ENSAI, 3A, GDRIF

Semestre 1

Calcul stochastique,

applications en finance.

Alexandre POPIER

Année : 2016-2017

Table des matières

Introduction

Le calcul stochastique a pris une place primordiale dans la finance de marché depuis le milieu des années 1970. Le besoin de modélisation pour gérer au mieux les risques, pour automatiser les tâches, bref pour « industrialiser » une activité au départ très artisanale, a trouvé des moyens de calculs très sophistiqués dans la théorie développée à partir des années 1930 par Kolmogorov, Itô et bien d'autres mathématiciens. De plus la finance a poussé les mathématiciens à développer certaines de leurs théories, pour le meilleur mais aussi pour le pire, quand la croyance en un modèle se confronte à la réalité.

Commençons par rappeler quelques notions clés de la finance. Un marché financier est composé (en simplifiant beaucoup) de titres de base :

- devises,
- opérations de prêt ou d'emprunt avec intérêts,
- actions et indices (S&P 500, CAC 40),
- matières premières.

Ces produits sont cotés, leur prix étant alors fixé suivant la loi de l'offre et de la demande. Sur ces titres, se greffent des produits dérivés. Ils sont créés suite à une demande de transfert des risques et existent depuis longtemps (blé dans l'Antiquité, métaux à Amsterdam au 18ème siècle, etc.). Le prix de ces produits résultait d'un accord entre les parties. Mais ils ont connu un formidable essor grâce à l'existence de marchés organisés (Chicago 1973, Paris 85-87).

Parmi ces nombreux produits, concentrons nous sur la classe des options.

Définition 0.1 *Une* option *est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance.*

C'est donc un contrat disymétrique dont la description précise est la suivante.

- *Nature de l'option* : call pour une option d'achat et put pour une option de vente.
- *Actif* sous-jacent, sur lequel porte l'option : une action, une obligation, une devise, etc.
- *Montant* : quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.
- *Échéance* ou date d'expiration ou maturité, qui limite la durée de vie de l'option.
- *Date d'exercice* : option américaine (exercice à n'importe quelle date précédant l'échéance), option européenne (exercice à terme).
- Prix d'exercice ou strike, qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

Sur les marchés organisés, les options sont parfois cotées. En général avec les règles suivantes :

— 3 échéances cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois (sur les mois de mars, juin, septembre, décembre).
— Au moins 3 prix d'exercice avec écart standard entre eux et proches des cours de l'action.
— Valeur intrinsèque : différence positive ou nulle entre le cours côté du titre support et le prix d'exercice.
— Valeur temps : différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque.

Parmi ces cotations d'options, les plus liquides sont celles dites à la monnaie (prix d'exercice proche de la valeur du cours). On dit qu'une option est dans la monnaie si sa valeur intrinsèque est positive ; elle est en dehors de la monnaie sinon.

Le problème de tout produit dérivé, et donc en particulier d'une option, est d'en fixer le prix (on parle aussi de prime). Si l'option est cotée sur un marché, la prime est donnée par le marché. Mais en l'absence de cotation, comment calculer la prime ? Et même pour une option cotée, disposer d'une formule ou d'un modèle pour calculer le prix peut permettre de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

Prenons l'exemple du call européen d'échéance T, de strike K, sur une action (stock en anglais) de prix S_t à l'instant t.

— Si $S_T \leq K$, le détenteur de l'option n'exerce pas.
— Si $S_T > K$, il exerce, achète au prix K et revend immédiatement l'action au prix S_T : il gagne donc $S_T - K$.
— Donc la valeur à échéance de l'option (ou payoff en anglais) est : $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.

Il y a alors deux problèmes à résoudre pour le vendeur de l'option.

— Pricing ou valorisation : comment évaluer à $t = 0$ une richesse $(S_T - K)^+$ disponible en T ?
— Hedging ou couverture : comment reproduire à partir de la prime, la richesse $(S_T - K)^+$ à la date T ?

Pour pouvoir surmonter ces problèmes, quelques hypothèses sont nécessaires.

Définition 0.2 (Marché sans friction) *Un marché financier est dit* sans friction *si*

— *il n'y a pas de coûts de transaction ;*
— *il n'y a pas d'impôts ou taxes (sur les transactions ou les plus values) ;*
— *il n'y a pas d'écart entre prix d'achat et prix de vente des titres (fourchette de prix nulle) ;*
— *les transactions sont instantanées ;*
— *les titres négociables sont très liquides et indéfiniment fractionnables ;*
— *il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert ;*
— *les participants du marché sont preneurs de prix (ils n'influencent pas les prix par leurs achats et ventes).*

En pratique ces conditions ne sont pas vérifiées, mais elles simplifient considérablement la théorie. L'hypothèse qui suit est fondamentale.

Loi fondamentale de la finance de marché. *Dans un marché sans friction, il n'y a pas d'*opportunité d'arbitrage *s'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à* *partir d'un investissement nul. On parle d'AOA pour absence d'opportunité d'arbitrage.*

Ainsi quand on propose un modèle de marché il faut impérativement tenir compte de cette loi ! De l'hypothèse de non arbitrage on tire les propriétés suivantes.

— Si $C_t = C_t(T, K)$ est le prix du call à l'instant t, $0 \leq C_t \leq S_t$.

— Si $P_t(T, K)$ est le prix du put, et si on peut emprunter ou placer de l'argent au taux constant r, alors on obtient la relation de parité call-put :

$$C_t(T, K) - P_t(T, K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Preuve. En exercice. □

Les options call et put sont dites vanille ou standard. Mais il en existe plein d'autres, dites exotiques.

— *Binaires :* paye un nominal connu à son détenteur si le cours dépasse (est inférieur à) un prix d'exercice fixé et rien sinon.

— *Asiatiques :* options standard, mais dont le support est la moyenne des cours sur une période donnée. Créées pour éviter les manipulations de cours du sous-jacent près de l'échéance.

— *Lookback :* le sous-jacent est le maximum ou le minimum du cours sur une période incluant l'échéance. Flux payé : différence entre le cours et le max (ou le min). Options chères car elles ont toujours de la valeur.

— *Barrières :* Call ou put standard mais dont l'exercice n'est autorisé que si le titre support a franchi un niveau fixé appelé barrière.

— *Quantos :* Call ou put sur des titres d'un marché étranger mais payées en monnaie domestique.

L'essor des mathématiques financières a commencé quand Black et Scholes ont développé leur théorie du pricing. Elle repose sur la gestion de portefeuille.

— Suivre le prix de marché de l'actif S_t (action, taux, commodité, etc.).

— Gérer un portefeuille (autofinançant) de valeur V_t de la valeur initiale la prime π_0.

— Surveiller le P&L (profit and loss) final : $V_T - h(S_T)$ (on parle aussi de tracking error), où $h(S_T)$ valeur (ou payoff) à la maturité T du contrat.

— Trouver π_0^* qui minimise le P&L (optimisation de portefeuille).

Si on trouve un π_0^* tel que le P&L final est nul, alors en absence d'opportunité d'arbitrage, à toute date intermédiaire, le prix du produit est égal à la valeur du portefeuille de couverture construit à partir de π_0^*. Autrement dit, le prix d'un produit dérivé est donné par la valeur de son portefeuille de couverture. Et c'est notamment pour déterminer cette couverture du produit qu'on a besoin de mathématiques et de calcul stochastique.

En finance (mais pas seulement !), on distingue deux types de modèles : ceux pour lesquels les fonctions aléatoires dépendent continument du temps et ceux dits à sauts, c'est-à-dire des modèles dans lesquels les processus considérés ne sont pas continus ! Les modèles avec trajectoires continues ont une place prépondérante en finance, ainsi ils doivent être compris parfaitement avant de se lancer sur des généralisations. Néanmoins pointons ici quelques inconvénients des modèles continus.

— **Modèle de Black-Scholes.** Le plus utilisé, LA référence. Parmi ses inconvénients, citons l'invariance d'échelle du mouvement brownien. Celle-ci implique que le trading journalier, mensuel ou à la seconde est à peu près le même !

— **Modèle à volatilité locale.** Extensions naturelles du modèle de Black-Scholes. Pour cette classe de modèles, une couverture parfaite est possible, ce qui est faux en pratique.

— **Modèle à volatilité stochastique.** La couverture parfaite en delta n'est plus possible. Mais ils ne peuvent pas gérer des queues de distribution dites lourdes, ce qui est un problème pour la gestion des risques, et de grands mouvements soudains sont exclus. Ces deux phénomènes apparaissent en pratique pour des options de maturité courte.

De plus il existe des domaines de la finance où les sauts sont une « nécessité ».

— **Risque de crédit.** La principale difficulté est de calculer la probabilité de défaut, c'est-à-dire la probabilité que le temps de défaut d'une entreprise est lieu après un instant t : $\mathbb{P}(\tau > t)$. Classiquement il y a deux approches. Un modèle dit réduit donne directement la loi de τ, tandis qu'un modèle structurel présente τ comme un temps de passage :

$$\tau = \inf\{t \geq 0,\ X_t < H\},$$

où X est un processus stochastique modélisant par exemple le prix de l'action de la compagnie et H est une barrière. Si X n'a pas de saut, τ est un temps d'arrêt *prévisible*. En pratique, les temps de défaut ne le sont pas (Enron, Novembre 2001, par exemple).

— **Trading haute-fréquence.** Lors de trading intra-minute, les traders doivent tenir compte du « tick », le mouvement minimum d'un prix quelqu'il soit. Donc le processus des prix devient totalement discontinu ! À des échelles de temps plus grandes, ces petits sauts « s'aggrègent », et ne sont pas vus. Les modèles continus interviennent alors.

— **Actuariat.** En 1903 Lundberg propose de modéliser le revenu d'une compagnie d'assurance par un processus X défini par :

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i. \tag{1}$$

Ici la compagnie collecte les primes à taux fixé c de ses clients, x est le capital initial, N est les temps d'arrivés des sinistres, ce qui fait sauter le revenu à la baisse. Les montants des sinistres ξ_j sont i.i.d. X est un processus de Poisson composé avec dérive c. Les principales quantités à calculer sont la distribution du temps de ruine et le déficit lors de la ruine :

$$\tau_0 = \inf\{t > 0,\ X_t < 0\}, \qquad X_{\tau_0} \text{ on } \{\tau_0 < +\infty\}.$$

Ce modèle a été très étudié et généralisé à des processus de Lévy généraux avec sauts négatifs.

Plan du cours et commentaires.

Le premier chapitre sera consacré à des généralités sur les processus (fonctions du temps aléatoires), et à des exemples importants : le mouvement brownien et le processus de Poisson composé. Ce sont des processus centraux jouant le même rôle que la loi gaussienne en probabilité par exemple. Le chapitre 2 sera celui du calcul stochastique : intégration par rapport ùn processus, formule d'Itô. Le chapitre 3 permettra de traiter les équations différentielles stochastiques, extension des équations différentielles de premier cycle, et les changements de probabilité. Tout cela sera intensivement utilisé au chapitre 4 sur le pricing des actifs dérivés.

À noter que des parties du cours (tout ce qui concerne les processus à sauts) seront en anglais. Cela permettra aux étudiants souhaitant travailler à l'étranger de se familiariser avec les termes.

Enfin si des erreurs se sont glissées dans ce polycopié, n'hésitez pas à me les signaler (apopier@univ-lemans.fr).

Chapitre 1

Processus : généralités et exemples fondamentaux

Avant d'entrer dans le vif du sujet, voici un bref historique de quelques travaux fondateurs du calcul stochastique.

— **Robert Brown**, botaniste (1827) : description du mouvement de particules organiques dans un gaz ou un fluide.
— **Louis Bachelier** (1900) : modélisation du prix des actions. Thèse redécouverte dans les années 1960.
— **Albert Einstein** (1905) : modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse.
— **Nobert Wiener** (1923) : construction rigoureuse du mouvement brownien. Continuité des trajectoires.
— **Paul Lévy** (années 30-40) : propriétés du mouvement brownien.
— **Kiyosi Itô** (1948) : équations différentielles stochastiques.
— ...

1.1 Premières notions sur les processus stochastiques

Commençons par quelques notions générales.

Définition 1.1 *Un* processus stochastique *est une collection de variables aléatoires (v.a. en abrégé)*

$$X = \{X_t,\ 0 \leq t < +\infty\} = (X_t)_{t\geq 0}$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, espace de probabilité, à valeurs dans* $(S, \mathcal{S})$*, appelé* espace d'états*. Dans ce cours,* $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$*.*

La fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ *est une* trajectoire *(ou réalisation) du processus* X *associée à* ω*. Un processus* X *est*

— continu *si presque toutes ses trajectoires sont continues de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *;*
— continu à droite avec limite à gauche *(càdlàg) si presque toutes ses trajectoires sont continues à droite avec limite à gauche en tout point.*

Notations. Pour tout temps $t \geq 0$ et X processus, on note

— Limite à gauche en t :

$$X_{t^-} = \lim_{s\to t,\ s<t} X_s.$$

— Limite à droite en t :

$$X_{t^+} = \lim_{s\to t,\ s>t} X_s.$$

— Sauts de X à l'instant t :

$$\Delta X_t = X_{t^+} - X_{t^-}.$$

Un processus est càdlàg si pour tout t, $X_{t^+} = X_t$ et $X_{t^-} \in \mathbb{R}^d$. Dans ce cas $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$. Il est continu si pour tout t, $\Delta X_t = 0$.

Définition 1.2 (Égalité ?) *Pour deux processus stochastiques X et Y,*

— *X et Y* sont identiques *si : $\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)$;*

— *Y est une* modification *de X si : $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$;*

— *X et Y ont* les mêmes distributions fini-dimensionnelles *si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})$*

$$\mathbb{P}\left[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\right] = \mathbb{P}\left[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A\right];$$

— *X et Y sont* indistingables *si presque toutes les trajectoires coïncident :*

$$\mathbb{P}\left[X_t = Y_t,\ \forall 0 \leq t < \infty\right] = 1.$$

Définition 1.3 (Égalité ?) *Soient X et Y deux processus stochastiques définis des espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, et ayant le même espace d'états $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*

X et Y ont les mêmes distributions fini-dimensionnelles *si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})$*

$$\mathbb{P}\left[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\right] = \tilde{\mathbb{P}}\left[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A\right].$$

Définition 1.4 (Mesurabilité) *Un processus stochastique X est* mesurable *si pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble $\{(t,\omega); X_t(\omega) \in A\}$ appartient à la tribu produit $\mathcal{B}([0,+\infty[) \otimes \mathcal{F}$; l'application*

$$\begin{array}{rcl} ([0,+\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,+\infty[) \otimes \mathcal{F}) & \to & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est mesurable.

À noter. Sauf indication du contraire, dans la suite, *tous les processus seront toujours supposés mesurables.*

1.1.1 Filtration et adaptation

C'est une notion fondamentale aussi bien d'un point de vue théorique qu'en pratique en finance.

Définition 1.5 (Filtration) *Une* filtration *est une famille croissante* $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t < +\infty\}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour* $0 \leq s < t < +\infty$.

On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

L'exemple standard est la filtration engendrée par un processus X : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t)$. Financièrement $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible sur le marché à l'instant t. Dire que c'est une filtration revient à faire l'hypothèse que le marché conserve à l'instant t en mémoire tout le passé.

Définition 1.6 *On définit*

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right), \quad \mathcal{F}_{0^-} = \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Une filtration est continue à droite (resp. à gauche) *si :* $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *(resp.* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$*).*

La continuité à droite de la filtration peut être interprété comme une non-anticipation de l'information.

Définition 1.7 (Adaptation) *Un processus stochastique* X *est*

- adapté *à la filtration* $\{\mathcal{F}_f\}$ *si :* $\forall t \geq 0$, X_t *est une v.a.* $\mathcal{F}_t$*-mesurable ;*
- progressivement mesurable *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_f\}$ *si pour tout* $t \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \to & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est mesurable.

Imposer aux processus d'être adapté à la filtration engendrée par les prix, permet d'éviter le délit d'initié.

Proposition 1.1

- *Si un processus* X *est mesurable et adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$*, alors il admet une modification progressivement mesurable.*
- *Si un processus* X *est adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *et si les trajectoires sont continues à droite, alors il est progressivement mesurable.*

Preuve. Le premier résultat est admis. Pour le second, pour $t > 0$, $n \geq 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ et $0 \leq s \leq t$, on pose

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{(k+1)t/2^n}(\omega), \quad \text{pour} \quad \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{k+1}{2^n} t,$$

avec $X_0^{(n)}(\omega) = X_0(\omega)$. L'application $(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est clairement $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-mesurable. Par continuité à droite, on a aussi : $\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$ pour tout $(s,\omega) \in [0,t]\times\Omega$. Donc l'application limite $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ est aussi $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$- mesurable. □

Définition 1.8 (Filtration standard) *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfait les* conditions usuelles *si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.*

Définition 1.9 (Filtration augmentée) *Pour un processus $X = \{X_t;\ t \geq 0\}$, on définit*

$$\mathcal{N}_t = \{F \subset \Omega,\ \exists G \in \mathcal{F}_t^X \text{ s.t. } F \subset G,\ \mathbb{P}(G) = 0\}$$

et $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}$ l'ensemble des événements $\mathbb{P}$-négligeables.

Pour tout $0 \leq t \leq \infty$, on définit l'augmentation *: $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N})$.*

1.1.2 Temps d'arrêt

Définition 1.10 (Temps d'arrêt) *Sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, un* temps d'arrêt *est une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $[0,+\infty]$ telle que*

$$\forall t \geq 0,\ \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Proposition 1.2 *Si la filtration est continue à droite, alors T est un temps d'arrêt si et seulement si : $\forall t \geq 0,\ \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Preuve. Si T est un temps d'arrêt, alors

$$\{T < t\} \subset \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Réciproquement, soit $t \geq 0$. Alors

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{T < t+\varepsilon\} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \in \mathcal{F}_{t^+}.$$

Si la filtration est continue à droite, alors $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ et le résultat suit. □

Lemme 1.1 *Si T et S sont deux temps d'arrêt, alors $T\wedge S$, $T\vee S$, $T+S$ le sont aussi.*

Preuve. En exercice. □

Définition 1.11 (Événements antérieurs à un temps d'arrêt) *Soit T un temps d'arrêt pour la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. La σ-algèbre $\mathcal{F}_T$ des événements antérieurs au temps T est constituée des ensembles $A \in \mathcal{F}$ pour lesquels*

$$\forall t \geq 0, \quad A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Lemme 1.2 *Pour deux temps d'arrêt T et S, pour tout $A \in \mathcal{F}_S$ on a $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. En particulier si $S \leq T$ sur Ω, alors $\mathcal{F}_S \leq \mathcal{F}_T$.*

Soit T et S des temps d'arrêt. Alors $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ et chacun des ensembles

$$\{T < S\},\ \{S < T\},\ \{T \leq S\},\ \{S \leq T\},\ \{S = T\}$$

appartient à $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

Preuve. Elle consiste à vérifier les définitions. Ainsi pour $t \geq 0$,

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} \subset A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car $A \in \mathcal{F}_S$. Donc $A \cap \{S \leq T\}$ est dans $\mathcal{F}_T$.

On laisse le lecteur vérifier la suite. □

Proposition 1.3 *Si le processus X a des trajectoires càdlàg et est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, filtration qui satisfait les conditions standard, alors il existe une suite $\{T_n\}_{n\geq 1}$ de temps d'arrêt pour $\{\mathcal{F}_t\}$ qui sont les temps de sauts de X, i.e.*

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega,\ X_t(\omega) \neq X_{t^-}(\omega)\} \subset \bigcup_{n\geq 1} \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega,\ T_n(\omega) = t)\}.$$

Preuve. Admise. □

Soit T, S des temps d'arrêt et Z una v.a. intégrable.

1. $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_T) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{S\wedge T})$, $\mathbb{P}$-p.s. sur $\{T \leq S\}$;
2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{S\wedge T})$, $\mathbb{P}$-p.s.

Si X est un processus, on définit la fonction X_T sur $\{T < \infty\}$ par

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

Proposition 1.4 *Soit X un processus progressivement mesurable, et soit T un temps d'arrêt. Alors la v.a. X_T, définie sur $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$, est $\mathcal{F}_T$-mesurable et le « processus arrêté » $\{X_{T\wedge t},\ t \geq 0\}$ est progressivement mesurable.*

Preuve. En effet pour $t \geq 0$, et B ensemble borélien de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega,\ X_{T(\omega)}(\omega) \in B,\ T(\omega) \leq t\}$$

est dans $\mathcal{F}_t$, car on compose les applications mesurables

$$\begin{array}{rcl} ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \to & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

et T, sachant que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. □

1.2 Lévy, Poisson and compound Poisson processes

Let us begin with a wide class of processes, commonly used in finance.

Definition 1.1 (Lévy process) *A stochastic process $(X_t)_{t\geq 0}$ defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, with values in $\mathbb{R}^d$, is a* Lévy process *if*

1. $X_0 = 0$ *a.s.*
2. *its increments are* independent *: for every increasing sequence $t_0, \dots, t_n$, the random variables $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent ;*
3. *its increments are* stationnary *: the law of $X_{t+h} - X_t$ does not depend on t ;*
4. *X satisfies the property called* stochastic continuity *: for any $\varepsilon > 0$,*
$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0;$$
5. *there exists a subset Ω_0 s.t. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ and for every $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$* is RCLL.

