}\theta_1 + \ldots + \theta_n$.
- $Y_n = \theta_1 + a\theta_2 + \ldots + a^{n-1}\theta_n$ converge vers $Y_\infty \in \left[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right]$.

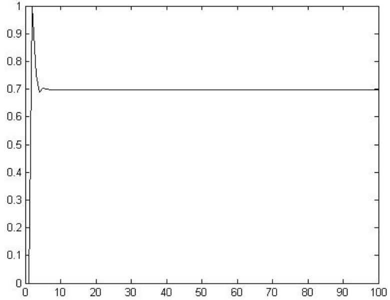
Proposition

(X_n) converge en loi vers Y_∞ : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Phi(X_n) = \mathbb{E}\Phi(Y_\infty)$.

$a = 0,25.$

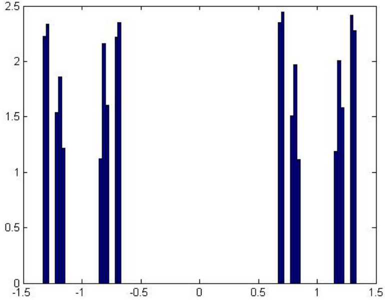
Comportement p.s. de X_n et Y_n :

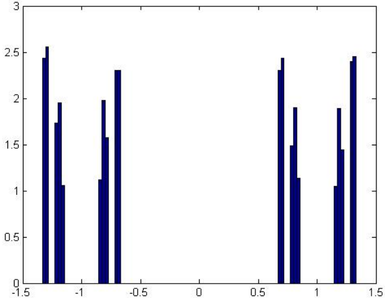




$a = 0,25.$

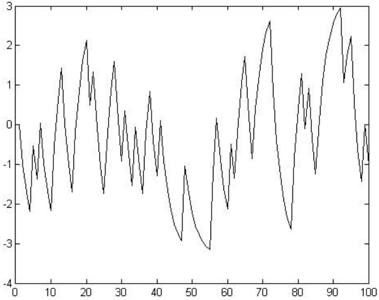
Comportement en loi de X_{100} et Y_{100} :

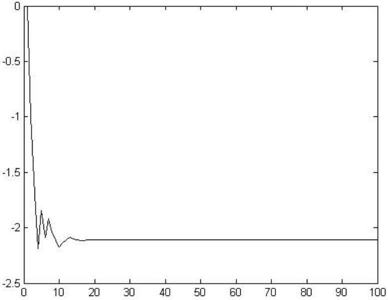




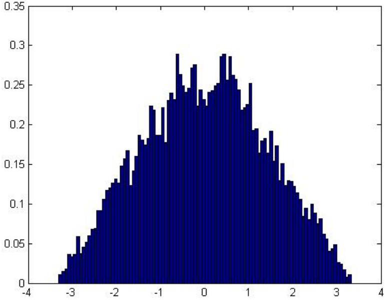
$a = 0,7.$

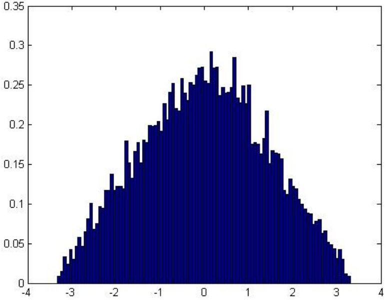
Comportement p.s. de X_n et Y_n :





Comportement en loi de X_{100} et Y_{100} :





Convolution de Bernoulli : loi de la limite.

- $F_a(t) = \nu_a(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(Y_\infty \leq t)$.

Proposition

Pour tout $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k \in I} = F_a(\beta) - F_a(\alpha)$.

Propriétés de F_a

- F_a est l'unique solution continue de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ G(t) = \frac{1}{2} \left[G\left(\frac{t-1}{a}\right) + G\left(\frac{t+1}{a}\right) \right].$$

- Si $a < 1/2$, ν_a est continue singulière (1935).
- Si $a = 1/2$, ν_a est la loi uniforme sur $[-2, 2]$ (1935).
- Pour presque tout $a > 1/2$, ν_a est à densité (1995).