RCLL means right continuous with left limits. The fourth condition excludes processes with deterministic jump times. For a fixed t, the probability to have a jump is zero.

Assume that we work on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with a filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definition 1.2 (Lévy process) *X is a Lévy process if X is adapted to the given filtration and*

1. $X_0 = 0$ *a.s.*
2. *its increments are* independent*, that is for any $s \leq t$, $X_t - X_s$ is independent of $\mathcal{F}_s$.*
3. *its increments are* stationnary *: the law of $X_{t+h} - X_t$ does not depend on t ;*
4. *X satisfies the property called* stochastic continuity *: for any $\varepsilon > 0$,*
$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0;$$
5. *there exists a subset Ω_0 s.t. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ and for every $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$* is RCLL.

In this definition , the filtration is a part of the definition of the Lévy process.

Remarks :

— If the filtration is generated by X, the two definitions are equivalent.
— If $\{\mathcal{F}_t\}$ is a larger filtration than $(\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t)$ and if $X_t - X_s$ is independent of $\mathcal{F}_s$, then $\{X_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ is a Lévy process under the large filtration.
— If we remove Assumption 5, we speak about Lévy process in law.
— If we remove Assumption 3, we obtain an additive process.
— Dropping Assumptions 3 and 5, we have an additive process in law.
— We can also prove that 2, 3 and 5 imply 4.

Theorem 1.1 *A Lévy process (or an additive process) in law has a RCLL modification (if the filtration satisfies the usual conditions).*

Proof. Admitted. □

Theorem 1.2 *Let $X = \{X_t;\ t \geq 0\}$ be a Lévy process. Then*

- *the augmented filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ is right-continuous.*
- *With respect to the enlarged filtration, $\{X_t,\ t \geq 0\}$ is still a Lévy process.*

Proof. The first property is in fact true for any strongly Markovian process. And if the process is left-continuous, then the filtration is continuous.

For the second, we check that all properties of a Lévy process remain true. □

Remember that the law of a random variable (r.v. in short) is characterized by its characteristic function.

Proposition 1.1 *Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a Lévy process in $\mathbb{R}^d$. Then there exists a function $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ called* characteristic exponent *of X such that :*

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}\left(e^{i\langle z, X_t\rangle}\right) = e^{t\psi(z)}.} \tag{1.1}$$

Proof. Recall that if $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a right-continuous function such that for every x and y, $f(x+y) = f(x)f(y)$, then there exists $\alpha \in \mathbb{R}$ such that for every $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(\alpha x)$. □

1.2.1 Poisson process

The first classical Lévy process is the Poisson process.

Definition 1.3 *A stochastic process $(X_t)_{t\geq 0}$, with values in $\mathbb{R}$, is a* Poisson process *with intensity $\lambda > 0$ if it is a Lévy process s.t. for every $t > 0$, X_t has a Poisson law with parameter λt.*

It means that for each $t > 0$, for every $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t).$$

So in fact X is a process with values in $\mathbb{N}$.

Proposition 1.2 (Construction) *If $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a random walk on $\mathbb{R}$ s.t. for every $n \geq 1$, $T_n - T_{n-1}$ is exponentially distributed with parameter λ (with $T_0 = 0$), then the process $(X_t)_{t\geq 0}$ defined by*

$$X_t = n \Longleftrightarrow T_n \leq t < T_{n+1}$$

is a Poisson process with intensity λ.

Proof. Let us prove first that X is a Lévy process. By definition $X_0 = 0$ and X is a RCLL process. Moreover for any $\varepsilon > 0$

$$|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ t < T_n \leq t + \varepsilon.$$

But since

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i - T_{i-1}$$

T_n is a sum of n independent exponentially distributed r.v. Therefore T_n is Gamma distributed, i.e. has the density

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Hence

$$\mathbb{P}(t < T_n \leq t + \varepsilon) = \int_t^{t+\varepsilon} f(x) dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0.$$

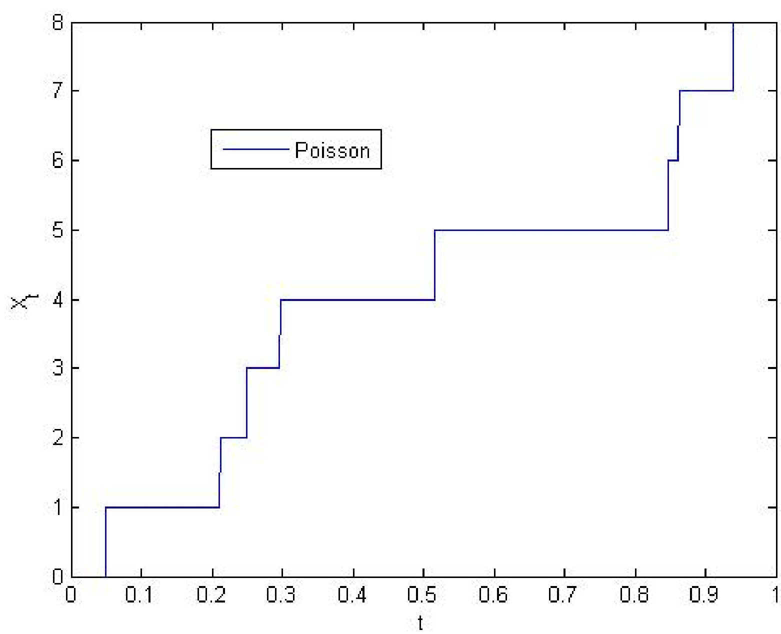
We will prove the stationnary and the independence of the increments below.

Now for $t > 0$ and $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) = \mathbb{P}(T_n \leq t < (T_{n+1} - T_n) + T_n) \\
&= \mathbb{P}(T_n \leq t,\ T_{n+1} - T_n > t - T_n) \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \left(\int_{t-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)} dx \\
&= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Finally X is a Poisson process. □

Here is a typical trajectory of a Poisson process. It is a pure jump process !



Definition 1.4 (Pure jump process) *A* pure jump process *is a process with*

— *piecewise constant trajectories,*
— *and a finite number of jumps on every finite time interval.*

The jump distribution of a Poisson process can be completely described. If we denote by T_i the jump times of the process, we have the following result.

Proposition 1.3 *Let $n \geq 1$ and $t > 0$. The conditional law of $T_1, \ldots, T_n$ knowing $X_t = n$ coincides with the law of the order statistics $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ of n independent variables, uniformly distributed on $[0, t]$.*

Proof. Let B a Borelian subset of $\mathbb{R}^n$. Then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}) \in B) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\left((U_{\sigma(1)}, \ldots, U_{\sigma(n)}) \in B,\ U_{\sigma(1)} < \ldots < U_{\sigma(n)}\right) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int \mathbf{1}_{u_{\sigma(1)} < \ldots < u_{\sigma(n)}} \mathbf{1}_B(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) \frac{1}{t^n} du_1 \ldots du_n \\
&\quad = \frac{n!}{t^n} \int \mathbf{1}_{u_1 < \ldots < u_n} \mathbf{1}_B(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n.
\end{aligned}$$

Now $(T_1, \ldots, T_n, T_{n+1})$ has for density $\lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}}$. Hence for any Borelian B :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((T_1, \ldots, T_n) \in B,\ N_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}((T_1, \ldots, T_n) \in B,\ T_n \leq t < T_{n+1}) \\
&\quad = \int \int \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}} \mathbf{1}_B(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_{n+1} \\
&\quad = \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{[0,t]^n} \mathbf{1}_B(t_1, \ldots, t_n) \mathbf{1}_{0 < t_1 < \ldots < t_n} dt_1 \ldots dt_n
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((T_1, \ldots, T_n) \in B | N_t = n) &= \frac{\mathbb{P}((T_1, \ldots, T_n) \in B,\ N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
&= \frac{n!}{t^n} \int \mathbf{1}_{t_1 < \ldots < t_n} \mathbf{1}_B(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n,
\end{aligned}$$

which achieves the proof. □

This last proposition will be very useful to simulate Poisson process. For any interval I, we denote by $N(I)$ the number of jumps of X_t, $t \in I$.

Proposition 1.4 *For $0 < s < t$ and $n \geq 1$, the conditional law of X_s knowing $X_t = n$ is binomial with parameters n and s/t.*

For $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t$ and $I_j =]t_{j-1}, t_j]$, the conditional law of $(N(I_1), \ldots, N(I_k))$ knowing $X_t = n$ is multinomial with parameters n, $(t_1 - t_0)/t, \ldots, (t_k - t_{k-1})/t$.

Proof. Let us denote by $J_{n_1, \ldots, n_k}$ a partition of the set $\{0, 1, \ldots, n\}$ in k subsets $J_1, \ldots, J_k$ of length $n_1, \ldots, n_k$ with $n_1 + \ldots + n_k = n$. Denote by $\mathcal{J}$ the set of all such partitions. Remember that the number of elements of $\mathcal{J}$ is equal to $\dfrac{n!}{n_1!\dots n_k!}$.Then

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(I_1)=n_1,\dots,N(I_k)=n_k|N_t=n) &= \mathbb{P}(\exists J_{n_1,\dots,n_k}\in\mathcal{J},\ \forall i\in J_l,\ t_{l-1}<U_i\le t_l)\\ &= \sum_{J_{n_1,\dots,n_k}\in\mathcal{J}} \mathbb{P}(\forall i\in J_l,\ U_i\in]t_{l-1},t_l])\\ &= \sum_{J_{n_1,\dots,n_k}\in\mathcal{J}} \prod_{l=1}^k \left(\frac{t_l-t_{l-1}}{t}\right)^{n_l}\\ &= \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}\prod_{l=1}^k \left(\frac{t_l-t_{l-1}}{t}\right)^{n_l}.\end{aligned}$$

Now take $k=1$, $t_1=s$ to obtain that $X_s=N([0,s])$ knowing $N_t=n$ is binomial with parameters n and s/t. □

The last proposition allows us to finish the proof of Proposition 1.2. Indeed let $0=t_0<t_1<\dots<t_k$ and $n_1,\dots,n_k$ be non negative integers with $n=\sum n_k$. Then

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1}=n_1,X_{t_2}-X_{t_1}=n_2,\dots,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=n_k)\\ &=\mathbb{P}(X_{t_k}=n)\mathbb{P}(X_{t_1}=n_1,X_{t_2}-X_{t_1}=n_2,\dots,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=n_k|X_{t_k}=n)\\ &=\mathbb{P}(X_{t_k}=n)\mathbb{P}(T_{n_1}\le t_1<T_{n_1+1},\ T_{n_1+n_2}\le t_2<T_{n_1+n_2+1},\dots,T_{n_1+\dots+n_k}\le t_k|X_{t_k}=n)\\ &=\mathbb{P}(X_{t_k}=n)\mathbb{P}(N(I_1)=n_1,\dots N(I_k)=n_k|X_{t_k}=n)\\ &=e^{-\lambda t_k}\frac{(\lambda t_k)^n}{n!}\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}\prod_{l=1}^k\left(\frac{t_l-t_{l-1}}{t}\right)^{n_l}\\ &=\prod_{l=1}^k e^{-\lambda(t_l-t_{l-1})}\frac{(\lambda(t_l-t_{l-1}))^{n_l}}{n_l!}.\end{aligned}$$

Hence we proved that the increments are stationnary and independent.

1.2.2 Compound Poisson processes

The Poisson process is very simple. The jump sizes are always equal to one. Therefore we will complicate a little bit to obtain the compound Poisson process. We consider a Poisson process $(P_t)_{t\ge0}$ with intensity λ and jump times T_n, and a sequence $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of $\mathbb{R}^d$-valued r.v. such that

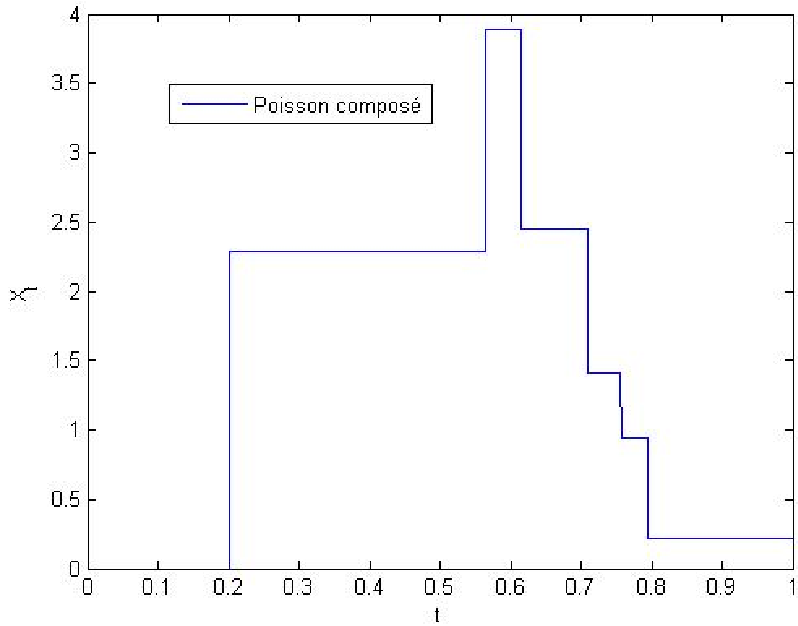
1. Y_n are i.i.d. with distribution measure π ;
2. $(P_t)_{t\ge0}$ and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are independent.

We define

$$\boxed{X_t=\sum_{n=1}^{P_t}Y_n=\sum_{n=1}^{+\infty}Y_n\mathbf{1}_{[0,t]}(T_n).} \tag{1.2}$$

Definition 1.5 *The process $(X_t)_{t\ge0}$ is a* compound Poisson processes *with intensity λ and jump distribution π.*

Let us draw an example. This is a compound Poisson processes with Gaussian jumps used in the Merton model.



Proposition 1.5 *The process $(X_t)_{t\geq 0}$ is a Lévy process, with piecewise constant trajectories and characteristic function :*

$$\boxed{\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}\left(e^{i\langle z, X_t\rangle}\right) &= \exp\left(t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\pi(dx)\right) \\ &= \exp\left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\nu(dx)\right).\end{aligned}} \tag{1.3}$$

Proof. X satisfies all properties of Definition 1.1. Therefore it is a Lévy process. Between two jumps of the Poisson process P, X is constant. Then the trajectories are piecewise constant. Now let us compute the characteristic function.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{i\langle z, X_t\rangle}\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(i\langle z, \sum_{n=1}^{P_t} Y_n\rangle\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{P_t} i\langle z, Y_n\rangle\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{P_t} i\langle z, Y_n\rangle\right) \middle| P_t = k\right) \mathbb{P}(P_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^{k} \exp\left(i\langle z, Y_n\rangle\right)\right) \mathbb{P}(P_t = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{n=1}^{k} \mathbb{E}\exp\left(i\langle z, Y_n\rangle\right) \mathbb{P}(P_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{E}\exp\left(i\langle z, Y_1\rangle\right)\right)^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \exp\left[\lambda t \mathbb{E}\exp\left(i\langle z, Y_1\rangle\right)\right] \\ &= \exp\left[\lambda t \left(\mathbb{E}\exp\left(i\langle z, Y_1\rangle\right) - 1\right)\right].\end{aligned}$$

But $\mathbb{E}\exp\left(i\langle z, Y_1\rangle\right) - 1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\pi(dx)$, and we obtain the result. □

The quantity ν is a finite measure defined on $\mathbb{R}^d$ by

$$\nu(A) = \lambda\pi(A), \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Finite measure means that $\nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

Definition 1.6 *The measure ν is called the* Lévy measure *of X.*

Definition 1.7 *The law μ of X_1 is called* compound Poisson distribution *and has a characteristic function given by :*

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\pi(dx)\right).$$

Now clearly

Lemma 1.1 *If X is a compound Poisson process, then $\mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda t} > 0$.*

So a compound Poisson process can not have a density (w.r.t. the Lebesgue measure).

Proposition 1.6 *Let X be a compound Poisson process and A and B two disjointed subsets of $\mathbb{R}^d$. Then :*

$$Y_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \in A} \quad \textit{and} \quad Z_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \in B}$$

are two independent compound Poisson processes.

Proof. The reader will prove that Y and Z are two compound Poisson processes. Moreover the intensity of Y is $\lambda\pi(A)$ and the jump size distribution of Y is given by the probability π^A defined by :

$$\forall C \subset \mathbb{R}^d, \quad \pi^A(C) = \frac{\pi(C\cap A)}{\pi(A)}.$$

Now

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(iuY_t + ivZ_t) &= \mathbb{E}\exp\left(iu\sum_{s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \in A} + iv\sum_{s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \in B}\right) \\
&= \mathbb{E}\exp\left(\sum_{n=1}^{P_t} Y_n(iu\mathbf{1}_{Y_n\in A} + iv\mathbf{1}_{Y_n\in B})\right) \\
&= \mathbb{E}\exp(iuY_t)\mathbb{E}\exp(ivZ_t).
\end{aligned}$$

The last equality has to be proved properly, but the trick is the same as the method used to compute the characteristic function of a compound Poisson process. $\square$

1.2.3 Moments

In finance we need to compute the moments of the process (think also to statistics theory).

Definition 1.8 *A function on $\mathbb{R}^d$ is under-multiplicative if it is non-negative and if there exists a constant $a > 0$ s.t.*

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2, \ g(x+y) \leq a g(x) g(y).$$

Lemma 1.2

1. *The product of two submultiplicative functions is submultiplicative.*
2. *If g is submultiplicative on $\mathbb{R}^d$, then so is $g(cx+\gamma)^\alpha$ with $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ and $\alpha > 0$.*
3. *Let $0 < \beta \leq 1$. Then the following functions are submultiplicative.*

$$|x| \vee 1 = \max(|x|, 1), \quad |x_j| \vee 1, \ x_j \vee 1, \quad \exp(|x|^\beta), \ \exp(|x_j|^\beta),$$
$$\exp((x_j \vee 0)^\beta), \quad \ln(|x| \vee e), \ \ln(|x_j| \vee e), \ \ln(x_j \vee e),$$
$$\ln\ln(|x| \vee e^e), \ \ln\ln(|x_j| \vee e^e), \ \ln\ln(x_j \vee e^e).$$

   Here x_j is the jth component of x.
4. *If g is submultiplicative and locally bounded, then $g(x) \leq b e^{c|x|}$ for some $b > 0$ and $c > 0$.*

Let X be a compound Poisson process.

Theorem 1.3 (Moments of a jump-diffusion process) *Let g be a under-multiplicative function, locally bounded on $\mathbb{R}^d$. Then there is an equivalence between*
— *there exists $t > 0$ s.t. $\mathbb{E}(g(X_t)) < +\infty$*
— *for any $t > 0$, $\mathbb{E}(g(X_t)) < +\infty$.*
Moreover $\mathbb{E}(g(X_t)) < +\infty$ if and only if $\mathbb{E}(g(Y_1)) < +\infty$.

Hence $\mathbb{E}(|X_t|^n) < \infty$ if and only if $\mathbb{E}(|Y_1|^n) < \infty$. In particular

$$\mathbb{E}(X_t) = t\lambda \mathbb{E}(Y_1), \tag{1.4}$$

and

$$\text{Var } X_t = t\lambda \text{Var } (Y_1). \tag{1.5}$$

Theorem 1.4 (Exponential moments) *Let X be a compound Poisson process. Let*

$$C = \left\{ c \in \mathbb{R}^d, \ \mathbb{E} e^{\langle c, Y_1 \rangle} < +\infty \right\}.$$

1. *C is convex and contains 0.*
2. *$c \in C$ if and only if $\mathbb{E}(e^{\langle c, X_t \rangle}) < +\infty$ for some $t > 0$ or equivalently for any $t > 0$.*
3. *If $w \in \mathbb{C}^d$ is s.t. $Re(w) \in C$, then*

$$\psi(w) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle w, x \rangle} - 1) \nu(dx)$$

   has a sense, $\mathbb{E}(e^{\langle w, X_t \rangle}) < +\infty$ and $\mathbb{E}(e^{\langle w, X_t \rangle}) = e^{t\psi(w)}$.

1.3 Mouvement brownien

Voyons maintenant le processus central du calcul stochastique. Contrairement au processus de Poisson (composé), ses trajectoires sont continues, sa loi est simple (gaussienne). En revanche il est beaucoup moins régulier (non dérivable, variations infinies, etc.).

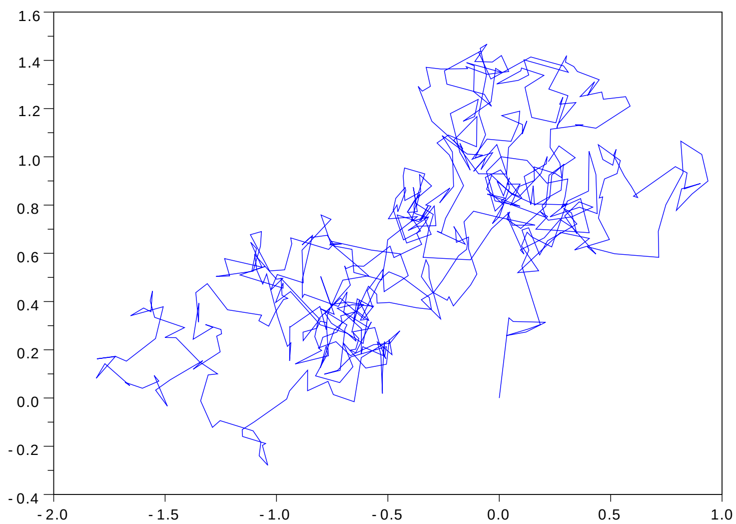
Définition 1.12 *On appelle* mouvement brownien vectoriel standard *un processus à trajectoires continues à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, $\{B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots B_t^d);\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *tel que*

— $B_0 = 0$ *;*

— *tout accroissement* $B_t - B_s$ $(0 \leq s \leq t)$ *suit une loi gaussienne sur* $\mathbb{R}^d$*, centrée de matrice de covariance* $(t-s)\mathbf{Id}$*, où* $\mathbf{Id}$ *est la matrice identité ;*

— *pour tout* $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n$*, les accroissements* $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ *avec* $0 \leq i \leq n-1$ *sont indépendants.*

Voici un exemple de trajectoire en dimension 2.



Si B est un mouvement brownien, il engendre sa propre filtration $\mathcal{F}^B$. Si la filtration est fixée on a la définition suivante.

Définition 1.13 (Par rapport à une filtration) *Un* mouvement brownien *(*standard, de dimension d*) défini sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est un processus* $B = \{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ *adapté à la filtration et tel que :*

— $B_0 = 0$ *p.s. ;*

— *pour* $0 \leq s < t$*, l'incrément* $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *;*

— *et est normalement distribué avec moyenne nulle et variance* $(t-s)\mathbf{Id}$*.*

Par définition, un mouvement brownien est un processus de Lévy tel que

1. pour tout $t > 0$, X_t est gaussien de moyenne zéro et de matrice de covariance $t\mathbf{Id}$;

2. le processus X a des trajectoires continues p.s.

En particulier les coordonnées $\{B_t^i;\ t \geq 0\}$ sont des mouvements browniens réels (de dimension 1) indépendants. Et des mouvements browniens réels indépendants engendrent un mouvement brownien vectoriel. Les propriétés relatives aux filtrations d'un processus de Lévy restent donc vraies.

— Si la filtration est celle engendrée par le mouvement brownien B, alors cette définition est équivalente à celle du premier chapitre.
— Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration plus grande que la filtration ($\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$) et si $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, alors $\{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ est encore un mouvement brownien par rapport à cette filtration.
— La filtration augmentée du mouvement brownien est continue à droite et B est encore un mouvement brownien dans cette filtration.

Le mouvement brownien est un cas particulier d'une classe plus générale de processus.

Définition 1.14 *Un processus $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, est dit* gaussien, *si pour tout entier $k \geq 1$ et tous nombres réels $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k < +\infty$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ a une distribution normale.*

— Si la loi de $(X_{t+t_1}, \ldots, X_{t+t_k})$ ne dépend pas de t, le processus est stationnaire.
— Distributions fini-dimensionnelles déterminées par

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t), \quad \rho(s,t) = \mathbb{E}((X_s - m(s))(X_t - m(t))),\ s,t \geq 0.$$

— Si pour tout $t \geq 0$, $m(t) = 0$, le processus est dit à moyenne nulle.

Lemme 1.3 *Un mouvement brownien de dimension 1 est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$.*

Ce lemme peut être aussi vu comme une définition équivalente à 1.12.

Preuve. C'est presque immédiat compte-tenu des propriétés énoncées dans la définition 1.12. De plus si $s \leq t$,

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) = \mathbb{E}(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s - B_0) + s,$$

car $B_t - B_s$ et $B_s = B_s - B_0$ sont indépendants. Ainsi

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = s,\ \forall s \leq t.$$

$\square$

Soit $B = \{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ un mouvement brownien. Il possède alors les propriétés suivantes :

Proposition 1.5

1. B_t est une v.a. gaussienne centrée de variance $t\mathbf{Id}$. Donc a une densité :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

$|x|$ est la norme euclidiennne : $|x|^2 = |(x_1, \ldots, x_d)|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$.

2. *Sa fonction caractéristique est donnée par*

$$\mathbb{E}(e^{i\langle z,B_t\rangle}) = \exp(-t|z|^2/2).$$

Donc son exposant caractéristique ψ est : $\psi(z) = -|z|^2/2$.

3. *B_t est la somme de ses accroissements, i.e. la somme de v.a. i.i.d. de loi gaussienne.*
4. *En dimension 1, $B = \{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ et $\{B_t^2 - t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ sont des martingales, c'est-à-dire que pour tout $0 \leq s \leq t$:*

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s, \quad \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s.$$

Preuve.

1. Immédiat.
2. En effet pour tout $t > 0$, et tout $n \geq 1$, en posant $h = t/n$, on a presque sûrement

$$B_t = \sum_{k=0}^{n-1}(B_{h(k+1)} - B_{hk})$$

avec $B_{h(k+1)} - B_{hk} = B_h$ (égalité en loi) v.a. gaussienne centrée de variance h.

3. Pour $t > s \geq u \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}(B_t|B_u) = \mathbb{E}(B_t - B_u + B_u|B_u) = \mathbb{E}(B_t - B_u|B_u) + \mathbb{E}(B_u|B_u) = \mathbb{E}(B_t - B_u) + B_u = B_u,$$

car $B_t - B_u$ est indépendant de $B_u = B_u - B_0$. Et plus généralement pour $0 \leq u < v \leq s < t$

$$\mathbb{E}(B_t|B_u, B_v) = \mathbb{E}(B_t - B_v|B_v, B_u) + \mathbb{E}(B_v|B_u, B_v) = \mathbb{E}(B_t - B_v) + B_v = B_v.$$

On en déduit le résultat. L'autre cas est laissé en exercice (voir exercice 1.11).

□

Le mouvement brownien possède aussi des propriétés d'invariance.

Proposition 1.6 *Soit $B = \{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ un mouvement brownien.*

1. ***Symétrie.*** *Il en est de même de $-B$.*
2. ***Échelle.*** *Pour tout $c > 0$, le processus $\{B^c = B_t^c;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par*

$$B_t^c = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$$

est un mouvement brownien.

3. ***Retournement du temps.*** *Le processus retourné à l'instant T, $\hat{B}_t^T = B_T - B_{T-t}$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.*
4. ***Inversion du temps.*** *Le processus $\{\overline{B}_t = tB_{1/t};\ t > 0,\ \bar{B}_0 = 0\}$ est un mouvement brownien.*

Preuve. On laisse le lecteur vérifier que tous les processus obtenus vérifient les propriétés du mouvement brownien énoncées dans la définition 1.12. Le seul point compliqué est la continuité de $\overline{B}$ à $t = 0$, qu'on démontrera plus tard. □

1.3.1 Invariance par translation et propriétés de Markov

Définition 1.15 *Un* mouvement brownien issu de X_0 *est un processus de la forme* $X_t = X_0 + B_t$ *avec une condition initiale* X_0 *indépendante du brownien* B.

Définition 1.16 (Mouvement brownien avec dérive) *Un* mouvement brownien issu de X_0 de dérive (ou tendance) b et de coefficient de diffusion σ *est un processus de la forme* $X_t = X_0 + \sigma B_t + bt$ *avec une condition initiale* X_0 *indépendante du brownien* B.

Remarque : sauf mention explicite du contraire, B désignera toujours un mouvement brownien standard.

Proposition 1.7 (Invariance par translation) *Le mouvement brownien translaté de* $h \geq 0$, $\{B_t^h = B_{t+h} - B_h,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *est un mouvement brownien, indépendant du mouvement brownien arrêté en* h, $\{B_s,\ s \leq h\}$.

Autrement dit, $\{B_{t+h} = B_h + B_t^h,\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien issu de* B_h.

Remarque : ce résultat est associé à la *propriété de Markov faible.*

Preuve. Le caractère gaussien est évident. L'indépendance des accroissements de B^h résulte de celle des accroissements de B. Montrons maintenant que B^h est indépendant de la tribu engendrée par B_s, $s \leq h$. Pour cela, on considère $0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots \leq s_j \leq h$ et $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$. L'indépendance des accroissements de B assure que $(B_{t_1}^h, B_{t_2}^h - B_{t_1}^h, \ldots, B_{t_k}^h - B_{t_{k-1}}^h) = (B_{t_1+h} - B_h, \ldots, B_{t_k+h} - B_{t_{k-1}+h}^h)$ est indépendant de $(B_{s_1}, B_{s_2} - B_{s_1}, \ldots, B_{s_j} - B_{s_{j-1}})$. Mais alors $(B_{t_1}^h, B_{t_2}^h, \ldots, B_{t_k}^h)$ est indépendant de $(B_{s_1}, B_{s_2}, \ldots, B_{s_j})$. Le résultat se déduit via le lemme qui suit. □

Lemme 1.4 *Pour qu'une v.a.* Y *soit indépendante de la tribu* $\sigma(X_i,\ i \in I)$*, il faut et il suffit qu'elle soit indépendante de toutes les sous-familles finies* $(X_j,\ j \in J)$.

Proposition 1.8 (Propriété de Markov forte) *Soit* U *un temps d'arrêt. Le mouvement brownien translaté de* $U \geq 0$, $\{B_t^U = B_{t+U} - B_t,\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien, indépendant de* $\{B_t,\ t \leq U\}$*. Autrement dit,* $\{B_{t+U},\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien issu de* B_U.

Preuve. Par rapport à l'invariance par translation, la difficulté ici vient du fait que U est aléatoire. Il faut montrer que pour tous temps $0 \leq s_1 < s_2 \ldots < s_j$ et $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$, tous réels $(x_1, \ldots, x_k)$ et tous boréliens $A_1, \ldots, A_{j-1}$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B_{t_1}^U < x_1, \ldots, B_{t_k}^U < x_k,\ B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U < +\infty)\\ &\quad = \mathbb{P}(\tilde{B}_{t_1} < x_1, \ldots, \tilde{B}_{t_k} < x_k)\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U < +\infty)\end{aligned}$$

$\tilde{B}$ étant un mouvement brownien standard indépendant de B.

Le cas le plus simple est celui où U est un temps d'arrêt discret à valeurs dans $(u_n)_{n\geq 1}$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(B^U_{t_1} < x_1, \ldots, B^U_{t_k} < x_k,\ B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U < +\infty) \\
= & \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(B^U_{t_1} < x_1, \ldots, B^U_{t_k} < x_k,\ B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U,\ U = u_n) \\
= & \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(B^{u_n}_{t_1} < x_1, \ldots, B^{u_n}_{t_k} < x_k,\ B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U,\ U = u_n) \\
= & \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\tilde{B}_{t_1} < x_1, \ldots, \tilde{B}_{t_k} < x_k)\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U,\ U = u_n) \\
= & \ \mathbb{P}(\tilde{B}_{t_1} < x_1, \ldots, \tilde{B}_{t_k} < x_k)\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U < +\infty)
\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité provenant de l'invariance par translation avec $h = u_n$, en remarquant que l'événement

$$\{B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U,\ U = u_n\}$$

ne dépend que des valeurs de B avant u_n.

Pour le cas général, on considère la suite $U_n = \dfrac{[nU]+1}{n}$. C'est une suite décroissante convergente vers U. U_n est un temps d'arrêt car

$$U_n \leq t \Leftrightarrow U < [tn]/n, \quad [tn]/n \leq t.$$

De plus U_n est à valeurs discrètes. Donc pour tout n,

$$\begin{aligned}
(1.6) \qquad & \mathbb{P}(B^{U_n}_{t_1} < x_1, \ldots, B^{U_n}_{t_k} < x_k,\ B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U_n < +\infty) \\
& = \mathbb{P}(\tilde{B}_{t_1} < x_1, \ldots, \tilde{B}_{t_k} < x_k)\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{j-1} \in A_{j-1},\ s_j \leq U_n < +\infty).
\end{aligned}$$

Lorsque $U < +\infty$ (équivalent à $U_n < +\infty$), la continuité des trajectoires de B montre que $B^{U_n}_t$ converge vers B^U_t lorsque n tend vers $+\infty$, pour tout t avec probabilité 1. Donc on peut passer à la limite sur n dans 1.6. □

Proposition 1.9 (Principe de symétrie) *Pour tout $y \geq 0$, et $x \leq y$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y; B_T \leq x\right) = \mathbb{P}(B_T \geq 2y - x);$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y\right) = \mathbb{P}(|B_T| \geq y) \quad \textit{(égalité en loi des v.a.).}$$

La loi conditionnelle de $\sup_{t\leq T} B_t$ sachant B_T est donnée par :

$$\forall y \geq x \vee 0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y \middle| B_T = x\right) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{T}\right).$$

Preuve. Notons T_y le premier instant où B atteint le niveau y :

$$T_y = \inf\{t \geq 0, \quad B_t = y\}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y\right) = \mathbb{P}(T_y \leq T) = \mathbb{P}(T_y \leq T,\ B_T < y) + \mathbb{P}(T_y \leq T,\ B_T > y).$$

T_y est un temps d'arrêt (voir définition suivante). Donc on peut utiliser la propriété de Markov forte (cf. proposition 1.8 qui suit). Le processus $\{B_{T_y+t},\ t \geq 0\}$ est donc un mouvement brownien issu de y et indépendant de $(B_s,\ s \leq T_y)$. On applique la symétrie du processus B^{T_y} pour déduire que les événements $\{T_y \leq T,\ B_T < y\}$ et $\{T_y \leq T,\ B_T > y\}$ ont la même probabilité. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y\right) = 2\mathbb{P}(T_y \leq T,\ B_T > y).$$

Comme $B_T > y$ implique que $T_y \leq T$, il découle alors que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y\right) = 2\mathbb{P}(B_T > y) = \mathbb{P}(|B_T| > y),$$

la dernière égalité provenant de la symétrie de la loi de B_T.

La première égalité s'obtient de la même manière en remarquant que les événements $\{T_y \leq T,\ B_T < x\}$ et $\{T_y \leq T,\ B_T > 2y - x\}$ ont la même probabilité et que $\{T_y \leq T,\ B_T > 2y - x\} = \{B_T > 2y - x\}$ si $x \leq y$.

Enfin la loi conditionnelle se calcule directement :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y \middle| B_T = x\right) = \frac{\partial_x \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T} B_t \geq y,\ B_T \leq x\right)}{\partial_x \mathbb{P}\left(B_T \leq x\right)} = \frac{\partial_x \mathbb{P}(B_T \geq 2y - x)}{\partial_x \mathbb{P}\left(B_T \leq x\right)}.$$

Puis la formule s'obtient par simplification. □

1.3.2 Propriétés trajectorielles

Détaillons maintenant les propriétés des trajectoires d'un mouvement brownien de dimension 1. On sait déjà qu'elles sont continues.

Proposition 1.10 (Comportement à l'infini) *Si B est un mouvement brownien, alors presque sûrement*

$$\limsup_{t\to+\infty} B_t = \lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{u\geq t} B_u\right) = +\infty, \quad \liminf_{t\to+\infty} B_t = -\infty.$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

Preuve. On considère la suite de v.a. $M_T = \sup_{t\leq T} B_t$, pour $T \geq 0$. Quand T tend vers $+\infty$, cette suite est croissante, donc convergente. Notons M_∞ sa limite presque sûre. Le résultat annoncé avec la limsp revient à montrer que $M_\infty = +\infty$ p.s. Le même raisonnement fonctionnerait avec la liminf. En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_\infty = +\infty) = \lim_{y\to+\infty} \mathbb{P}(M_\infty > y) &= \lim_{y\to+\infty}\left(\lim_{T\to+\infty} \mathbb{P}(M_T > y)\right) \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(\lim_{T\to+\infty} \mathbb{P}(|B_T| > y)\right) = 1.\end{aligned}$$

Pour la seconde partie, la loi des grands nombres montre la convergence p.s. le long de suites de nombres rationnels. Pour pouvoir passer à la limite le long des suites réelles quelconques, nous introduisons les v.a. $M_n = \sup_{n<t\leq n+1} (B_t - B_n)$ et $\tilde{M}_n = \sup_{n<t\leq n+1} (B_n - B_t)$ et montrons que M_n/n et $\tilde{M}_n/n$ convergent p.s. vers 0.

La proposition 1.9 montre que M_n et $\tilde{M}_n$ sont intégrables. Pour montrer que M_n/n converge p.s. vers 0, on applique le lemme de Borel-Cantelli en justifiant que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(M_n \geq n\varepsilon) < +\infty$. En effet cette propriété implique que pour tout ε, à partir d'un certain rang, p.s. la suite M_n/n est plus petite que ε. Comme c'est en particulier vrai pour tout ε rationnel, cela assure la convergence presque sûre vers 0.

La condition de Borel-Cantelli est satisfaite puisque

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(M_n \geq n\varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(M_1 \geq n\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(M_1) < +\infty.$$

□

Régularité des trajectoires

Proposition 1.11 (Dérivabilité) *Le mouvement brownien n'est pas dérivable en zéro, et donc par stationnarité en aucun point :*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| = +\infty, \quad p.s.$$

Preuve. La preuve repose sur le fait que le processus $\{\overline{B}_t = tB_{1/t};\ t > 0,\ \bar{B}_0 = 0\}$ est un mouvement brownien. Comme indiqué plus haut, nous laissons au lecteur le soin de vérifier les propriétés de stationnarité, d'indépendance et de loi des accroissements de $\overline{B}$. Reste à prouver la continuité en 0 des trajectoires. Or la convergence vers 0 de $\overline{B}_h$ est équivalente à celle de $\frac{B_t}{t}$ vers 0 lorsque $t = 1/h$ tend vers $+\infty$. Cette propriété a été établie précédemment.

De même la non différentiabilité des trajectoires est acquise puisque

$$\limsup_{t\to 0} \left| \frac{\overline{B}_t}{t} \right| = \limsup_{t\to 0} |B_{1/t}| = +\infty.$$

Cette propriété vraie pour $\overline{B}$ est valable pour tout brownien, car c'est une propriété de la loi des trajectoires. En particulier elle est vraie pour le mouvement brownien translaté $(B_{t+h} - B_t,\ h \geq 0)$, ce qui montre que p.s. les trajectoires ne sont pas dérivables. □

Les trajectoires sont donc continues, mais non dérivables. En effet on peut étendre le résultat précédent pour montrer que p.s. B n'est nulle part différentiable (Paley-Wiener-Zygmund (1933)). Ceci rend les trajectoires browniennes particulièrement irrégulières. Néanmoins on a un contrôle höldérien de la régularité des trajectoires.

Théorème 1.1 (Kolmogorov-Čentsov (1956)) *Soit $X = \{X_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ un processus tel que*

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t, \leq T,$$

avec α, β, et C constantes. Alors il existe une modification de X, continue notée $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t,\ 0 \leq t \leq T\}$, qui est localement hölderienne d'exposant γ pour tout $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left[\omega, \sup_{0<|t-s|<h(\omega),\ s,t\in[0,T]} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right] = 1$$

où $h(\omega)$ est une v.a. p.s. positive et $\delta > 0$ est une constante.

Preuve. Admise dans ce cours. □

Appliquons ce théorème au mouvement brownien. Soit $B = \{B_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ un mouvement brownien.

Lemme 1.5 *Si $B_t - B_s$ est normalement distribuée avec moyenne nulle et variance $t - s$, $\mathbb{E}|B_t - B_s|^{2n} = C_n|t - s|^n$ pour tout entier n.*

Preuve. Voir exercices en fin de chapitre. □

Proposition 1.12 *Les trajectoires browniennes sont höldériennes d'ordre γ pour tout $\gamma < 1/2$.*

Preuve. En effet en appliquant le théorème de Kolmogorov-Čentsov, avec $\alpha = 2n$, $\beta = n-1$, on obtient que B à modification près a des trajectoires localement höldériennes d'ordre $\gamma < \frac{n-1}{2n}$. En faisant tendre n vers l'infini, on a le résultat voulu. □

Néanmoins les trajectoires browniennes ne sont pas höldériennes d'ordre 1/2, à cause de la **loi du logarithme itéré** :

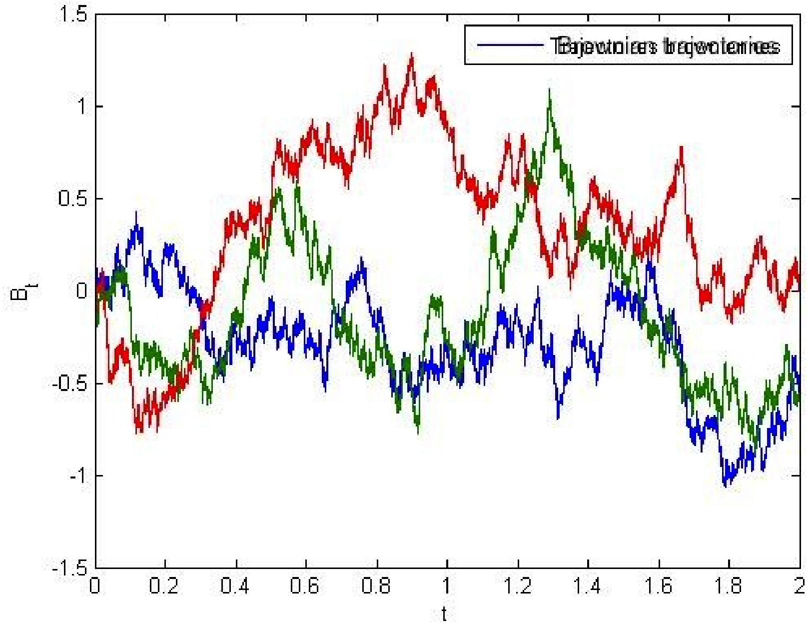
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} = 1, \quad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} = -1, \quad \text{p.s.}$$

Ainsi si les trajectoires étaient höldériennes d'ordre 1/2, alors $|B_t| \leq C\sqrt{t}$ pour tout t proche de zéro, d'où :

$$\limsup_{t\downarrow 0} \left|\frac{B_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}}\right| \leq C \limsup_{t\downarrow 0} \left|\frac{1}{\sqrt{2 \ln\ln(1/t)}}\right| = 0.$$

Ce qui viendrait contredire la loi du logarithme itéré.