- $E = \mathbb{R}^d$;
- $\Theta = \{1, \ldots, k\}$; θ_i de loi uniforme sur Θ ;
- $X_0 = 0$, $X_{n+1} = A(\theta_{n+1})X_n + B(\theta_{n+1})$.
- $A(1), \ldots, A(k)$ matrices, $B(1), \ldots, B(k)$ vecteurs.

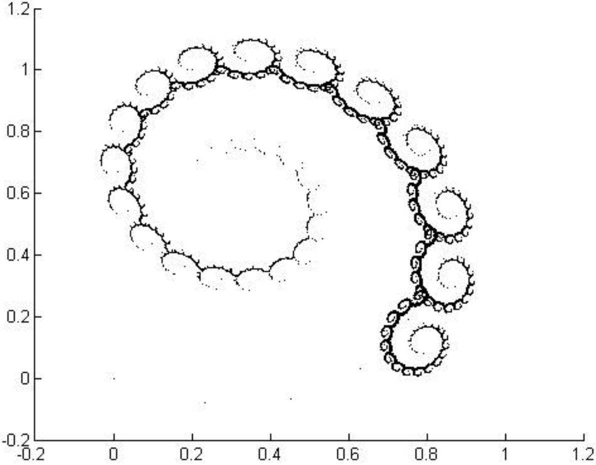
THÉORÈME

Les conclusions de la convolution de Bernoulli restent les mêmes : convergence en loi de (X_n), théorème de convergence presque sûre des moyennes de Césaro.

SPIRALE

- $d = k = 2$;
- $A(1) = \begin{pmatrix} 0,839 & -0,303 \\ 0,383 & 0,924 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} -0,161 & -0,136 \\ 0,138 & -0,182 \end{pmatrix}$;
- $B(1) = \begin{pmatrix} 0,232 \\ -0,080 \end{pmatrix}$, $B(2) = \begin{pmatrix} 0,921 \\ 0,178 \end{pmatrix}$.

FRACTAL EN SPIRALE.



PLAN

MATRICES DE TRANSITION.

DÉFINITION (ESPACE D'ÉTATS, MESURE)

DANS TOUT LE COURS, *E est un espace dénombrable. Un élément $x \in E$ est un état. Une mesure $\nu = (\nu_x,\ x \in E)$ est un vecteur ligne de nombres réels positifs ou nuls. Si $\sum_{x \in E} \nu_x = 1$, la mesure est une probabilité ou distribution.*

DÉFINITION (MATRICE DE TRANSITION)

Une matrice de transition P sur E est une application de $E \times E$ dans $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \sum_{y \in E} P(x,y) = 1.$$

On dit aussi que la matrice est stochastique.

Chaîne de Markov

Définition (Chaîne de Markov)

Une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est appelée chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_0, \ldots, X_n$ est égale à sa loi conditionnelle sachant X_n, i.e. pour tout $y_0, \ldots, y_{n+1}$ dans E :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y_{n+1} | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y_{n+1} | X_n = y_n).$$

- $P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$.

Définition

Si $P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ ne dépend pas de n, on parle de chaîne de Markov homogène. Dans ce cas, la matrice P obtenue est stochastique.

DÉFINITION « ÉQUIVALENTE »

DÉFINITION (CHAÎNE DE MARKOV (ν, P))

Une chaîne de Markov, de distribution initiale ν et matrice de transition P, à valeurs dans E est une suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que :

1. *X_0 a pour loi ν,*
2. *et pour $n \geq 0$, conditionnellement à $X_n = x$, la loi de X_{n+1} est donnée par $(P(x, y),\ y \in E)$ et est indépendante de $X_0, \ldots, X_{n-1}$.*

TRADUCTION MATHÉMATIQUE

Pour tout $n \geq 0$ et tout $y_0, \ldots, y_{n+1}$ dans E :

1. $\mathbb{P}(X_0 = y_0) = \nu_0$;
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = y_{n+1} | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n) = P(y_n, y_{n+1})$.

Exemple important

Proposition

Soit

- $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans* Θ,
- X_0 *une v.a. à valeurs dans* E*, indépendante de la suite* $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $f : \Theta \times E \to E$ *une fonction mesurable.*

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a. à valeurs dans* E *et définie par la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n)$$

est une chaîne de Markov homogène.

Conséquences : tous les suites vues dans la partie 1 sont des chaînes de Markov.

Équation de Chapman-Kolmogorov

Théorème

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P, de distribution initiale ν. Alors

$$\mathbb{P}(X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n) = \nu(y_0)P(y_0, y_1) \dots P(y_{n-1}, y_n).$$

1. Si X_n a pour loi μ_n, alors : $\mu_{n+1} = \mu_n P = \nu P^{n+1}$.
2. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = P^n(x, y)$.
3. Pour toute fonction $h : E \to \mathbb{R}$ bornée,

$$\mathbb{E}(h(X_n)|X_0 = x) = P^n h(x).$$

Remarque

Les fonctions $h : E \to \mathbb{R}$ sont représentées par des vecteurs colonnes.

Définition (Mesure invariante)

Une mesure μ sur E est dite invariante si et seulement si c'est un point fixe de l'équation Chapman-Kolmogorov, i.e. $\mu = \mu P$.

Définition (Mesure réversible)

Une mesure μ sur E est dite réversible si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x).$$

Proposition

Une mesure réversible est invariante.

CHAÎNE RETOURNÉE.

LEMME

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov, alors pour tout* $N \in \mathbb{N}$*,*

$$\hat{X}^N = \left\{\hat{X}_n^N = X_{N-n},\ 0 \le n \le N\right\}$$

est une chaîne de Markov, appelée chaîne retournée à partir de l'instant N*.*

PROPOSITION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *chaîne de Markov* (μ, P) *avec* μ *probabilité réversible. Alors la chaîne retournée* $\hat{X}^N = \{\hat{X}_n^N,\ 0 \le n \le N\}$ *est une chaîne de Markov* (μ, P)*.*

Propriété de Markov.

Définition

Le processus décalé $X_{n+} = (X_{n+,k})_{k \in \mathbb{N}}$ *est défini par*

$$\forall k \geq 0, \quad X_{n+,k} = X_{n+k}.$$

Théorème

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P, de distribution initiale ν. Alors conditionnellement à $X_n = x$, le processus X_{n+} est une chaîne de Markov de matrice de transition P, de distribution initiale δ_x et est indépendant des v.a. $X_0, \ldots, X_n$.

- Phénomène sans mémoire !

Pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n$: tribu des événements déterminés par $X_0, X_1, \ldots, X_n$

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \{\omega \in \Omega;\ (X_0(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B_n\},\ B_n \in \mathcal{P}(E^{n+1}) \right\}.$$

DÉFINITION (TEMPS D'ARRÊT)

Une v.a. τ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée un temps d'arrêt si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE

Soit (X_n) une chaîne de Markov (ν, P) et τ un temps d'arrêt. Alors conditionnellement en $\{\tau < +\infty\} \cap \{X_\tau = x\}$, le processus $(X_{\tau+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (δ_x, P) indépendante de $\mathcal{F}_\tau$: pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$, $m > 0$, $x_1, \ldots, x_m$ dans E :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A \cap \{X_{\tau+1} = x_1, \ldots, X_{\tau+m} = x_m\} | X_\tau = x, \tau < \infty) \\ &= \mathbb{P}(A | X_\tau = x, \tau < \infty) \times \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m).\end{aligned}$$

Notations pour la suite du cours.

- E : espace fini ou dénombrable ;
- P : matrice de transition ;
- $\mathbb{P}_\nu$ loi sachant que X_0 suit la loi ν ;
- $\mathbb{E}_\nu$: espérance sous $\mathbb{P}_\nu$;
- $\mathbb{P}_x$ loi sachant que $X_0 = x$, i.e. $\nu = \delta_x$
- $\mathbb{E}_x$: espérance sous $\mathbb{P}_x$;
- $\Pi(E)$: ensemble des probabilités sur E.