Pour terminer, voici un graphe avec trois trajectoires browniennes simulées par ordinateur.



Variations

Pour X processus et $t > 0$, on note

— $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$, avec $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$, partition de $[0, t]$,

— pas de la partition $\|\Pi\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$.

La p-ième variation de X par rapport à la partition Π est :

$$V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left| X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right|^p .$$

Si X est **continu** et tel que pour un $p > 0$, $\lim\limits_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t$ en probabilité, alors

— pour $q > p$, $\lim\limits_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = 0$,

— pour $0 < q < p$, $\lim\limits_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = +\infty$ sur l'événement $\{L_t > 0\}$.

Preuve. En exercice. □

Définition 1.17 (Variation quadratique) *Pour n entier posons $t_i = i2^{-n}$. La subdivision de $\mathbb{R}_+$ définie par $\mathbb{D}_n = \{t_0 < \ldots < t_i < \ldots\}$ est appelée* subdivision dyadique d'ordre *n. Le pas δ_n de la subdivision est donné par $\delta_n = 2^{-n}$.*

La variation quadratique *d'un mouvement brownien B associée à la subdivision dyadique d'ordre n est définie pour tout $t \geq 0$ par*

$$V_t^n = \sum_{t_i \leq t} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)^2 .$$

Lorsque f est une fonction continue localement lipschitzienne (par exemple de classe C^1), la variation quadratique est nulle. En effet

$$V_t^n = \sum_{t_i \leq t} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^2 \leq \sum_{t_i \leq t} K \left(t_{i+1} - t_i\right)^2 \leq K(t+1)\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

en utilisant le théorème des accroissements finis.

Proposition 1.13 *Avec probabilité 1, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{n\to\infty} V_t^n = t.$$

Preuve. Commençons par le cas où t est fixe. Notons $n(t)$ l'indice de la subdivision d'ordre n tel que $t_{n(t)} \leq t < t_{n(t)+1}$. On a alors

$$V_t^n - t = \sum_{j=0}^{n(t)} Z_j + (t_{n(t)+1} - t)$$

en posant $Z_j = \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2 - (t_{j+1} - t_j)$. Clairement $t_{n(t)} - t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les v.a. Z_j sont indépendantes, centrées, de carré intégrable, et $\mathbb{E}(Z_j^2) = C(t_{j+1} - t_j)^2$ pour une constante C positive. Ainsi

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n(t)} Z_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{n(t)} \mathbb{E}(Z_j^2) = C\sum_{j=0}^{n(t)} (t_{j+1} - t_j)^2 \leq C\delta_n(t+1).$$

Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n(t)} Z_j$ est une série convergence dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ vers 0.

Mais comme $\delta_n = 2^{-n}$, on a aussi que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n(t)} Z_j\right)^2 < +\infty$$

c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j=0}^{n(t)} Z_j\right)^2$ est d'espérance finie. Donc avec probabilité 1, elle est convergente et donc son terme général tend vers 0. Ainsi pour chaque t, il existe un ensemble négligeable N_t tel que pour tout $\omega \notin N_t$, $V_t^n(\omega)$ converge vers t.

Posons $N = \displaystyle\bigcup_{t \in \mathbb{Q}\cap[0,+\infty[} N_t$. C'est un ensemble négligeable. Et pour un t réel arbitraire, t est la limite de deux suites monotones de rationnels (r_p) et (s_p). Comme pour n fixé, $t \mapsto V_t^n$ est croissante, on en déduit que pour $\omega \notin N$,

$$r_p = \lim_{n\to+\infty} V_{r_p}^n(\omega) \leq \liminf_{n\to+\infty} V_t^n(\omega) \leq \limsup_{n\to+\infty} V_t^n(\omega) \leq \lim_{n\to+\infty} V_{s_p}^n = s_p$$

puis on passe à la limite sur p. □

Proposition 1.14 (Généralisation) *Soit $\{\Pi_n\}$ une suite de partition de l'intervalle $[0, t]$*

$$0 = \Pi_n^0 < \Pi_n^1 < \ldots < \Pi_n^{N_n} = t$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \|\Pi_n\| = \lim_{n\to+\infty} \max_{0\le k\le N_n-1} (\Pi_n^{k+1} - \Pi_n^k) = 0$. *Alors la* variation quadratique

$$V_t^{(2)}(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{m_n} \left| B_{t_k^{(n)}} - B_{t_{k-1}^{(n)}} \right|^2$$

du mouvement brownien B converge vers t dans L^2 quand n tend vers ∞.

Preuve. Admise ici. □

Une conséquence de cette proposition est que

Proposition 1.15 *pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est à variation infinie sur tout intervalle $[0, t]$.*

Preuve. En effet, on a toujours

$$V_t^n = \sum_{t_i \le t} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 \le \left(\sup_{t_i\le t} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \right) \times \sum_{t_i\le t} \left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|$$

et comme B est continue sur $[0, t]$, donc uniformément continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t_i\le t} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = 0.$$

Donc pour que le terme de gauche dans l'inégalité tende vers t, il faut que la variation de B sur $[0, t]$ soit égale à $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i\le t} \left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right| = +\infty.$$

□

1.3.3 Construction du mouvement brownien

Le mouvement brownien est assez facile à construire par approximation par principe d'invariance. Pour cela considérons :

— une suite $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. avec moyenne zéro, et variance $0 < \sigma^2 < \infty$;

— la suite des sommes partielles $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $k \ge 1$.

À partir de là, on construit un processus à temps continu $Y = \{Y_t,\ t \ge 0\}$ définie par interpolation linéaire :

$$Y_t = S_{[t]} - (t - [t])\xi_{[t]+1}, \quad t \ge 0,$$

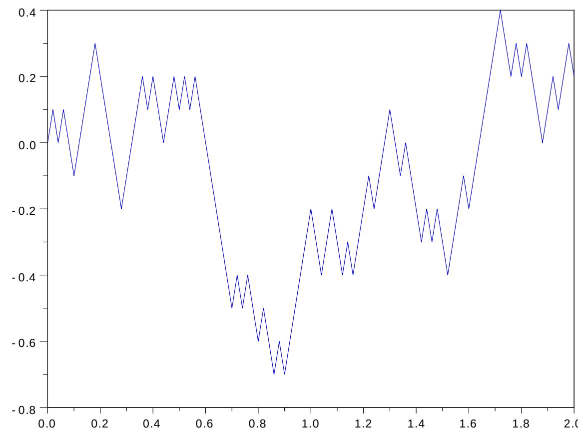
avec $[t]$ partie entière de t. Et on termine en effectuant un changement d'échelle :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}.$$

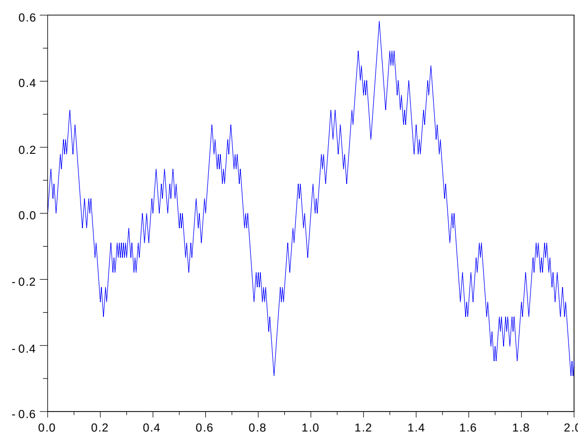
On peut prendre par exemple pour ξ_i une v.a. de type Bernoulli symétrique

$$\mathbb{P}(\xi_i = -1) = \mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1/2,$$

auquel cas $\sigma^2 = 1$. Voici le graphe de $X^{(100)}$:



Et pour $n = 500$:



Proposition 1.16 (Convergence fini-dimensionnelle) *Pour* $0 \leq t_1 < \ldots < t_d < \infty$, $(X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{D} (B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$ *où* $\{B_t,\ \mathcal{F}_t^B;\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien standard.*

Preuve. Faisons la preuve pour $d = 1$. On a

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{[nt]} - (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j - \frac{(nt - [nt])\xi_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Il est à peu près immédiat que presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(nt-[nt])\xi_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}} = 0.$$

De plus en utilisant le théorème central limite on a la convergence en loi suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{[nt]}} \sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j = Z$$

avec Z gaussienne centrée réduite. Ainsi à t fixé

$$\lim_{n\to+\infty} X_t^{(n)} = \sqrt{t}Z = B_t$$

les deux égalités étant des égalités en loi.

Le cas général s'en déduit en utilisant le théorème central limite multi-dimensionnel. $\square$

Théorème 1.2 (Principe d'invariance de Donsker (1951)) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est donnée une suite $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. avec moyenne nulle et variance finie $\sigma^2 > 0$. Définissons $\{X^{(n)}\}$ comme précédemment et soit $\mathbb{P}_n$ la mesure induite par $X^{(n)}$ sur $(C[0,\infty), \mathcal{B}(C[0,\infty)))$.*

Alors $\{\mathbb{P}_n\}$ converge faiblement vers la mesure $\mathbb{P}^*$, sous laquelle le processus coordonnée $W_t(\omega) = \omega(t)$ sur $C[0,\infty)$ est un mouvement brownien standard.

Définition 1.18 (Mesure de Wiener) *La mesure $\mathbb{P}^*$ sur $(C[0,\infty), \mathcal{B}(C[0,\infty)))$ est appelée* mesure de Wiener. *$(C[0,\infty), \mathcal{B}(C[0,\infty)), \mathbb{P}^*)$ est* l'espace de probabilité canonique *pour le mouvement brownien.*

Définition 1.19 (Convergence faible) *Soit (S,ρ) un espace métrique de tribu borélienne $\mathcal{B}(S)$. Soit $(\mathbb{P}_n)$ une suite de probabilités sur $(S, \mathcal{B}(S))$ et soit $\mathbb{P}$ une autre probabilité sur ce même espace. $(\mathbb{P}_n)$* converge faiblement *vers $\mathbb{P}$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s)d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s)d\mathbb{P}(s)$$

pour toute fonction continue bornée f sur S.

Ici nous admettons le principe d'invariance. À la convergence fini-dimensionnelle, il faut ajouter la tension des suites de mesures, ce qui demande pas mal de travail.

Il y a bien d'autres constructions possibles. En voici une utilisant les séries de Fourier.

Proposition 1.17 *Soit $(G_m)_{m\geq 0}$ une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes. Alors*

$$B_t = \frac{t}{\sqrt{\pi}} G_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m\geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} G_m$$

est un mouvement brownien standard sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Preuve. Nous en equissons les idées principales. On montre que la série converge p.s. car c'est une suite de Cauchy dans L^2, dont la limite p.s. est donc gaussienne. B est donc un processus gaussien centré. On calcule sa fonction de covariance :

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \frac{ts}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} \frac{\sin(ms)}{m}.$$

Et on vérifie que cela fait $\min(s,t)$ en calculant les coefficients de Fourier de $t \in [-\pi, \pi] \mapsto \min(s,t)$ (avec s fixé).

Enfin la continuité de B se montre en prouvant la convergence uniforme de la série. □

1.3.4 Mouvement brownien vectoriel

On a déjà donné la définition d'un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$. Voyons maintenant des extensions.

Définition 1.20 (Mouvement brownien corrélé) *Un* mouvement brownien vectoriel *est un processus à trajectoires continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\{B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots B_t^d);\ t \in \mathbb{R}_+\}$ tel que*
- $B_0 = 0$ *;*
- *tout accroissement $B_t - B_s$ $(0 \leq s \leq t)$ suit une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^d$, centrée de matrice de covariance $(t-s)K$, où K est la matrice de covariance du vecteur gaussien B_1 ;*
- *pour tout $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n$, les accroissements $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ avec $0 \leq i \leq n-1$ sont indépendants.*

Ainsi les coordonnées $\{B_t^i;\ t \geq 0\}$ sont des mouvements browniens réels de coefficient de diffusion $\sigma_i^2 = \mathrm{var}(B_1^i) = \kappa_{ii}$. Si de plus pour tout i, $\kappa_{ii} = 1$, ce sont des browniens normalisés. Mais cette fois-ci les coordonnées ne sont plus indépendantes.

Si A est une matrice, A^* est sa transposée.

Proposition 1.18 *Soit B un mouvement brownien d-dimensionnel corrélé.*
- *Il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $P^*KP = \Delta$ soit diagonale.*
- *Soit $\sqrt{\Delta}^{-1}$ la matrice diagonale dont les termes sont les inverses des racines carrées des valeurs propres de Δ lorsqu'elles sont non nulles et zéro sinon. Le processus $\{W_t = (\sqrt{\Delta}^{-1})P^* B_t;\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien, dont les coordonnées sont des browniens normalisés indépendants, dont certains peuvent être nuls.*
- *Soit $A = P\sqrt{\Delta}$. La matrice A est une racine carrée de K, au sens où $AA^* = K$ et*
$$B_t = AW_t.$$

En particulier en dimension 2, soit (B^1, B^2) un mouvement brownien normalisé de coefficient de corrélation $\rho \in]-1, 1[$, c'est-à-dire : $\mathrm{cov}(B_t^1, B_t^2) = \rho t$. On pose

$$W_t^1 = B_t^1, \quad W_t^2 = \frac{B_t^2 - \rho B_t^1}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Le processus $W = (W^1, W^2)$ est un mouvement brownien standard.

1.4 Jump-diffusion process

Definition 1.9 *A* jump-diffusion process *X is the sum of a (correlated with drift) Brownian motion and of a independent compound Poisson process. Therefore a jump-diffusion process is a Lévy process.*

In other words we have a k-dimensional Brownian motion $(W_t)_{t\geq 0}$, a $d \times k$ matrix A, a d-dimensioinal vector γ, a Poisson process $(P_t)_{t\geq 0}$ with intensity λ and jump times T_n, and a sequence $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of $\mathbb{R}^d$-valued r.v. such that

1. Y_n are i.i.d. with distribution measure π ;
2. $(W_t)_{t\geq 0}$, $(P_t)_{t\geq 0}$ and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are independent.

And we define

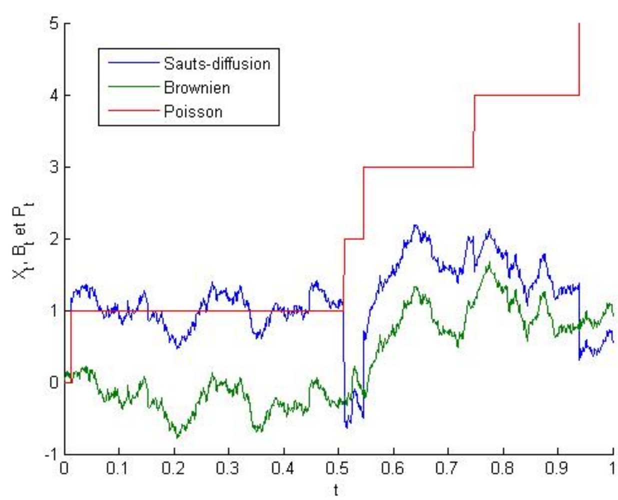
$$\boxed{X_t = AW_t + \gamma t + \sum_{n=1}^{P_t} Y_n = AW_t + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n).} \tag{1.7}$$

The characteristic exponent of X is given for any $z \in \mathbb{R}^d$ by :

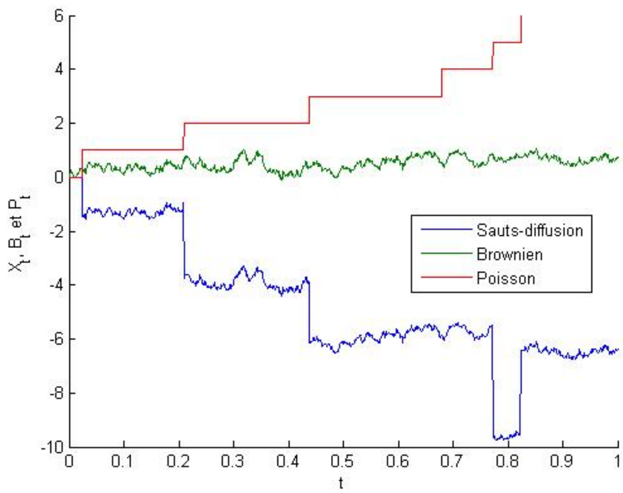
$$\boxed{\begin{aligned} \psi_X(z) &= -\frac{t}{2}\langle z, AA^* z\rangle + it\langle z, \gamma\rangle + t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\pi(dx) \\ &= -\frac{t}{2}\langle z, AA^* z\rangle + it\langle z, \gamma\rangle + t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\nu(dx). \end{aligned}} \tag{1.8}$$

A^* is the transpose matrix of A. The law of X is therefore characterized by the triple (A, ν, γ).

Let us draw two examples. The first one is a jump-diffusion process with Gaussian jumps (used in the Merton model).



The second one is used in the Kou model where the jump sizes are given by a non symmetric Laplace distribution.



For the financial point of view let us recall the main features of a jump-diffusion process.

— The prices are diffusion process, with jumps at randon times.
— The jumps are rare events. Therefore this model can be used for cracks or large losses.

The advantages are the following :

— the price structure is easy to understand, to describe and to simulate.
— Hence efficient Monte Carlo methods can be applied to compute path-depend prices.
— And this model is very performant to interpolate the implicit volatility smiles.

But there are some inconvenients.

— the densities are not known in closed formula,
— and statistical estimation or moments/quantiles computations are difficult to realize.

For the simulation, the dimension can 1 or d, the simulation is the same. For the Brownian part $X_t = \sigma W_t + \gamma t$, the simulation is based on the fact that W is a sum of Gaussian increments. Thus the procedure is the following :

1. split the interval $[0, t]$ by a grid $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t$,
2. simulate n standard Gaussian r.v. Z_i,
3. define $\Delta X_i = \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i + b(t_i - t_{i-1})$,
4. put $X_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \Delta X_i$.

The simulation is exact on the grid in the sense that X_i has the same law as X_{t_i}. Between X_i and X_{i+1}, one can used a linear interpolation.

The simulation of the compound Poisson process is based on Proposition 1.3. The jump times of a Poisson process knowing the value at time t have the same distribution as the order statistics of uniform r.v. on $[0,t]$. Hence to simulate the compound Poisson part on the interval $[0,T]$, the algorithm is :

1. simulate a Poisson r.v. N with parameter λT,
2. simulate N independent r.v. U_i with uniform law on $[0,T]$,
3. simulate the jumps : N independent r.v. Y_i with distribution $\nu(dx)/\lambda$,
4. put $X_t = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{U_i<t} Y_i$.

As before X_t, $t \in [0,T]$, has the asked law without any error.

Moments

It is well known that a Brownian motion with drift $X_t = bt + AW_t$ has exponential moment :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}\exp(\langle u, X_t\rangle) < +\infty.$$

So by independance between the continuous part and the jump part of a jump-diffusion process, integrability problem can just arise because of the jumps of X. Hence we can apply Theorems 1.3 and 1.4 to the jump part of X to have for example : $\mathbb{E}(|X_t|^n) < \infty$ if and only if $\mathbb{E}(|Y_1|^n) < \infty$. In particular

$$\mathbb{E}(X_t) = t\left(\gamma + \lambda \mathbb{E}(Y_1)\right), \tag{1.9}$$

and

$$\text{Var } X_t = t\left(A^*A + \lambda \text{Var } (Y_1)\right). \tag{1.10}$$

And if

$$\psi(w) = \frac{1}{2}\langle w, A^*Aw\rangle + \langle \gamma, w\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle w,x\rangle} - 1)\nu(dx)$$

has a sense, $\mathbb{E}(e^{\langle w,X_t\rangle}) < +\infty$ and $\mathbb{E}(e^{\langle w,X_t\rangle}) = e^{t\psi(w)}$.

Densities

A compound Poisson process has no density. Now to prove that a jump-diffusion process X has a density w.r.t. Lebesgue measure, it is not easy.

Proposition 1.7 *Let X be a d-dimensional jump-diffusion process with triple (A, ν, γ) with A of rank d. Then the law of X_t, $t > 0$, is absolutely continuous.*

In the previous proposition, the density is "given" by the Brownian part of X.