Lemme

$$\Pi(E) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^E, \quad \mu(x) \geq 0, \sum_{x \in E} \mu(x) = 1 \right\}.$$

Plan

États récurrents et transitoires.

Temps de retour : $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$.

Définition

L'état $x \in E$ est récurrent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$, et est transitoire si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1$.

Nombre de retours : $N_x = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_n = x}$.

Proposition

1. *Si x est récurrent, $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.*
2. *Si x est transitoire,*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1 - \Pi_x)\Pi_x^k,\ \textit{pour } k \geq 0,$$

avec $\Pi_x = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$.

ÉTATS RÉCURRENTS ET TRANSITOIRES.

NOMBRE DE RETOURS : $N_x = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_n = x}$.

PROPOSITION

1. *Si x est récurrent,* $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.
2. *Si x est transitoire,*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1 - \Pi_x)\Pi_x^k, \ \textit{pour } k \geq 0,$$

avec $\Pi_x = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$.

COROLLAIRE

L'état $x \in E$ est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (P^n)(x, x) = +\infty.$$

Classe d'équivalence.

Définition

- *L'état $y \in E$ est accessible à partir de $x \in E$ (noté $x \to y$) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$.*
- *Les états x et y communiquent (noté $x \leftrightarrow y$) si $x \to y$ et $y \to x$.*

Classes d'équivalence : $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence qui crée une partition de E en classes d'équivalence modulo $\leftrightarrow$.

Théorème

Soit $C \subset E$ une classe d'équivalence modulo $\leftrightarrow$. Alors tous les états de C sont soit récurrents, soit transitoires.

Classes fermées.

Définition

Une classe $C \subset E$ est dite fermée si pour tous x et y dans E :

$$x \in C \text{ et } x \to y \Rightarrow y \in C.$$

Proposition

La restriction de la chaîne de Markov à une classe fermée C est une chaîne de Markov d'espace d'états C.

Si $C = \{x_0\}$ est fermée, on dit que x_0 est un état absorbant.

Théorème

- Toute classe récurrente est fermée.
- Toute classe fermée et finie est récurrente.

IRRÉDUCTIBILITÉ.

DÉFINITION

Une chaîne de Markov (ν, P) est

- *irréductible si E est constitué d'une seule classe d'équivalence ;*
- *irréductible récurrente si elle est irréductible et si tous les états sont récurrents.*
- *irréductible transiente si elle est irréductible et si tous les états sont transitoires.*

PROPOSITION

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace E **fini** *est irréductible récurrente.*

IRRÉDUCTIBILITÉ.

DÉFINITION

Une chaîne de Markov (ν, P) *est* *irréductible* *si, pour tout couple* $(x, y) \in E^2$*, il existe*

- *un entier* $k = k(x, y)$
- *et une suite finie* $x = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = y$

tels que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ *pour* $i = 0, \ldots, k-1$.

C'est-à-dire : $\mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = P^k(x, y) > 0$.

THÉORÈME

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible,

1. les fonctions P-invariantes (i.e. $Pf = f$) sont les fonctions constantes.
2. P admet au plus une probabilité invariante π. De plus $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

1. $x \not\to x$: x transitoire.

2. Les états x t.q. $x \to x$ peuvent être classés en classes d'équivalence irréductibles par la relation $\leftrightarrow$:
   - classes irréductibles non fermées : transitoires ;
   - classes irréductibles fermées : récurrentes ou transitoires.

3. À partir d'un état récurrent,
   - la chaîne restreinte à la classe d'équivalence de cet état est irréductible.
   - Chaque état de cette classe est visité une infinité de fois.

4. À partir d'un état transitoire,
   - soit la chaîne finit par atteindre une des classes récurrentes ;
   - soit elle part à l'infini après être passée un nombre fini de fois par les états de la classe transitoire.