Martingales.

Now let us come to the martingale property.

Proposition 1.8 *Let X be a process with independent increments. Then*

1. *for every $u \in \mathbb{R}^d$, $\left(\dfrac{e^{i\langle u,X_t\rangle}}{\mathbb{E}(e^{i\langle u,X_t\rangle})}\right)_{t\geq 0}$ is a martingale.*
2. *If $\mathbb{E}(e^{\langle u,X_t\rangle}) < \infty$, $\forall t \geq 0$, then $\left(\dfrac{e^{\langle u,X_t\rangle}}{\mathbb{E}(e^{\langle u,X_t\rangle})}\right)_{t\geq 0}$ is a martingale.*
3. *If $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall t \geq 0$, then $M_t = X_t - \mathbb{E}(X_t)$ is a martingale (with independent increments).*
4. *In dimension 1, if $Var(X_t) < +\infty$, $\forall t \geq 0$, then $(M_t)^2 - \mathbb{E}((M_t)^2)$ is a martingale.*

Proof. Left to the reader. $\square$

Proposition 1.9 (Martingales) *A jump-diffusion process is a martingale if and only if*

$$\mathbb{E}|Y_1| < +\infty, \quad \text{and} \quad \gamma + \mathbb{E}(Y_1) = 0.$$

In dimension 1, $\exp(X)$ is a martingale if and only if $\mathbb{E}(e^{Y_1}) < +\infty$ and

$$\frac{A^*A}{2} + \gamma + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)\nu(dx) = 0.$$

Proof. Use the previous proposition, Equation (1.9) and Theorem 1.4. $\square$

1.5 Exercices

Processus de Poisson

Exercice 1.1 Soit $N = (N_t)$ un processus de Poisson d'intensité λ. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.s. et que le processus $\left(\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right)_{t\geq 0}$ converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers une loi gaussienne centrée réduite.

Exercice 1.2 Montrer que si $N = (N_t)$ et $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants, d'intensité respective λ et μ, alors la somme est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.

Exercice 1.3 Soient $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensité respective λ et μ.

1. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par $X_t = N_t - \tilde{N}_t$ est un processus de Poisson composé dont on déterminera les caractéristiques.
2. On suppose $\lambda \neq \mu$. Montrer que $(X_t/t)_{t\geq 0}$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ convergent p.s. dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand t tend vers $+\infty$. Préciser la limite de X_t suivant le signe de $\lambda - \mu$.

Exercice 1.4 On se donne une mesure ν sur $\mathbb{R}^*$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\nu(x) = \frac{c_1}{|x|^{1+\alpha_1}} e^{-\lambda_1 |x|} \mathbf{1}_{x<0} + \frac{c_2}{x^{1+\alpha_2}} e^{-\lambda_2 x} \mathbf{1}_{x>0},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives ou nulles, λ_1 et λ_2 sont strictement positives, tandis que α_1 et α_2 sont des réels strictement inférieurs à 2. À quelle condition sur α_1 et α_2, ν est-elle la mesure de Lévy d'un processus de Poisson composé ? Dans ce cas déterminer l'intensité du processus de Poisson sous-jacent et la distribution des sauts.

Vecteurs gaussiens

Exercice 1.5 Considérons un vecteur gaussien $X = (X_1, \cdots, X_n)$ de vecteur moyenne μ et de matrice de covariance Σ.

1. Soit $Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ où $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots n$. Calculer la moyenne et la variance de Y.
2. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants, prouver que la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une v.a. gaussiene de moyenne et de variance données respectivement par la somme des moyennes et la somme des variances de $(X_i)_{1\leq i\leq n}$.

Exercice 1.6 Montrer que les moments d'une v.a. gaussienne X de moyenne zéro et de variance 1 sont donnés par :

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!},\ \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0.$$

Indication : utiliser la fonction caractéristique de X.

Exercice 1.7 Soit X une v.a. gaussienne réelle standard et soit Z une v.a. indépendante de X, uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$.

1. Montrer que ZX est gaussienne.
2. En considérant $X + ZX$, montrer que le vecteur (X, ZX) n'est pas gaussien.
3. Montrer que X et ZX ne sont pas indépendants, bien que leur covariance soit nulle.

Exercice 1.8 Soit (X, Y) un vecteur gaussien avec $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ de corrélation ρ. Quelle est la densité du vecteur $(X + Y, X - Y)$? Et les densités marginales ?

Exercice 1.9 On considère un vecteur gaussien X de dimension 3, de vecteur moyenne $m = (1, 3, 5)^t$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathbb{E}(X_1 \exp(X_1 + 2X_2 + 3X_3))$.

Indication : commencer par calculer $\mathbb{E}(\exp(\lambda X_1 + 2X_2 + 3X_3))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mouvement brownien

Exercice 1.10 On considère un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Montrer que le processus $(-B_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien.

Exercice 1.11 Soit B un mouvement brownien.

1. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à la filtration brownienne $\sigma(B_s, s \leq t)$:

$$i)\ (B_t^2 - t)_{t\geq 0}, \qquad ii)\ \big(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)\big)_{t\geq 0}.$$

2. Montrer que si X est un processus continu tel que $X_0 = 0$ et $(\exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\geq 0}$ est une martingale, alors X est un mouvement brownien.

Exercice 1.12 Pour B mouvement brownien, calculer les deux premiers moments de la v.a. suivante :

$$X = \int_0^1 B_s^2 ds.$$

Exercice 1.13 (Contrôle 2011-2012) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et soit $(\mathcal{F}_t;\ t \geq 0)$, la filtration engendrée par W, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s : s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}\{W_t|\mathcal{F}_s\}$ pour $s < t$.
2. Calculer pour $s < t$, $\mathbb{E}\left\{e^{t/2}\cos(W_t)|\mathcal{F}_s\right\}$. Conclusion ?
   Indication : on rappelle que $\cos(x) = \text{Re }(e^{ix})$.

On définit pour $t \geq 0$

$$X_t = e^{-t} W_{\sqrt{e^t - 1}}.$$

3. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.
4. Calculer sa moyenne $\mathbb{E}(X_t)$ et sa fonction de covariance Cov (X_s, X_t).

Processus de sauts-diffusion

Exercice 1.14 Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de sauts-diffusion réel sans terme brownien ($\sigma = 0$), de dérivve γ et de mesure de Lévy ν, tel que ν se décompose en

$$\nu(dx) = A\sum_{n=1}^{\infty} p^n \delta_{-n}(dx) + Bx^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha-\beta}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx,$$

avec α et β réelles, $\lambda \geq 0$, $A \geq 0$ et $B \geq 0$, $p \in]0,1[$ et δ_y est la masse de Dirac au point y :

$$\forall A \subset \mathbb{R},\ \delta_Y(A) = 1 \text{ si } y \in A,\ \delta_Y(A) = 0 \text{ si } y \notin A.$$

1. Que peut-on dire des sauts négatifs du processus X ?
2. Montrer que si $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha-\beta}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

   On pourra utiliser l'indication et le changement de variable $y = \dfrac{x}{1+x}$.

Tout d'abord on va supposer $\lambda = 0$.

3. À quelle condition sur β, X est-il un processus de Poisson composé avec dérive γ_0 ? Quelle est la valeur de cette dérive en fonction de la fonction de répartition d'une loi béta au point $1/2$?
4. À quelles conditions sur α et β, X_t admet-il un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ (avec $t > 0$ fixé quelconque) ?
5. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ si elle existe, en fonction de la fonction de répartition d'une loi béta au point $1/2$.
6. Montrer que si $\beta > 0$, X se décompose comme suit :
$$X_t = \gamma_0 t + \sum_{i=1}^{N_t^1} \frac{Y_i}{1 + Y_i} - \sum_{j=1}^{N_t^2} Z_j,$$
avec
— $N^1 = (N_t^1)_{t \geq 0}$ et $N^2 = (N_t^2)_{t \geq 0}$ deux processus de Poisson d'intensité respective μ_1 et μ_2 à déterminer,
— les Y_i suivant une loi béta de paramètres α et β,
— les Z_i une loi géométrique de paramètre p,
— N^1, N^2, $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant tous indépendants.

On suppose maintenant que $\lambda > 0$.

7. Pour quels $u \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathbb{E} \exp(uX_t) < +\infty$?
8. Si $B = 0$, calculer l'exposant caractéristique Ψ de X et en déduire $\mathbb{E} \exp(uX_t)$.
9. Montrer que si $\beta > 0$, alors X se décompose comme suit :
$$X_t = \gamma_0 t + \sum_{i=1}^{N_t^3} V_i - \sum_{j=1}^{N_t^4} Z_j,$$
avec
— $N^3 = (N_t^3)_{t \geq 0}$ et $N^4 = (N_t^4)_{t \geq 0}$ deux processus de Poisson d'intensité respective μ_3 et μ_4 à déterminer,
— les V_i étant positifs ou nuls de densité f donnée par
$$f(x) = cx^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha-\beta} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$$
où c est une constante de normalisation
10. *(bonus)* Montrer qu'il existe une constante $C = C(\alpha, \beta, \lambda)$ telle que
$$\forall x > 0, \ f(x) \leq Cx^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha-\beta}.$$
En déduire un algorithme de simulation par rejet des V_i.

Indication. *On rappelle qu'une variable aléatoire Y suit une loi béta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si Y admet pour densité la fonction g :*
$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{b-1}(1-x)^{a-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$
On note par $F(x; a, b)$ la fonction de répartition au point x de la loi béta de paramètres a et b.

Chapitre 2

Intégrale et calcul stochastique

C'est le chapitre central de ce cours. Si le processus de Poisson (composé ou non) a des trajectoires simples, ce n'est pas le cas du mouvement brownien. Ainsi pour faire correctement des calculs avec ce type de processus, il faut une théorie particulière : celle du calcul stochastique. La famille clé de processus est celle des martingales.

2.1 Martingales de carré intégrable

Dans la suite, X est un processus adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et tel que $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ pour tout $t \geq 0$. La plupart des preuves étant longue et technique sera admise.

Définition 2.1 ((Sous, sur) Martingale) *Le processus $\{X_t, \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty <\}$ est une* sous-martingale *(resp.* sur-martingale*) si*

$$\forall 0 \leq s < t < \infty, \quad \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ (resp. } \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s\text{)},\ \mathbb{P} - p.s.$$

$\{X_t, \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty <\}$ est une martingale *si c'est à la fois une sur- et une sous-martingale.*

On doit garder en tête le cas du mouvement brownien $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ ou encore du processus $\{B_t^2 - t,\ t \geq 0\}$, qui sont deux exemples fondamentaux de martingales continues. On peut penser aussi à la martingale discontinue $N_t - \lambda t$ si N est un processus de Poisson d'intensité λ.

Proposition 2.1 *Soit $\{X_t, \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ une martingale (resp. sous-martingale) et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante) t.q. $\mathbb{E}|\phi(X_t)| < +\infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors $\{\phi(X_t), \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ est une sous-martingale.*

Preuve. C'est une application immédiate de l'inégalité de Jensen. □

Ainsi B_t^2 est une sous-martingale.

Théorème 2.1 (Régularité) *Soit $\{X_t, \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ une sous-martingale et supposons que la filtration satisfait les conditions usuelles.*

Alors le processus X admet une modification continue à droite si et seulement si la fonction $t \mapsto \mathbb{E}X_t$ est continue à droite.

Si cette modification continue à droite existe, elle peut être choisie càdlàg et adaptée à la filtration, donc elle est aussi une sous-martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$.

Remarquons que si X est une martingale, $t \mapsto \mathbb{E}X_t$ est constante, donc continue à droite et le théorème s'applique pourvu que la filtration satisfasse les conditions usuelles.

À noter. Dans toute la suite, on supposera toujours que *les martingales sont càdlàg.*

Définition 2.2 (Processus croissants) *Un processus adapté A est dit* croissant *si pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ on a :*

1. $A_0(\omega) = 0$ *;*
2. $t \mapsto A_t(\omega)$ *est croissant et continu à droite,*

et $\mathbb{E}(A_t) < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Un processus croissant est intégrable *si $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$, avec $A_\infty = \lim_{t \to +\infty} A_t$.*

Théorème 2.2 (Doob-Meyer (1963)) *Soit $\{\mathcal{F}_t\}$ une filtration vérifiant les conditions usuelles. Si la sous-martingale càd X est de carré intégrable, alors X se décompose en une somme d'une martingale continue à droite M et d'un processus croissant A.*

De plus M est une martingale de carré intégrable et A est intégrable.

Par exemple, $X_t = B_t^2$ est une sous-martingale de carré intégrable (car la loi normale admet des moments de tout ordre) et on a déjà vu que

$$X_t = B_t^2 = (B_t^2 - t) + t = M_t + A_t$$

avec $M_t = B_t^2 - t$ qui est une martingale et $A_t = t$ qui est un processus croissant.

2.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale continue

Dans la suite, on note $\mathcal{M}_2^c$, l'ensemble des martingales X de carré intégrable, continue avec $X_0 = 0$ p.s.

2.2.1 Variation quadratique

Définition 2.3 (Variation quadratique)

1. *Pour $X \in \mathcal{M}_2^c$, on définit la* variation quadratique *de X comme le processus $\langle X \rangle_t = A_t$, avec A processus croissant de la décomposition de Doob-Meyer de X^2.*

   Ainsi $\langle X \rangle$ est l'unique processus adapté croissant t.q. $\langle X \rangle_0 = 0$ p.s. et $X^2 - \langle X \rangle$ est une martingale.

2. *Pour deux martingales X, Y dans $\mathcal{M}_2$, on définit le processus* processus variation croisée $\langle X, Y\rangle$ *par :*

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left[\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle\right].$$

Noter que $XY - \langle X, Y\rangle$ est une martingale.

Deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_2$ sont dits orthogonaux *si $\langle X, Y\rangle_t = 0$, $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \geq 0$.*

Pour le mouvement brownien B, on a $\langle B\rangle_t = t$, car $B_t^2 - t$ est une martingale. Faisons maintenant le lien avec la variation quadratique. Pour X processus et $t > 0$, on rappelle que pour une partition de $[0,t]$, $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$, avec $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$, de pas $\|\Pi\| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |t_k - t_{k-1}|$, la p-ième variation de X par rapport à la partition Π est :

$$V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|^p.$$

Théorème 2.3 *Soit X dans $\mathcal{M}_2^c$. Pour toute partition Π de $[0,t]$ on a*

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)}(\Pi) = \langle X\rangle_t, \text{ en probabilité.}$$

Comme X est continu et que $\lim\limits_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)}(\Pi) = \langle X\rangle_t$ en probabilité, alors

- pour $q > 2$, $\lim\limits_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = 0$,
- pour $0 < q < 2$, $\lim\limits_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = +\infty$ sur l'événement $\{L_t > 0\}$.

En particulier comme pour le mouvement brownien ce théorème entraîne que X est à variations infinies sur tout intervalle.

Théorème 2.4 *Soit X et Y dans $\mathcal{M}_2^c$. Il existe un unique processus $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté et continu, à variation bornée, A satisfaisant $A_0 = 0$ p.s., tel que $XY - A$ est une martingale. Ce processus est donné par la variation croisée $\langle X, Y\rangle$.*

Définition 2.4 (Martingale locale) *Soit X un processus (continu). S'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\geq 1}$ de temps d'arrêt, t.q. $X_t^{(n)} = X_{t\wedge T_n}$ soit une martingale pour chaque $n \geq 1$ et $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \infty) = 1$, alors X est une* martingale locale *(continue).*

Si de plus $X_0 = 0$ p.s., on écrit $X \in \mathcal{M}^{loc}$ (resp. $X \in \mathcal{M}^{c,loc}$ si X est continu, resp. $X \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ si X de carré intégrable).

Proposition 2.2 *Soit X et Y dans $\mathcal{M}_2^{c,loc}$. Il existe un unique processus $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté et continu, à variation bornée, $\langle X, Y\rangle$ satisfaisant $\langle X, Y\rangle_0 = 0$ p.s., t.q. $XY - \langle X, Y\rangle \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$.*

Si $X = Y$, alors $\langle X\rangle = \langle X, Y\rangle$ et ce processus est croissant.

2.2.2 Rappel : intégrale de Lebesgue–Stieltjes

Soit X un processus càdlàg, dont la 1-variation est finie :

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(1)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right| = V_t^{(1)} < +\infty.$$

C'est le cas de tous les processus croissants (ou décroissants) (donc du processus de Poisson), de classe C^1 par rapport à t, etc.

Commençons par un processus X croissant p.s. Et supposons que ϕ est un processus continu. Alors p.s.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n} \phi_{t_n}(\omega)(X_{t_{n+1}}(\omega) - X_{t_n}(\omega)) = \int_0^t \phi_s(\omega) dX_s(\omega).$$

Cela permet de définir p.s. l'intégrale de ϕ par rapport à X. Cette définition se généralise au cas où X est à variations finies et ϕ est bornée.

De plus si pour un processus X donné, la limite précédente existe pour tout ϕ continu, alors nécessairement X est à variations finies.

Théorème 2.5 *Si X est à variations finies et à trajectoires continues, et si f est une fonction de classe C^1, alors $(f(X_t))_{t\geq 0}$ est aussi à variations finies et*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s.$$

Si X est à trajectoires dérivables on retrouve :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) X'_s ds.$$

Si X n'est pas continu, mais à variations finies, la formule devient :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s + \sum_{0<s\leq t} (f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s).$$

2.2.3 Intégrale d'Itô ou stochastique

Le cadre va être le suivant. On se donne une martingale **continue** et de carré intégrable $M = \{M_t, \mathcal{F}_t;\ t \geq 0\}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $M_0 = 0$ p.s., $\{\mathcal{F}_t\}$ étant une filtration satisfaisant les conditions usuelles. On note la variation quadratique finie de M, $\langle M\rangle$. Encore une fois l'exemple à avoir en tête est le cas du mouvement brownien.

On rappelle que M est à variations infinies sur tout intervalle $[0, T]$ (voir la remarque après le théorème 2.3 ou la proposition 1.15). Cette propriété fait que les intégrales de la forme $I_T(X) = \displaystyle\int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega)$ ne peuvent pas être définies trajectoire par trajectoire comme des intégrales ordinaires de type Lebesgue–Stieltjes ! Il faut des propriétés supplémentaires sur le processus X. La théorie d'Itô permet de construire une intégrale en utilisant que M est à variations quadratiques finies.

Pour cela nous allons définir des espaces de Hilbert :

— $\mathbb{H}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$: l'ensemble des processus adaptés de carré intégrable :

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}_+} \phi^2(t,.) d\langle M \rangle_t < +\infty.$$

Il est muni du produit scalaire :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t,.)\psi(t,.) d\langle M \rangle_t.$$

— $\mathbb{H}^2(\Omega \times [0,T])$: ensemble des processus adaptés de carré intégrable :

$$\mathbb{E} \int_0^T \phi^2(t,.) d\langle M \rangle_t < +\infty.$$

Le produit scalaire est défini par :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \mathbb{E} \int_0^T \phi(t,.)\psi(t,.) d\langle M \rangle_t.$$

On rappelle que ces espaces, munis de leur produit scalaire, sont des espaces normés, la norme se déduisant du produit scalaire, et sont complets pour cette norme. Par la suite ces espaces seront simplement notés $\mathbb{H}^2$ si le contexte est suffisamment clair pour ne pas préciser et la variable ω sera omise. Dans le cas brownien, $X \in \mathbb{H}^2$ si

$$\mathbb{E} \int_0^T X_t^2 dt < +\infty.$$

Pour construire l'intégrale d'Itô, nous procédons comme pour celle de Lebesgue en travaillant d'abord sur des processus « plus simples », puis par un passage à la limite.

Définition 2.5 (Processus simple) *Un processus X est* en escalier *ou* simple *s'il existe*

— *une suite croissante de nombres réels (t_n) avec $t_0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$,*

— *une suite de v.a. (ξ_n) et une constante $C < \infty$ t.q.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n(\omega)| \leq C, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

et ξ_n est $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurable,

et si

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t);\ 0 \leq t < \infty,\ \omega \in \Omega.$$

On pose $\mathbb{H}_0$ la classe des processus en escalier. On a

$$\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}^2.$$

Dans le cas où M est le mouvement brownien on a le résultat suivant.

Proposition 2.3

1. *Pour tout processus X adapté, borné et à trajectoires continues, l'approximation de Riemann par les fonctions en escalier, le long d'une partition $\tau = (t_i^n)$ de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini,*

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i^n}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

est vraie p.s. et dans $\mathbb{H}^2(\Omega\times[0,T])$.

2. *Plus généralement tout élément X de $\mathbb{H}^2$ est limite d'une suite de processus en escalier. Ainsi $\mathbb{H}_0$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{H}^2(\Omega\times[0,T])$.*

Le résultat est aussi vrai pour $\mathbb{H}^2(\Omega\times[0,+\infty[)$.

Preuve.

1. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée.
2. La preuve se fait en quatre étapes.
   (a) Commençons par supposer que X est borné et progressivement mesurable. On considère les processus continus et progressivement mesurables :

$$F_t(\omega) = \int_0^{t\wedge T} X_s(\omega)ds; \qquad \tilde{X}_t^{(m)} = m\left[F_t(\omega) - F_{(t-1/m)^+}(\omega)\right];\ m \geq 1.$$

Il existe donc une suite de processus simples $(\tilde{X}^{(m,n)},\ n\geq 1)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left|\tilde{X}_t^{(m,n)}(\omega) - \tilde{X}_t^{(m)}(\omega)\right| dt = 0.$$

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}_T$-mesurable

$$A = \left\{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega, \quad \lim_{m\to+\infty} \tilde{X}_t^{(m)}(\omega) \neq X_t(\omega)\right\}.$$

Pour tout ω, l'ensemble section $A_\omega = \{t\in[0,T],\ (t,\omega)\in A\}$ est $\mathcal{B}([0,T])$-mesurable et d'après un théorème fondamental de l'analyse, est de mesure de Lebesgue nulle. Le théorème de convergence dominée donne alors que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left|\tilde{X}_t^{(m)}(\omega) - X_t(\omega)\right| dt = 0.$$

   (b) Si maintenant X est juste supposé borné, mesurable et adapté à la filtration. On ne peut plus appliquer la technique précédente car on ne sait pas si F est progressivement mesurable (ni même s'il est adapté). On considère donc une modification de X progressivement mesurable notée Y (voir proposition 1.1). On va montrer que le processus progressivement mesurable $\left(G_t(\omega) = \int_0^{t\wedge T} Y_s(\omega)ds,\ t\geq 0\right)$ est une modification de F. Pour cela, on pose $\eta_t(\omega) = \mathbf{1}_{X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)}$ pour $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. C'est un processus mesurable tel que

$$\mathbb{E}\int_0^T \eta_t(\omega)dt = \int_0^T \mathbb{P}(X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)) = 0.$$

Donc $\displaystyle\int_0^T \eta_t(\omega)dt = 0$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Or $\{F_t(\omega) \neq G_t(\omega)\}$ est contenu dans l'ensemble $\left\{\omega,\ \displaystyle\int_0^T \eta_t(\omega)dt > 0\right\}$, G_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et par hypothèse $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables. Donc F_t est aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable. Adapté et continu implique progressivement mesurable et on peut répéter toutes les étapes du cas précédent.

(c) De là pour X processus borné, mesurable et adapté, et pour tout $m \geq 1$, on peut trouver une suite de processus simples $X^{(n,m)}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^m |X_t^{n,m} - X_t|^2 \, dt = 0.$$

Donc on peut trouver un processus simple $X^{(n_m,m)}$ tel que

$$\mathbb{E} \int_0^m \left|X_t^{(n_m,m)} - X_t\right|^2 dt \leq \frac{1}{m}.$$

Ainsi on peut trouver une suite de processus simples $X^{(n)}$ telle que

$$\sup_{T>0} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left|X_t^{(n)} - X_t\right|^2 dt = 0.$$

(d) Finalement si X est dans $\mathbb{H}^2$, on pose

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_t(\omega)\mathbf{1}_{|X_t(\omega)|\leq n}, \quad 0 \leq t < +\infty,\ \omega \in \Omega.$$

C'est une suite de processus bornés mesurables et adaptés. De plus le théorème de convergence dominée donne que

$$\mathbb{E} \int_0^T \left|X_t^{(n)} - X_t\right|^2 dt = \mathbb{E} \int_0^T X_t^2 \mathbf{1}_{|X_t(\omega)|\leq n} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis on applique les étapes précédentes à $X^{(n)}$.

□

Dans le cas général, il faut ajouter une condition sur la variation quadratique de M.

Proposition 2.4 *Si $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ est absolument continu pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, l'ensemble $\mathbb{H}_0$ est dense dans $\mathbb{H}^2$.*

À noter. Dans toute la suite, on va suposer que l'hypothèse de la proposition est vraie.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'Itô pour un processus simple. Si $X \in \mathbb{H}_0$,

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

alors on pose

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ \mathcal{I}_t(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n(M_t - M_{t_n}),} \tag{2.1}$$

où $n \geq 0$ est l'unique entier tel que $t_n \leq t < t_{n+1}$.

Propriétés 2.1 (de l'intégrale stochastique) *Pour X, Y in $\mathbb{H}_0$, $0 \leq s \leq t < \infty$*

1. $\mathcal{I}_0(X) = 0$, *p.s.*
2. $\mathbb{E}(\mathcal{I}_t(X)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(X)$, *p.s.*
3. $\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X))^2\right] = \mathbb{E}\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u$
4. $\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X) - \mathcal{I}_s(X))^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right]$ *p.s.*
5. $\mathcal{I}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathcal{I}(X) + \beta\mathcal{I}(Y)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Ces propriétés montrent donc que pour un processus simple, $\mathcal{I}(X)$ est une martingale de carré intégrable.

Preuve. Les propriétés 1 et 5 sont immédiates. La troisième se déduit des propriétés 1 et 4, et en prenant l'espérance. Pour la propriété 2, on fait la preuve dans le cas du mouvement brownien et on laisse au lecteur le soin de le faire dans le cas général.

On calcule $\mathbb{E}(\xi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s)$ pour tout i, et on montre que cela vaut $\xi_i(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})$. Ensuite par linéarité, on a le résultat voulu. On distingue les cas $s \leq t_i$, $t_i < s \leq t_{i+1}$, $s > t_{i+1}$. Commençons par ce dernier cas. Comme $t \geq s > t_{i+1}$, tout est $\mathcal{F}_s$ mesurable. Donc

$$\mathbb{E}(\xi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_s) = \xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \xi_i(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}).$$

Si $s \leq t_i$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\xi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\xi_i\mathbb{E}\left((B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\xi_i(B_{t_i} - B_{t_i})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= 0 = \xi_i(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}).
\end{aligned}$$

On a utilisé que ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et que B est une martingale par rapport à la filtration. Si $t_i < s \leq t_{i+1}$, alors de même comme $t \geq s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s) &= \xi_i\mathbb{E}\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \xi_i\left[\mathbb{E}\left(B_{t\wedge t_{i+1}}|\mathcal{F}_s\right) - B_{t_i}\right] = \xi_i(B_s - B_{t_i}) = \xi_i(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i}).
\end{aligned}$$

Pour la propriété 4, on va utiliser que $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale. De là pour $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_t(X) - \mathcal{I}_s(X))^2 &= \left\{\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) - (B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})\right]\right\}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i^2\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) - (B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})\right]^2 \\
&+2\sum_{i,j=0,\ i<j}^{\infty}\xi_i\xi_j\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) - (B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})\right]\left[(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j}) - (B_{s\wedge t_{j+1}} - B_{s\wedge t_j})\right].
\end{aligned}$$

Ensuite on prend l'espérance conditionnelle en tenant compte du fait que le mouvement brownien est une martingale (ou que les accroissements browniens sont indépendants et de moyenne nulle). Donc comme $i < j$, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$ à l'intérieur de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\left\{\xi_i\xi_j\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) - (B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})\right]\left[(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j}) - (B_{s\wedge t_{j+1}} - B_{s\wedge t_j})\right]\middle|\mathcal{F}_s\right\} = 0.$$

Comme les sommes qui interviennent sont en fait des sommes finies, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X)-\mathcal{I}_s(X))^2\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\xi_i^2\left[(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i})-(B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i})\right]^2\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\xi_i^2\left[(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i})-(B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i})\right]^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{\xi_i^2\mathbb{E}\left[\left[(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i})-(B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i})\right]^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right\}.
\end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left[(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{t\wedge t_i})-(B_{s\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_i})\right]^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}})^2+(B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i})^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\}-2\mathbb{E}\left\{(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}})(B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i})\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}})^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\}+(B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i})^2-2(B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i})\mathbb{E}\left\{(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}})\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{(B_{t\wedge t_{i+1}}-B_{s\wedge t_{i+1}})^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right\}-(B_{t\wedge t_i}-B_{s\wedge t_i})^2 \\
&= (t\wedge t_{i+1}-s\wedge t_{i+1})-(t\wedge t_i-s\wedge t_i),
\end{aligned}$$

car $(B_t^2-t,\ t\geq 0)$ est une martingale. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X)-\mathcal{I}_s(X))^2\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i^2(t\wedge t_{i+1}-s\wedge t_{i+1})-(t\wedge t_i-s\wedge t_i)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2du\middle|\mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

On remarquera qu'on a utilisé uniquement le fait que le mouvement brownien B est une martingale nulle à l'instant initial et telle que $(B_t^2-t,\ t\geq 0)$ est une martingale. □

Cette construction sur les processus simples va être étendue à $\mathbb{H}^2$.

Définition 2.6 (Intégrale stochastique) *Pour $X\in\mathbb{H}^2$, l'intégrale stochastique (ou d'Itô) de X par rapport à la martingale $M\in\mathcal{M}_2^c$ est l'unique martingale de carré intégrable $\mathcal{I}(X)=\{\mathcal{I}_t(X);\ t\geq 0\}$ qui satisfait $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{I}(X^{(n)})-\mathcal{I}(X)\|=0$, pour toute suite $(X^{(n)})\subset\mathbb{H}_0$ convergente vers X (les limites sont dans $\mathbb{H}^2$). On écrit pour tout $t\geq 0$, $\mathcal{I}_t(X)=\displaystyle\int_0^t X_s dM_s$.*

Si on n'y prend pas garde, on ne voit pas vraiment de différence avec l'intégrale de Lebesgue. La subtilité provient du fait que toutes les limites sont à prendre dans $\mathbb{H}^2$, c'est-à-dire sont des limites en moyenne quadratique, et pas presque sûres (ou trajectoires par trajectoires).

La définition précédente doit être prouvée. Pour cela si $X\in\mathbb{H}^2$, il existe une suite de processus simples $X^{(n)}$ convergente dans $\mathbb{H}^2$ vers X (voir proposition 2.3). De là

$$\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{I}_t(X^{(n)})-\mathcal{I}_t(X^{(m)})\right|^2dt=\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{I}_t(X^{(n)}-X^{(m)})\right|^2dt\leq T\mathbb{E}\int_0^T\left|X_t^{(n)}-X_t^{(m)}\right|^2dd\langle M\rangle_t.$$

Donc $(\mathcal{I}(X^{(n)}), n \geq 0)$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc converge vers $\mathcal{I}(X)$. On peut vérifier que c'est une martingale nulle à l'instant initial.

Enfin si on prend deux approximations $X^{(n)}$ et $Y^{(n)}$ de X, on peut en créer une troisième $Z^{(n)}$ par $Z^{(2n)} = X^{(n)}$ et $Z^{(2n+1)} = Y^{(n)}$. La convergence des suites $\mathcal{I}(X^{(n)}$, $\mathcal{I}(Y^{(n)}$ et $\mathcal{I}(Z^{(n)}$ montre que $\mathcal{I}(X)$ est bien défini indépendamment de la suite approchante $X^{(n)}$ choisie.

Voyons les propriétés de l'intégrale d'Itô.

Proposition 2.5 *Pour $M \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathbb{H}^2(M)$, $\mathcal{I}(X)$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\mathcal{I}_0(X) = 0$, *p.s.*
2. $\mathbb{E}(\mathcal{I}_t(X)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(X)$, *p.s.*
3. $\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X))^2\right] = \mathbb{E}\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u$
4. $\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_t(X) - \mathcal{I}_s(X))^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right]$ *p.s.*
5. $\mathcal{I}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathcal{I}(X) + \beta\mathcal{I}(Y)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En particulier, $\mathcal{I}(X)$ est à trajectoires continues et a pour variation quadratique :

$$\langle \mathcal{I}(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u.$$

Preuve. En exercice. □

Proposition 2.6 *Pour tous temps d'arrêt $S \leq T$, et tout réel $t > 0$,*

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}_{t\wedge T}(X)|\mathcal{F}_S] = \mathcal{I}_{t\wedge S}(X).$$

Pour X, Y dans $\mathbb{H}^2$ on a p.s.

$$\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_{t\wedge T}(X) - \mathcal{I}_{t\wedge S}(X))(\mathcal{I}_{t\wedge T}(Y) - \mathcal{I}_{t\wedge S}(Y))\middle|\mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t\wedge S}^{t\wedge T} X_u Y_u d\langle M\rangle_u \middle| \mathcal{F}_S\right].$$

En particulier, $\mathcal{I}(X)^2$ est une sous-martingale. Finalement $\mathcal{I}_{t\wedge T}(X) = \mathcal{I}_t(\tilde{X})$ p.s. pour $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)\mathbf{1}_{t\leq T(\omega)}$.

Preuve. La première égalité est du au théorème d'échantillonnage optionnel pour une martingale, que l'on va admettre. De même en utilisant la martingale $\mathcal{I}(X) - \int_0^\cdot X_u^2 d\langle M\rangle_u$ on obtient :

$$\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}_{t\wedge T}(X) - \mathcal{I}_{t\wedge S}(X))^2\middle|\mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t\wedge S}^{t\wedge T} X_u^2 d\langle M\rangle_u \middle| \mathcal{F}_S\right].$$

Puis on applique cette égalité à $X + Y$ et $X - Y$. □

Voici quelques autres propriétés.

Proposition 2.7 *Soit Y adapté tel que :* $\mathbb{E}\int_0^T Y_s^2 X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$. *Le processus $\mathcal{I}(XY)$ est aussi l'intégrale stochastique de Y par rapport à la martingale $I(X)$. Cela s'écrit :*

$$Y_s X_s dM_s = Y_s(X_s dM_s) = Y_s d(\mathcal{I}(X))_s.$$

Preuve. On le montre d'abord pour des processus simples, puis on passe à la limite. □

2.2.4 Cas particulier : intégrale de Wiener

C'est un cas particulier de l'intégrale stochastique. En effet pour un processus X quelconque, la loi de la v.a.

$$\int_0^t X_s dM_s$$

n'est pas connue, même si M est un mouvement brownien. Mais quand $X_s = g(s)$ est une fonction déterministe du temps, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t g(s)dB_s$ est appelée intŕgrale de Wiener. Ses propriétés sont les suivantes.

Proposition 2.8 *Soit f dans $L^2([0,T])$:*

$$\int_0^T (f(s))^2 ds < +\infty.$$

Le processus $\left(\displaystyle\int_0^t f(s)dB_s,\ t \in [0,T]\right)$ *est un processus gaussien, centré, à trajectoires continues, de carré intégrable et de fonction de covariance*

$$Cov\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^s f(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)du.$$

Si g est une autre fonction analogue,

$$Cov\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du.$$

Preuve. Faire les calculs sur l'approximation $\mathcal{I}_t^n(f)$, et passer à la limite. □

La relation

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)^2 = \int_0^t f^2(s)ds$$

définit une isométrie entre les variables gaussiennes centrées et les fonctions de carré intégrable.

2.2.5 Extensions

Terminons cette partie par deux extensions supplémentaires de l'intégrale d'Itô. Tout d'abord nous allons affaiblir encore l'hypothèse d'intégrabilité sur le processus à intégrer. Supposons que $M \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ soit une martingale locale continue et de carré intégrable avec $M_0 = 0$.

Définition 2.7 *On note* $\mathbb{L}^2(\mathsf{M})$ *l'ensemble de tous les processus* mesurables et adaptés X *pour lesquels*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T X_t^2 d\langle M\rangle_t < \infty\right) = 1, \quad \forall T \in [0,\infty).$$

Remarquons que si $M \in \mathcal{M}_2^c$, $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^2(M)$.

Comme $M \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$, il existe une suite de temps d'arrêt (S_n) telle que p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ et $M_{.\wedge S_n} \in \mathcal{M}_2^c$. Pour $X \in \mathbb{L}^2(M)$, posons

$$R_n = n \wedge \inf\left\{0 \le t < \infty;\ \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s \ge n\right\}.$$

Et pour finir,

$$T_n = R_n \wedge S_n, \quad M_t^{(n)} = M_{t\wedge T_n}, \quad X_t^{(n)} = X_t \mathbf{1}_{T_n \ge t}.$$

Pour $M^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$, $X^{(n)} \in \mathbb{H}^2$, l'intégrale stochastique $\mathcal{I}^{M^{(n)}}(X^{(n)})$ est bien définie. Pour $0 \le t \le T_n$, on pose

$$\mathcal{I}_t(X) = I_t^{M^{(n)}}(X^{(n)}).$$

Définition 2.8 *Pour* $M \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$, $X \in \mathbb{L}^2(M)$, l'intégrale stochastique de X par rapport à M *est le processus* $I(X) \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ *défini ci-dessus. On écrit* $\int_0^t X_s dM_s$ *à la place de* $\mathcal{I}_t(X)$.

Pour $M \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ et $X \in \mathbb{L}^2(M)$

— toutes les propriétés de l'intégrale stochastique impliquant une espérance sont fausses.

— Reste valable : $\mathcal{I}_0(X) = 0$ p.s., linéarité, $\langle \mathcal{I}(X)\rangle_t = \displaystyle\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u$, $\langle \mathcal{I}^M(X), \mathcal{I}^N(Y)\rangle_t = \displaystyle\int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u$.

Proposition 2.9 *Considérons une martingale* $M \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ *et* $X \in \mathbb{L}^2(M)$. *L'intégrale stochastique* $I^M(X)$ *est l'unique martingale locale* $\Phi \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ *qui satisfait pour tout* $N \in \mathcal{M}_2^c$ *(ou encore* $N \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$*) :* $\langle \Phi, N\rangle_t = \displaystyle\int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u,\ t \ge 0,\ p.s.$

L'autre extension concerne le cas vectoriel. On se donne

— un espace probabilisé filtré,

— une martingale M à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $M = (M^1, \ldots, M^d)$,

— et une famille $X = (X_{i,j}(t);\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ t \ge 0)$ de processus dans $\mathbb{H}^2$.

Définition 2.9 *L'*intégrale de X par rapport à M *notée* $\mathcal{I}(X)_t = \int_0^t X_s dM_s$ *est le vecteur aléatoire de* $\mathbb{R}^n$ *de coordonnées :*

$$\mathcal{I}_t(X)^i = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t X_{ij}(s) dM_s^j, \quad i = 1, \ldots, n$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\theta.\mathcal{I}_t(X)\right] &= 0 \\ \mathrm{var}\left[\theta.\mathcal{I}_t(X)\right] &= \sum_{1 \le i,j \le n} \theta_i \theta_j \int_0^t X_{ij}^2(s) d\langle M^j \rangle_s. \end{aligned}$$

Les propriétés vraies en dimension 1 restent valables.

2.3 Formule d'Itô dans le cas continu

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, qui satisfait les conditions usuelles et un brownien (B_t) d-dimensionel relatif à cette filtration.

Définition 2.10 (Processus d'Itô) *Un* processus d'Itô $X = \{X_t, \mathcal{F}_t;\ t \ge 0\}$ *est un processus adapté de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s = X_0 + \Gamma_t + M_t,\ 0 \le t < \infty,$$

avec :

- X_0 *v.a.* $\mathcal{F}_0$*-mesurable de carré intégrable ;*
- β *adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *t.q.* $\displaystyle\int_0^T |\beta_s| ds < \infty$ *pour tout* T *;*
- σ *adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^{n \times d}$ *t.q.* $\displaystyle\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty$ *pour tout* T*.*

De cette définition et des propriétés de l'intégrale d'Itô, on a :

- $\Gamma_t = \displaystyle\int_0^t \beta_s ds$: partie à variation finie de X.
- $M_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s dB_s$: partie martingale de X.

Le crochet de X est donc $\langle X \rangle_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s \sigma_s^* ds$.

Théorème 2.6 (Formule d'Itô) *Soit* $\{X_t;\ t \ge 0\}$ *un processus d'Itô et soit* $f(t, x)$:

$[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^{1,2}$. *Alors* $\mathbb{P}$*-p.s. pour* $t \geq 0$ *:*

$$\boxed{\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s,X_s)\beta_s^{(i)} ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s,X_s) \left(\sum_{j=1}^d \sigma_s^{ij} dB_s^{(j)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s,X_s) \left(\sum_{k=1}^d \sigma_s^{ik}\sigma_s^{jk} \right) ds. \end{aligned}} \tag{2.2}$$

$f(t,X_t)$ *est donc encore un processus d'Itô.*

Preuve. On va faire la démonstration en dimension 1, la généralisation ne posant pas de difficulté. Elle se fait en plusieurs étapes.
Étape 1. On localise le problème. Pour cela on pose pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |X_0| \geq n, \\ \inf\{t \geq 0,\ |M_t| \geq n,\ \text{ou } \int_0^t |\beta_s| ds \geq n,\ \text{ou } |\langle X \rangle_t| \geq n\} & \text{si } |X_0| < n, \\ +\infty, & \text{si } |X_0| < n,\ \text{et } \{\} = \emptyset. \end{cases}$$

$(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de temps d'arrêt, tendant p.s. vers $+\infty$. On va prouver la formule d'Itô pour le processus arrêté $X_t^{(n)} = X_{t\wedge T_n}$, puis on fera tendre n vers $+\infty$. Ainsi on peut supposer que X_0 et les processus Γ, sa variation totale, M et $\langle X \rangle$ sont bornés par une constante K sur $[0,+\infty[\times\Omega$. Donc X est borné par $3K$ et les valeurs de f en dehors du compact $[-3K,3K]$ sont inutiles. Donc on peut supposer que f est une fonction à support compact, donc que f et toutes ses dérivées spatiales sont bornées.
Étape 2. On utilise le développement de Taylor d'une fonction. Fixons $t > 0$ et Π une partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$ de l'intervalle $[0,t]$. On a donc

$$\begin{aligned} f(t,X_t) - f(0,X_0) &= \sum_{k=1}^m f(t_k, X_{t_k}) - f(t_{k-1}, X_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} f(\tau_k, X_{t_k})(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1}, \eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \end{aligned}$$

avec $t_{k-1} < \tau_k < t_k$ et $\eta_k = X_{t_{k-1}} + \theta_k(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ où $0 \leq \theta_k \leq 1$. τ_k, η_k et θ_k sont des variables aléatoires. Ainsi

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + \frac{1}{2} J_3(\Pi) \tag{2.3}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1(\Pi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_k, X_{t_k})(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(\Gamma_{t_k} - \Gamma_{t_{k-1}}) \\ J_2(\Pi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\ J_3(\Pi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1}, \eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2. \end{aligned}$$

Il est aisé de comprendre que comme f est de classe C^1 par rapport au temps t et à la variable d'espace x, $J_1(\Pi)$ tend vers l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} f(s,X_s)d\Gamma_s,$$

lorsque le pas de la partition $\|\Pi\| = \sup_{k=1,\ldots,m} |t_k - t_{k-1}|$ tend vers zéro.