PLAN

DANS CE PARAGRAPHE,

- E : espace fini de cardinal d, donc en bijection avec $\{1, \dots, d\}$;
- P : matrice de transition de taille $d \times d$;
- $\Pi(E)$: ensemble des probabilités sur E.

THÉORÈME

L'ensemble des probabilités invariantes pour P est un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\Pi(E)$.

REMARQUE

Pas d'unicité en général !

Théorème ergodique.

Théorème

Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible de probabilité invariante π. Alors

1. presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{X_k=x}=\pi(x).$$

2. Pour tout $x\in E$,

$$\pi(x)=\frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}>0,$$

avec $T_x=\inf\{k\geq 1,\ X_k=x\}$ instant de premier retour en x.

Corollaire

Si la chaîne est irréductible, alors elle visite infiniment souvent tous les points de l'espace d'états E.

PROPOSITION

Supposons la chaîne irréductible de probabilité invariante π. Alors pour toute probabilité ν sur E,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \nu P^k = \pi, \text{ ou encore } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_\nu(X_k = x) = \pi(x).$$

DÉFINITION

Une chaîne de Markov (ν, P) est fortement irréductible s'il existe un entier k tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad P^k(x, y) > 0.$$

Chaîne fortement irréductible.

Théorème

Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fortement irréductible de probabilité invariante π. Soit k l'entier de la définition précédente et

$$\alpha = \alpha(P) = \sum_{y\in E} \left\{ \inf_{x\in E} P^k(x,y) \right\} > 0.$$

Alors pour toute probabilité ν sur E et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{A\subset E} |\mathbb{P}_\nu(X_n \in A) - \pi(A)| \leq (1-\alpha)^{[n/k]},$$

avec $[a]$ la partie entière de a. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \nu P^n = \pi$.

Apériodicité (1).

Définition

Soit $x \in E$ et $R(x) = \{n \in \mathbb{N}^*, \; P^n(x,x) > 0\}$. La période $p(x)$ de x est le plus grand commun diviseur de $R(x)$.

Proposition

Supposons la chaîne irréductible. Alors tous les points de E ont la même période.

Définition

Cette période commune est la période de la chaîne ; chaîne qui est apériodique si cette période vaut 1.

Corollaire

Supposons P irréductible. S'il existe $x \in E$ tel que $P(x,x) > 0$, alors P est apériodique.

APÉRIODICITÉ (2).

DÉFINITION

Un état est apériodique s'il existe un entier N tel que $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq N$.

THÉORÈME

1. Si une chaîne est irréductible et apériodique, tous les états sont apériodiques. Et alors la chaîne est fortement irréductible.
2. Réciproquement une chaîne fortement irréductible est irréductible et apériodique.

PLAN

ATTENTION :

A partir d'ici, E n'est plus supposé fini.

DÉFINITION

Une mesure π est strictement positive si $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

THÉORÈME

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P, irréductible récurrente. Alors il existe une mesure π strictement positive invariante, unique à constante multiplicative près.

- x récurrent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$.
- $m(x) = \mathbb{E}_x(T_x)$.

DÉFINITION

Un état x est récurrent positif si $m(x) < +\infty$, et récurrent nul sinon.

THÉORÈME

Supposons la chaîne irréductible.

- Un état x est récurrent positif,
- si et seulement si tous les états sont récurrents positifs,
- si et seulement s'il existe une unique probabilité invariante.

Dans ce cas elle est donnée par $\pi = (\pi(x) = 1/m(x),\ x \in E)$.

Dichotomie.

Pour une chaîne irréductible et récurrente

- soit elle est récurrente positive s'il existe une probabilité invariante,
- soit elle est récurrente nulle si toute mesure invariante est de masse totale infinie, i.e. $\displaystyle\sum_{x \in E} \pi_x = +\infty$.

Conséquence : si E est fini, il n'existe pas d'état récurrent nul, tout état récurrent est récurrent positif.

Corollaire

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive. Pour $x \in E$, $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$. Alors pour tout $y \in E$,

$$\mathbb{E}_y(T_x) < +\infty.$$

Théorème ergodique.

Généralisation de la loi des grands nombres :

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne irréductible et récurrente positive. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x\in E} \pi(x) f(x) \right) = 1.$$

$\pi = (\pi(x),\ x \in E)$ est l'unique probabilité invariante.

Théorème central limite.

Théorème

Soient

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chaîne irréductible de matrice de transition P,
- π l'unique probablité invariante,
- $f : E \to \mathbb{R}$ avec $\pi f = \sum_{x \in \mathbb{E}} \pi_x f_x = 0$.

Alors il existe $\sigma_f \geq 0$ tel que la suite $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ converge en loi vers $\sigma_f Z$, avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

CALCUL DE σ_f : pour $i \in E$,

$$(Qf)_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x(f(X_n)).$$

Alors $(I - P)Qf = f$ et

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \sum_{x \in E} \pi_x((Qf)_x)^2 - \sum_{x \in E} \pi_x (PQf)_x^2 \\ &= 2 \sum_{x \in E} \pi_x (Qf)_x f_x - \sum_{x \in E} \pi_x f_x^2.\end{aligned}$$

PLAN

Apériodicité.

Définition

Un état x est apériodique s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(P^n)(x,x) > 0$ pour tout $n \geq N$.

Lemme

Si P est irréductible et s'il existe un état apériodique x, alors pour tout $(y,z) \in E^2$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $(P^n)(y,z) > 0$ pour $n \geq M$. En particulier tous les états sont apériodiques.

Théorème

Soient P une matrice irréductible, récurrente positive et apériodique et π l'unique probabilité invariante. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov (ν, P). Alors pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi_x \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (\nu P^n)_x = \pi_x.$$

Vitesse de convergence.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lim_{n \to +\infty} (P^n)(x, y) = \pi_y$.

Condition de Doeblin : il existe une mesure non nulle μ sur E et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \; (P^{n_0})(x, y) \geq \mu_y.$$

Notation : $\beta = \sum_{x \in E} \mu_x$.

- Si E est fini :

Lemme

Soit P irréductible et apériodique. La condition de Doeblin est satisfaite.

- Quand E est infini, en général pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in E$, $\inf_{x \in E} (P^n)(x, y) = 0$.

THÉORÈME

Supposons P irréductible et vérifiant la condition de Doeblin. Alors P est récurrente positive et apériodique, et si π désigne sa probabilité invariante, pour tout $i \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{y \in E} |(P^n)(x,y) - \pi_y| \leq 2(1-\beta)^{[n/n_0]}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Plan

Partition de E.

Ici la chaîne peut être périodique ou transiente ou récurrente nulle.

Théorème

Soit P irréductible. Il existe un entier $d \geq 1$ et une partition

$$E = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{d-1}$$

tels que (en posant $C_{nd+r} = C_r$) :

- $P^n_{xy} > 0$ seulement si $x \in C_r$ et $y \in C_{r+n}$ pour un certain r ;
- $P^{(nd)}_{xy} > 0$ pour tout n suffisamment grand, et tout x et y dans C_r pour tout r.

Définition

L'entier d s'appelle la période. Pour tout $x \in E$, d est le plus grand diviseur commun de l'ensemble $\{n \geq 0,\ P^n_{xx} > 0\}$.

THÉORÈME

Soit P irréductible de période d et $E = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{d-1}$ la partition du théorème précédent. Soit ν une probabilité sur E t.q. $\sum_{x \in C_0} \nu(x) = 1$.

Soit X la chaîne de Markov (ν, P). Alors pour $r = 0, 1, \ldots, d-1$ et pour $y \in C_r$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{m_y},$$

où m_y est le temps de retour moyen en y. En particulier pour $x \in C_0$ et $y \in C_r$, on a

$$P_{xy}^{(nd+r)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{m_y}.$$