Maintenant le processus $Y_s = \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)$ est adapté, borné et continu et peut être approché par le processus simple

$$Y_s^\Pi = \frac{\partial f}{\partial x} f(0,X_0)\mathbf{1}_{\{0\}}(s) + \sum \frac{\partial f}{\partial x} f(t_{k-1},X_{t_{k-1}})\mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k[}(s).$$

En effet

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{I}_t(Y^\Pi - Y)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^t (Y_s^\Pi - Y_s)^2 d\langle M\rangle_s \underset{\|\Pi\|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par convergence dominée. Donc en moyenne quadratique on a

$$J_2(\Pi) \underset{\|\Pi\|\to 0}{\longrightarrow} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} f(s,X_s)dM_s.$$

Étape 3. Reste le terme de variation quadratique $J_3(\Pi)$. On peut le réécrire

$$J_3(\Pi) = J_4(\Pi) + J_5(\Pi) + J_6(\Pi),$$

avec

$$\begin{aligned}
J_4(\Pi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},\eta_k)(\Gamma_{t_k} - \Gamma_{t_{k-1}})^2, \\
J_5(\Pi) &= 2\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},\eta_k)(\Gamma_{t_k} - \Gamma_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}), \\
J_6(\Pi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2.
\end{aligned}$$

Comme Γ est de variation totale bornée par K, on a

$$|J_4(\Pi)| + |J_5(\Pi)| \leq 2K \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_\infty \left(\max_{1\leq k\leq m} |\Gamma_{t_k} - \Gamma_{t_{k-1}}| + \max_{1\leq k\leq m} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|\right).$$

Et par continuité de Γ et de M, le terme de droite de cette inégalité tend vers zéro presque sûrement quand $\|\Pi\|$ tend vers zéro (et même dans L^1 par convergence dominée).

Pour le terme $J_6(\Pi)$, on définit

$$J_6^*(\Pi) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2,$$

et on voit que

$$|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \leq V^{(2)}(\Pi) \max_{1\leq k\leq m} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},X_{t_{k-1}}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},\eta_k)\right|$$

$V^{(2)}(\Pi)$ étant la variation quadratique de M. Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et de X, on a donc

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} \mathbb{E}|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| = 0.$$

Pour prouver que $J_3(\Pi)$ converge vers $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s$, on compare $J_6^*(\Pi)$ avec

$$J_7(\Pi) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}}).$$

En utilisant le fait que $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|J_6^*(\Pi) - J_7(\Pi)|^2 \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})\left[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\right]\right|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})\right)^2 \left[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\right]^2\right] \\
&\leq 2\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_\infty^2 \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + \sum_{k=1}^m (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})^2\right] \\
&\leq 2\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_\infty^2 \mathbb{E}\left[V^{(4)}(\Pi) + \langle M\rangle_t \max_{1\leq k\leq m}(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\right]
\end{aligned}$$

car $\langle M\rangle$ est un processus croissant. Par convergence dominée, ce dernier terme tend vers 0, et comme la convergence dans L^2 entraîne la convergence dans L^1, on a donc prouvé que

$$J_3(\Pi) \underset{\|\Pi\|\to 0}{\longrightarrow} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s, \qquad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Étape 4. Enfin si $\Pi^{(n)}$ est une suite de partitions de $[0,t]$ avec $\|\Pi^{(n)}\| \to 0$, alors pour une certaine sous-suite $(\Pi^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$, on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} J_1(\Pi^{(n_k)}) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}f(s,X_s)d\Gamma_s \\
&= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}f(s,X_s)\beta_s ds, \\
\lim_{k\to+\infty} J_2(\Pi^{(n_k)}) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}f(s,X_s)dM_s = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}f(s,X_s)\sigma_s dB_s, \\
\lim_{k\to+\infty} J_3(\Pi^{(n_k)}) &= \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s = \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\sigma_s^2 ds.
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à passer à la limite dans l'équation (2.3). En fait les processus des deux côtés de (2.3) sont une modification l'une de l'autre. Et comme ils sont continus, ils sont indistingables.

□

Il est possible d'avoir une formule plus concise :

$$\begin{aligned}
f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}f(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s).\beta_s ds \\
&\quad + \int_0^t \nabla f(s,X_s).\sigma_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \text{trace}\ \left(\sigma_s^* D^2 f(s,X_s)\sigma_s\right) ds
\end{aligned}$$

ou encore

$$(2.4)\qquad \boxed{\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s)dX_s \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \text{trace } \left(D^2 f(s,X_s)\sigma_s^*\sigma_s\right) ds. \end{aligned}}$$

Voyons pour finir quelques conséquences de cette formule. D'abord si $f(x)=x^2$, on obtient :

$$(2.5)\qquad \boxed{\forall t \geq 0, \quad B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.}$$

Ce qui est remarquable dans l'équation (2.5), c'est la présence du terme t. En effet si on avait une fonction de classe C^1, on aurait

$$(f(t))^2 = (f(0))^2 + 2\int_0^t f(s)df(s) = (f(0))^2 + 2\int_0^t f(s)f'(s)ds.$$

Le terme supplémentaire provient de la variation quadratique non nulle de B !

Ensuite si le processus X est tel que

$$\mathbb{E}\int_0^t |\nabla f(s,X_s)\sigma_s|^2 ds < +\infty,$$

l'intégrale stochastique $\int_0^t \nabla f(s,X_s)\sigma_s dB_s$ est une martingale de moyenne nulle. On peut prendre l'espérance dans la formule (2.2) et obtenir :

$$(2.6)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(f(t,X_t)) &= \mathbb{E}(f(0,X_0)) + \mathbb{E}\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s) + \nabla f(s,X_s)\beta_s\right] ds \\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \text{trace } \left(D^2 f(s,X_s)\sigma_s^*\sigma_s\right) ds. \end{aligned}}$$

Ces calculs peuvent se généraliser à des processus plus généraux, toujours sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfaisant les conditions usuelles.

Définition 2.11 (Semi-martingale) *Une* semi-martingale continue $X=\{X_t;\ t\geq 0\}$ *est un processus adapté qui se décompose ainsi :* $\mathbb{P}$*-p.s.*

$$X_t = X_0 + M_t + \Gamma_t,\ 0 \leq t < \infty,$$

où $M=\{M_t;\ t\geq 0\} \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ *et* $\Gamma = \{\Gamma_t;\ t\geq 0\}$ *est la différence de deux processus continus, croissants, adaptés* $\{A_t^{\pm};\ t\geq 0\}$: $\Gamma_t = A_t^+ - A_t^-$ *with* $A_0^{\pm}=0$.

On supposera que A_t^+ *(resp.* A_t^-*) est la variation positive (resp. négative) de* Γ *sur* $[0,t]$. *La variation totale de* Γ *sur* $[0,t]$ *est alors* $\check{\Gamma}_t = A_t^+ + A_t^-$.

Théorème 2.7 (Itô (1944), Kunita & Watanabe (1967)) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $X = \{X_t;\ t \geq 0\}$ une semi-martingale continue. Alors $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\forall t \geq 0,\ f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)d\Gamma_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s.$$

Si on préfère, on peut écrire cette forme en notation différentielle :

$$\boxed{df(X_t) = f'(X_t)dM_t + f'(X_t)d\Gamma_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t.}$$

Soit $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$. On utilisera les notations suivantes :

— gradient : $\nabla f = (\frac{\partial}{\partial x_i} f)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$,

— matrice hessienne : $D^2 f = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses termes diagonaux.

Théorème 2.8 (Extension multidimensionnelle) *Soit*

— *$\{M_t = (M_t^{(1)}, \ldots, M_t^{(d)});\ t \geq 0\}$ vecteur martingales dans $\mathcal{M}_2^{c,loc}$,*

— *$\{\Gamma_t = (\Gamma_t^{(1)}, \ldots, \Gamma_t^{(d)});\ t \geq 0\}$ vecteur de processus adaptés à variation bornée avec $\Gamma_0 = 0$,*

— *$\mathsf{X_t} = \mathsf{X_0} + \mathsf{M_t} + \Gamma_\mathsf{t}$, $t \geq 0$, avec X_0 v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable de $\mathbb{R}^d$.*

Soit $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$. Alors $\mathbb{P}$-p.s. pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \nabla_x f(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} trace \int_0^t D_x^2 f(s, X_s)d\langle M\rangle_s. \end{aligned}$$

Ici $\langle M\rangle_s$ est une matrice $d \times d$ de terme $\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_s$.

2.4 Stochastic calculus when there are jumps

There is a general theory for discontinuous martingales (or semi-martingales). Here we will restrict ourselves to jump-diffusion processes. More precisely let us consider a jump-diffusion process of the form.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Gamma_s dW_s + \int_0^t \Theta_s ds + J_t,$$

with

1. X_0 a deterministic initial condition ;
2. $I_t = \displaystyle\int_0^t \Gamma_s dW_s$ the Itô's integral of Γ w.r.t. to the Brownian motion W ;
3. $R_t = \displaystyle\int_0^t \Theta_s ds$ the Lebesgue's integral of a process Θ ;

4. J a right-continuous pure-jump process (think to a compound Poisson process).

The process $X_t^c = X_0 + I_t + R_t$ is the continuous part of X, with quadratic variation

$$[X^c, X^c]_t = \int_0^t \Gamma_s^2 ds;$$

J is the pure-jump part of X. Recall that

$$\Delta X_t = X_t - X_{t^-} = X_t - \lim_{s\uparrow t} X_s = \Delta J_t$$

with $\Delta X_0 = 0$.

2.4.1 Stochastic integral

Let us recall some definitions. We have already defined the class $\mathbb{H}_0$ of simple (predictable) processes (see Definition 2.5). We denote by

— $\mathbb{L}$ the set of adapted RCLL processes ;

— $\mathbb{D}$ (resp. $b\mathbb{D}$), the set of adapted RLLC (resp. RLLC and bounded) processes.

Definition 2.1 (Stochastic integral) *Let X be a jump-diffusion process (note that X is in $\mathbb{L}$) and Φ an adapted process in $\mathbb{D}$. The* stochastic integral *of Φ w.r.t. X is defined by*

$$\int_0^t \Phi_s dX_s = \int_0^t \Phi_s \Gamma_s dW_s + \int_0^t \Phi_s \Theta_s ds + \sum_{0<s\leq t} \Phi_s \Delta J_s.$$

Let $\Phi_t dX_t = \Phi_t dX_t^c + \Phi_t dJ_t$.

Proof. The construction is the same as in the continuous case. We define the stochastic integral for simple processes Φ. For $\Phi \in \mathbb{H}_0$, we put for $0 \leq t$, and j s.t. $T_j < t \leq T_{j+1}$

$$\begin{aligned}\int_0^t \Phi_s dX_s &= \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \phi_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) + \phi_j (X_t - X_{T_j}) \\ &= \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i (X_{T_{i+1}\wedge t} - X_{T_i \wedge t}).\end{aligned}$$

The extension to processes in $\mathbb{D}$ is technical and is not detailled here.

The last thing to prove is that if $\Phi \in \mathbb{H}_0$,

$$\Phi_t = \phi_0 \mathbf{1}_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \phi_i \mathbf{1}_{]T_i, T_{i+1}]}(t),$$

then

$$\int_0^t \Phi_s dJ_s = \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i (J_{T_{i+1}\wedge t} - J_{T_i \wedge t}) = \sum_{0<s\leq t} \Phi_s \Delta J_s.$$

□

Proposition 2.1 (Martingale property) *Assume that X is a martingale, that the integrand Φ is adapted and left-continuous, with for every $t \geq 0$, $\mathbb{E}\int_0^t \Gamma_s^2 \Phi_s^2 ds < +\infty$. Then the stochastic integral $\left(\int_0^t \Phi_s dX_s\right)_{t\geq 0}$ is a martingale.*

Proof. Use a classical result on the stochastic integral w.r.t. the Brownian motion and prove it directly for the pure jump part. Note that without the integrability condition on Φ, the stochastic integral would be a local martingale, even locally square integrable. □

When X is continuous (Brownien case), we don't care on the regularity of Φ. But the fact that Φ is in $\mathbb{D}$ is crucial here. Let us show this with an example.

— $X_t = N_t - \lambda t$ is a compensated Poisson process ;
— $\Phi_t = \Delta N_t$ is the jump at time t ;
— $\Psi_t = \mathbf{1}_{[0,S_1]}(t)$ where S_1 is the time of the first jump of N.

Then X is a square integrable martingale,

$$I_t = \int_0^t \Phi_s dX_s = N_t, \qquad J_t = \int_0^t \Psi_s dX_s = \mathbf{1}_{[S_1,+\infty]}(t) - \lambda(t \wedge S_1).$$

Hence I is not a martingale, but J is a martingale. Remark that if we take $\Theta_t = \mathbf{1}_{[0,S_1[}(t)$, then $\int_0^t \Theta_s dX_s = -\lambda(t \wedge S_1)$ is not a martingale.

2.4.2 Quadratic variation

We have a time grid $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = T\}$. The realized variance is :

$$\begin{aligned} V_X(\pi) &= \sum_{i=0}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ &= X_T^2 - 2\sum_{i=0}^{n} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \end{aligned}$$

Hence if the mesh a the time grid goes to zero, $V_X(\pi)$ converges in probability to :

$$[X,X]_T = X_T^2 - 2\int_0^T X_{u^-} dX_u.$$

Definition 2.2 (Quadratic variation) *The* quadratic variation process *of a jump-diffusion process X is the adapted RCLL process defined by :*

$$[X,X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_{u^-} dX_u.$$

$[X,X]$ can be denoted also $[X]$.

Now if we precise that X is given by :

$$X_t = X_0 + I_t + R_t + J_t = X_t^c + J_t = X_0 + \int_0^t \Gamma_s dW_s + \int_0^t \Theta_s ds + J_t.$$

Then $[X]_T = [X, X]_T = \displaystyle\int_0^T \Gamma_s^2 ds + \sum_{0<s\leq T} (\Delta J_s)^2.$

Proof. We compute

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 &= \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}}^c - X_{t_i}^c)^2 + \sum_{i=0}^n (J_{t_{i+1}} - J_{t_i})^2 \\ &+ 2\sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}}^c - X_{t_i}^c)(J_{t_{i+1}} - J_{t_i}), \end{aligned}$$

and

$$\left| \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}}^c - X_{t_i}^c)(J_{t_{i+1}} - J_{t_i}) \right| \leq \left(\sup_{0\leq i\leq n} |X_{t_{i+1}}^c - X_{t_i}^c| \right) \sum_{0\leq s\leq t} |\Delta(J)_s|.$$

Now

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}}^c - X_{t_i}^c)^2 &= \sum_{i=0}^n (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})^2 + \sum_{i=0}^n (R_{t_{i+1}} - R_{t_i})^2 \\ &+ 2\sum_{i=0}^n (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})(R_{t_{i+1}} - R_{t_i}), \end{aligned}$$

with

$$\left| \sum_{i=0}^n (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})(R_{t_{i+1}} - R_{t_i}) \right| \leq \left(\sup_{0\leq i\leq n} |I_{t_{i+1}} - I_{t_i}| \right) TV(R)_t,$$

and

$$\left| \sum_{i=0}^n (R_{t_{i+1}} - R_{t_i})^2 \right| \leq \left(\sup_{0\leq i\leq n} |R_{t_{i+1}} - R_{t_i}| \right) TV(R)_t.$$

Letting the mesh going to zero, we have

$$[X]_T = \lim \sum_{i=0}^n (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})^2 + \lim \sum_{i=0}^n (J_{t_{i+1}} - J_{t_i})^2 = \int_0^T \Gamma_s^2 ds + \sum_{0<s\leq T} (\Delta J_s)^2.$$

□

Properties 2.1

- $X_0^2 + \displaystyle\sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \underset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow} [X, X]_T$ *in ucp.*
- $([X, X]_t)_{t\in[0,T]}$ *is a non-decreasing process with* $[X, X]_0 = X_0^2$.
- *The jumps of* $[X, X]$ *are :* $\Delta[X, X]_t = |\Delta X_t|^2$.

Remark 2.1 (Important !)

- *When the process* X *is continuous, we have :* $[X] = \langle X \rangle$.

— *When X is not continuous, then the two brackets differ : $[X] \neq \langle X \rangle$ (see Exercise 2.8).*
— *In general, $\langle X \rangle$ is the compensator of $[X]$.*

Let $X^{(1)}$ and $X^{(2)}$ be two jump processes. The cross variation is defined as follows. First put

$$C_\Pi(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sum_{j=0}^{n-1} (X^{(1)}(t_{j+1}) - X^{(1)}(t_j))(X^{(2)}(t_{j+1}) - X^{(2)}(t_j)),$$

and define :

$$\boxed{[X^{(1)}, X^{(2)}]_T = \lim_{\|\Pi\| \to 0} C_\Pi(X^{(1)}, X^{(2)}).}$$

Theorem 2.1 *Consider $X^{(i)}$, $i = 1, 2$, two jump processes :*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + I_t^{(i)} + R_t^{(i)} + J_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t \Gamma_s^{(i)} dW_s + \int_0^t \Theta_s^{(i)} ds + J_t^{(i)}.$$

Then

$$[X^{(1)}, X^{(2)}]_T = \int_0^T \Gamma_s^{(1)} \Gamma_s^{(2)} ds + \sum_{0 < s \le T} \Delta J_s^{(1)} \Delta J_s^{(2)}.$$

Corollary 2.1 *Let W be a Brownian motion and $M = N - \lambda.$ a compensated Poisson process, relative to the same filtration. Then $[W, M]_t = 0$ for every $t \geq 0$.*

Proof. M is a pure jump martingale : $[M, M]_t = N_t$, hence

$$[W, M]_t = W_0 M_0 + \sum_{0 < s \le t} \Delta W_s \Delta M_s = 0.$$

□

Now for the stochastic integral we can extend the previous results. For $i = 1, 2$ let $X^{(i)}$ be jump processes : $X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + I_t^{(i)} + R_t^{(i)} + J_t^{(i)}$. Let $\tilde{X}_0^{(i)}$ be two constants and $\Phi^{(i)}$ adapted processes. We define

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^{(i)} &= \tilde{X}_0^{(i)} + \int_0^t \Phi_s^{(i)} dX_s^{(i)} \\ &= \tilde{X}_0^{(i)} + \int_0^t \Phi_s^{(i)} \Gamma_s^{(i)} dW_s + \int_0^t \Phi_s^{(i)} \Theta_s^{(i)} ds + \sum_{0 < s \le t} \Phi_s^{(i)} \Delta J_s^{(i)}. \end{aligned}$$

Then we have

$$\begin{aligned} [\tilde{X}^{(1)}, \tilde{X}^{(2)}]_t &= \int_0^t \Phi_s^{(1)} \Phi_s^{(2)} \Gamma_s^{(1)} \Gamma^{(2)} ds + \sum_{0 < s \le t} \Phi_s^{(1)} \Phi_s^{(2)} \Delta J_s^{(1)} \Delta J_s^{(2)} \\ &= \int_0^t \Phi_s^{(1)} \Phi_s^{(2)} d[X^{(1)}, X^{(2)}]_s. \end{aligned}$$

2.4.3 The Itô formula

Recall that for Γ and Θ adapted, if :

$$X_t^c = X_0 + I_t + R_t = X_0 + \int_0^t \Gamma_s dW_s + \int_0^t \Theta_s ds,$$

and if f is a function of class $C^2(\mathbb{R})$, then the Itô formula gives :

$$\begin{aligned} f(X_t^c) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s^c) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s^c) d\langle X^c \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s^c) \Gamma_s dW_s + \int_0^t f'(X_s^c) \Theta_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s^c) \Gamma_s^2 ds \end{aligned}$$

or in differential notation

$$df(X_t^c) = f'(X_s^c) \Gamma_s dW_s + f'(X_s^c) \Theta_s ds + \frac{1}{2} f''(X_s^c) \Gamma_s^2 ds.$$

Let us extend it to jump-diffusion processes.

Theorem 2.2 *Let X be a jump-diffusion process and f of class $C^2(\mathbb{R})$:*

$$X_t = X_t^c + J_t = X_0 + \int_0^t \Gamma_s dW_s + \int_0^t \Theta_s ds + J_t.$$

Then

$$\boxed{\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \Gamma_s^2 ds \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} \left(f(X_s) - f(X_{s^-}) \right). \end{aligned}} \tag{2.7}$$

Proof. Let us fix ω and $0 < T_1 < T_1 < \ldots < T_{n-1} < t$ the jump times of X in the interval $[0, t[$. We note $T_0 = 0$ and $T_n = t$ (T_0 is not a jump size, but T_n can be). Now we apply the Itô formula between the times u and v with $T_i < u < v < T_{i+1}$:

$$f(X_v) = f(X_u) + \int_u^v f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_u^v f''(X_s) d\langle X^c \rangle_s.$$

Letting u tend to T_i and v to T_{i+1} and using X *RCLL*, we obtain

$$f\left(X_{T_{i+1}^-}\right) = f(X_{T_i}) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_{T_i}^{T_{i+1}} f''(X_s) d\langle X^c \rangle_s.$$

Note that if we put dX_s instead of dX_s^c we would have

$$\lim_{v \uparrow T_{i+1}} \int_u^v f'(X_s) dX_s \neq \int_u^{T_{i+1}} f'(X_s) dX_s.$$

Therefore

$$\begin{aligned} f(X_{T_{i+1}}) - f(X_{T_i}) &= \int_{T_i}^{T_{i+1}} f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_{T_i}^{T_{i+1}} f''(X_s) d\langle X^c \rangle_s \\ &\quad + \left(f(X_{T_{i+1}}) - f\left(X_{T_{i+1}^-}\right) \right). \end{aligned}$$

To finish we just have to sum over i :

$$
\begin{aligned}
f(X_t)-f(X_0) &= \int_0^t f'(X_s)dX_s^c + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c\rangle_s \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n}\left(f(X_{T_{i+1}}) - f\left(X_{T_{i+1}^-}\right)\right) \\
&= \int_0^t f'(X_s)dX_s^c + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c\rangle_s + \sum_{0<s\le t}\left(f(X_s)-f\left(X_{s^-}\right)\right)
\end{aligned}
$$

□

As two applications, we have the two propositions.

Proposition 2.2 *We consider the geometric Poisson process*

$$S_t = S_0 \exp\left(N_t \log(\sigma+1) - \lambda\sigma t\right) = S_t e^{-\lambda\sigma t}(\sigma+1)^{N_t},$$

where N is a Poisson process with intensity λ and $\sigma > -1$. Then S is a martingale :

$$S_t = S_0 + \sigma\int_0^t S(u^-)dM_u = S(0) + \sigma\int_0^t S(u^-)d(N_u - \lambda u).$$

Proposition 2.3 *Let W be a Brownian motion and N a Poisson process with intensity $\lambda > 0$, defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ relative to the same filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$. Then W and N are independent.*

In the multidimensional framework

Theorem 2.3 *Let $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})$ with $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$, be jump-diffusion processes and f of class $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Then*

$$
\begin{aligned}
f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)d(X^{(i)})_s^c \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)\langle (X^{(i)})^c, (X^{(j)})^c\rangle_s ds \\
&\quad + \sum_{0<s\le t}\left(f(s,X_s) - f(s,X_{s^-})\right).
\end{aligned}
$$

The integration by parts formula becomes :

Proposition 2.4 *Consider X_1, X_2 two jump processes. Then*

$$
\begin{aligned}
X_1(t)X_2(t) &= X_1(0)X_2(0) + \int_0^t X_1(s)dX_2^c(s) + \int_0^t X_2(s)dX_1^c(s) \\
&\quad + \langle X_1^c, X_2^c\rangle_t + \sum_{0<s\le t}\left(X_1(s)X_2(s) - X_1(s^-)X_2(s^-)\right) \\
&= X_1(0)X_2(0) + \int_0^t X_1(s-)dX_2(s) + \int_0^t X_2(s-)dX_1(s) \\
&\quad + [X_1, X_2]_t.
\end{aligned}
$$

Proposition 2.5 (Doléans-Dade exponential) *Let X be a jump-diffusion process. The* Doléans-Dade exponential *of X is defined by*

$$Z_t^X = \exp\left\{X_t^c - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right\} \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s).$$

This process is solution of the following stochastic differential equation with initial condition $Z^X(0) = 1$:

$$Z_t^X = 1 + \int_0^t Z_{s^-}^X \; dX_s.$$

Proof. Now X is a jump-diffusion process written : $X_t = X_t^c + J_t = X_0 + \int_0^t \theta_s ds + \int_0^t \Gamma_s dB_s + J_t$. We define

$$Y_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s ds + \int_0^t \Gamma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_s^2 ds\right).$$

Then the Itô formula for continuous process shows that

$$dY_t = Y_t dX_t^c = Y_{t^-} dX_t^c.$$

We put

$$K_t = \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s)$$

with $K_t = 1$ before the first jump. Moreover

$$\Delta K_t = K_t - K_{t^-} = K_{t^-}(1 + \Delta X_t) - K_{t^-} = K_{t^-}\Delta X_t.$$

By definition $Z_t = Y_t K_t$ and from the previous result

$$\begin{aligned}
Z_t &= Y_0 K_0 + \int_0^t K_{s^-} dY_s + \sum_{0<s\leq t} (Y_s K_s - Y_{s^-} K_{s^-}) \\
&= 1 + \int_0^t K_{s^-} Y_{s^-} dX_s^c + \sum_{0<s\leq t} Y_{s^-} \Delta K_s \\
&= 1 + \int_0^t K_{s^-} Y_{s^-} dX_s^c + \sum_{0<s\leq t} Y_{s^-} K_{s^-} \Delta X_s \\
&= 1 + \int_0^t K_{s^-} Y_{s^-} dX_s = 1 + \int_0^t Z_{s^-} dX_s.
\end{aligned}$$

□

Definition 2.3 (Doléans-Dade exponential) *$Z = \mathcal{E}(X)$ is called the* Doléans-Dade exponential *(or stochastic exponential) of X. If X is a martingale, Z is a local martingale.*

2.5 Exercices

Intégrale de Wiener

Exercice 2.1 Donner la loi de la v.a.

$$Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s) dB_s.$$

Montrer que Y est bien définie.

Exercice 2.2 On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ et on définit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ par :

$$\forall t \geq 0, \; X_t = \int_0^{t^{1/2}} (2s)^{1/2} dB_s.$$

Montrer que c'est un processus gaussien. Calculer la moyenne et la variance de X. En déduire que c'est un mouvement brownien.

Calcul stochastique (cas continu)

Exercice 2.3 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Appliquer la formule d'Itô et calculer dZ_t pour les processus Z suivants :

1. $Z_t = \frac{B_t}{1+t}$;
2. $Z_t = (X_t - k)^2$ où $X_t = \exp(\sigma B_t + \mu t)$;
3. $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$ où X_t satisfait $dX_t = X_t(1 - X_t) dB_t$.

Exercice 2.4 Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ relativement à cette filtration, démontrer, en utilisant la formule d'Itô, que le processus $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Exercice 2.5 Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et un mouvement brownien $(B_t^1, B_t^2)_{t \geq 0}$ en dimension deux relativement à cette filtration (en particulier B^1 et B^2 sont des $(\mathcal{F}_t)$-mouvements browniens indépendants). On pose

$$X_t = \int_0^t B_s^1 dB_s^2 + \int_0^t B_s^2 dB_s^1.$$

1. Montrer que X est une martingale de carré intégrable (c-à-d $E[X_t^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$).

2. Soit $\lambda > 0$, justifier rapidement l'égalité

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = \mathbb{E}[\cos(\lambda X_t)].$$

3. A l'aide de la formule d'Itô, expliciter les décompositions de

$$Z_t = \cos(\lambda X_t)$$

comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

Exercice 2.6 Écrire sous la forme d'un processus d'Itô la quantité

$$\forall t \geq 0,\ X_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2,$$

où $(B_t^1, B_t^2, B_t^3)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien de dimension trois.

Exercice 2.7 Étant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus $(\phi_t)_{t\geq 0}$ et $(\psi_t)_{t\geq 0}$ continus et adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tels que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\Big(\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \psi_s^2 ds \Big) < +\infty,$$

on définit

$$\forall t \geq 0,\ X_t = 1 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s.$$

On suppose que, p.s., pour tout $t \geq 0$, $X_t > 0$ et $\psi_t > 0$.

1. Montrer que le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0,\ M_t = \exp\big(- \int_0^t (\psi_s/X_s) ds\big) X_t,$$

est une martingale de carré intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

2. On suppose que, p.s., pour tout $t \geq 0$, $\psi_t/X_t \leq \lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, montrer que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}(X_t) \leq \exp(\lambda t).$$

Calcul stochastique (cas discontinu)

Exercice 2.8 Pour la martingale $M_t = N_t - \lambda t$, N étant un processus de Poisson d'intensité λ, calculer $\langle M \rangle$ et $[M]$.

Exercice 2.9 Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ, et soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes et identiquement distribuées définies sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On suppose aussi que les v.a.r $Y_1, Y_2, \ldots$ sont indépendantes du processus $(N_t)_{t\geq 0}$. On définit par $Q_t := \displaystyle\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$.

1. Quelle est la nature du processus $(Q_t)_{t\geq 0}$? Donner l'expression de son saut à l'instant $t \geq 0$.

On suppose dans la suite que pour tout $i \geq 1$, chaque v.a.r. Y_i prend ses valeurs dans $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On note par $p(y_k)$ la probabilité que le saut est de taille y_k c'est-à-dire $p(y_k) := \mathbb{P}(Y_i = y_k)$ pour $k = 1, \ldots, m$. Cette probabilité ne dépend pas de i car les v.a. Y_i sont identiquement distribuées. On suppose que $p(y_k) > 0$ pour tout k et on rappelle qu'on a $\sum_{k=1}^m p(y_k) = 1$. On note par N_t^k le nombre de sauts du processus Q_t de taille y_k sur l'intervalle de temps $[0, t]$, ce qui permet d'écrire

$$N_t = \sum_{k=1}^m N_t^k \quad \text{et} \quad Q_t = \sum_{k=1}^m y_k N_t^k.$$

2. Justifier que N^1, N^2,..., N^m sont des processus de Poisson indépendants d'intensités $\lambda_1 = \lambda p(y_1)$, $\lambda_2 = \lambda p(y_2)$,...., $\lambda_m = \lambda p(y_m)$.
3. Soit $\widetilde{\lambda}_1$,...., $\widetilde{\lambda}_m$ des réels strictement positifs. On définit

$$Z_k(t) := e^{(\lambda_k - \widetilde{\lambda}_k)t} \Big(\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\Big)^{N_t^k} \quad \text{et} \quad Z(t) := \prod_{k=1}^m Z_k(t)\,. \tag{2.8}$$

   Montrer que Z_k vérifie l'EDS suivante :

$$dZ_k(t) = \frac{\widetilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_k} Z_k(t-) dM_k(t)$$

   où $M_k(t) = N_t^k - \lambda_k t$ pour $k = 1, ..., m$.
4. Montrer que Z_k est une martingale et que le crochet $[Z_k, Z_{k'}] = 0$ pour $k \neq k'$.
5. Montrer que Z_1Z_2 et $Z_1Z_2Z_3$ sont des martingales. En déduire que Z est une martingale et que $\mathbb{E}\big[Z(t)\big] = 1$ pour tout $t \geq 0$.
6. Montrer que $Z_t = e^{(\lambda - \widetilde{\lambda})t} \displaystyle\prod_{k=1}^{N_t} \frac{\widetilde{\lambda}\widetilde{p}(Y_k)}{\lambda p(Y_k)}$.

Exercice 2.10 Dans cet exercice, la maturité est $T > 0$ et on suppose que le prix de l'actif sans risque est donné par

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt, \quad S_0^0 = 1;$$

tandis que le prix de l'actif risqué est donné par l'équation suivante :

$$dS_t = S_{t_-}(bdt + \sigma dW_t + \delta dM_t), \quad S_0 > 0.$$

Ici W est un mouvement brownien standard, M un processus de Poisson compensé, i.e. $M_t = N_t - \lambda t$, avec N processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, indépendant de W. Tous les processus sont définis sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ et sont adaptés à la filtration. Les hypothèses sur les paramètres sont :

$$r > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+, \quad \delta \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}.$$

On rappelle que les exponentielles de Doléans-Dade sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\sigma W)(t) &= \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right), \\
\mathcal{E}(\delta M)(t) &= \exp\left(\ln(1+\delta)M_t - \lambda t(\delta - \ln(1+\delta))\right) = \exp\left(\ln(1+\delta)N_t - \lambda\delta t\right),
\end{aligned}$$

1. Quelles sont les équations vérifiées par $\mathcal{E}(\sigma W)$ et $\mathcal{E}(\delta M)$? On appliquera la formule d'Itô en justifiant son emploi.
2. Exprimer S_t uniquement en fonction des paramètres du modèle.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$(S_t)^a = (S_0)^a \mathcal{E}(a\sigma W)(t)\mathcal{E}(\delta_a M)(t) \exp\left[\frac{1}{2}a(a-1)\sigma^2 t + abt + \lambda t(\delta_a - a\delta)\right],$$
avec $\delta_a = (1+\delta)^a - 1$.
4. En déduire $\mathbb{E}(S_t^a)$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 2.11 Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé d'intensité λ et de loi des sauts μ. On suppose de plus que, pour un certain $p \in [0,1]$,

$$\mu(dz) = p\delta_1(dz) + (1-p)\delta_{-1}(dz),$$

c'est-à-dire que le processus n'effectue que des sauts de taille ± 1. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par P.

1. (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, P_t est intégrable et calculer $\mathbb{E}[P_t]$.
   (b) En déduire que l'on a, $\mathbb{P}$ presque sûrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{n} = \lambda(2p-1)$.
2. (a) À l'aide de la formule d'Itô, montrer que
   $$M_t = (P_t - \lambda t(2p-1))^2 - \lambda t$$
   est une martingale $\mathcal{F}_t$-adaptée.
   (b) En déduire que
   $$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} |P_t|^2\right] < +\infty.$$
   Indication : utiliser l'inégalité de Doob valable pour des martingales càdlàg :
   $$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2\right) \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(|M_t|^2).$$

3. (a) Vérifer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [n, n+1[$ on a :

$$\left| \frac{P_t}{t} - \lambda(2p-1) \right| \leq \left| \frac{P_n}{n} - \lambda(2p-1) \right| + \sup_{t \in [n,n+1[} \left| \frac{P_t - P_n}{n} \right|.$$

(b) Vérifier que les variables aléatoires $X_n = \sup_{t \in [n,n+1[} |P_t - P_n|^2$ sont identiquement distribuées et $\mathbb{E}[X_n] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.

(c) En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n}{n^2}$ converge, puis que $\frac{X_n}{n^2}$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ presque sûrement.

(d) Montrer que l'on a $\mathbb{P}$ presque sûrement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P_t}{t} = \lambda(2p-1).$$

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques, changement de probabilité

À partir du calcul stochastique vu précédemment, nous allons étudier deux questions : existence et unicité de la solution d'une équation différentielle aléatoire (base de la modélisation des prix) et changement de probabilité (question cruciale en finance mais aussi en statistiques).

3.1 Équations différentielles stochastiques

Ici nous n'allons donné des résultats que pour les processus de sauts-diffusion à trajectoires continues (autrement dit il n'y a pas de sauts) ! On se donne des fonctions $b_i(t,x)$, $\sigma_{ij}(t,x)$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$) de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ou sous forme vectorielle :

— un vecteur dérivé (ou tendance ou drift) $b(t,x) = \{b_i(t,x)\}_{1 \leq i \leq n}$,

— et une matrice de dispersion $\sigma(t,x) = \{\sigma_{ij}(t,x)\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$.

Le but est alors de donner un sens à équation différentielle stochastique (EDS en abrégé) :

$$\boxed{dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t} \tag{3.1}$$

ou encore coordonnées par coordonnées :

$$dX_t^{(i)} = b^{(i)}(t,X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,X_t)dB_t^{(j)}; \quad 1 \leq i \leq n,$$

avec B mouvement brownien d-dimensionel et où X est un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, à trajectoires continues.

Définition 3.1 *La dérive b et la matrice de diffusion σ sont les* coefficients *de l'EDS. La matrice $(d \times d)$ $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^*(t,x)$:*

$$a_{ik}(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)$$

est la matrice de diffusion.

Si la matrice de diffusion est nulle, une EDS est une équation différentielle ordinaire (EDO en abrégé) :

$$dX_t = b(t, X_t)dt \Longrightarrow X_t' = b(t, X_t).$$

Toute la théorie qui suit est donc une extension des résultats connus pour les EDO, notamment le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Pour résoudre ce problème, on fixe

— un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

— un mouvement brownien d-dimensionel $B = \{B_t;\ t \geq 0\}$,

— un vecteur aléatoire ξ, indépendant de $\mathcal{F}_\infty^B$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et avec pour distribution

$$\mu(\Gamma) = \mathbb{P}(\xi \in \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi la variable aléatoire ξ et le processus B sont indépendants. On crée

— la filtration (continue à gauche) : $\mathcal{G}_T = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^B = \sigma(\xi, B_s,\ 0 \leq s \leq t)$;

— l'ensemble des événements négligeables : $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega;\ \exists G \in \mathcal{G}_\infty$ with $N \subset G$ and $\mathbb{P}(G) = 0\}$;

— la filtration augmentée : $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$ and $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

Lemme 3.1 $B = \{B_t;\ t \geq 0\}$ *est encore un mouvement brownien d-dimensionel pour la filtration $\mathcal{F}$ et cette filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfait les conditions usuelles (voir définition 1.8).*

Preuve. La filtration grossie est construite expressement pour satisfaire les conditions usuelles. Et on vérifie directement que B satisfait les critères de la définition 1.13. □

Définition 3.2 (Solution d'une EDS) *Une* solution *(forte) d'une EDS sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, par rapport à un mouvement brownien B et avec condition initiale ξ, est un processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ tel que*

1. *X est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$;*
2. *$\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$;*
3. *$\mathbb{P}\left[\int_0^t \left(|b_i(s,x)| + \sigma_{ij}^2(s,x)\right) ds\right] = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$ and $t \geq 0$;*
4. *la version intégrale de l'EDS*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

est satisfaite presque sûrement.

Définition 3.3 (Unicité) *On parle d'*unicité *de la solution pour la paire (b, σ) si étant donnés*

— *B un mouvement brownien d-dimensionel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,*

— *ξ un vecteur aléatoire indépendant de B,*

— *$\{\mathcal{F}_t\}$ la filtration construite comme précédemment,*

— *X et $\tilde{X}$ deux solutions de l'EDS par rapport à B et de condition initiale ξ, alors $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t;\ t \geq 0) = 1$.*

Autrement dit, X et $\tilde{X}$ sont indistinguables.

3.1.1 Théorie d'Itô

Théorème 3.1 (Unicité) *Supposons que les coefficients b et σ soient localement lipschitziens en la variable d'espace ; i.e. pour tout entier $m \geq 1$ il existe une constante $K_m > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$, $\|x\| \leq m$ et $\|y\| \leq m$:*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_m \|x - y\|.$$

Alors il y a unicité des solutions pour la paire (b, σ).

Remarque : pour toute matrice de taille $(n \times d)$,

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2.$$

Preuve. Supposons que X et $\tilde{X}$ soient deux solutions définies pour tout $t \geq 0$. On définit les temps d'arrêt $\tau_m = \inf\{t \geq 0,\ \|X_t\| \geq m\}$ pour $m \geq 1$, de même pour $\tilde{X}$ et enfin $S_m = \tau_m \wedge \tilde{\tau}_m$. Il est clair que $\lim_{m \to +\infty} S_m = +\infty$, $\mathbb{P}$-p.s., et

$$X_{t\wedge S_m} - \tilde{X}_{t\wedge S_m} = \int_0^{t\wedge S_m} (b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u))du + \int_0^{t\wedge S_m} (\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u))dB_u.$$

En utilisant le fait que $\|v_1 + \ldots + v_k\|^2 \leq k^2(\|v_1\|^2 + \ldots + \|v_k\|^2)$, l'inégalité de Hölder et les propriétés de l'intégrale stochastique, on a pour $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|X_{t\wedge S_m} - \tilde{X}_{t\wedge S_m}\right\|^2 &\leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge S_m} \|b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u)\|du\right]^2 \\
&\quad + 4\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge S_m} (\sigma_{ij}(u, X_u) - \sigma_{ij}(u, \tilde{X}_u))dB_u^{(j)}\right]^2 \\
&\leq 4t\mathbb{E}\int_0^{t\wedge S_m} \|b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u)\|^2 du \\
&\quad + 4\mathbb{E}\int_0^{t\wedge S_m} \|\sigma_{ij}(u, X_u) - \sigma_{ij}(u, \tilde{X}_u)\|^2 du \\
&\leq 4(T+1)K_m^2 \int_0^t \mathbb{E}\left\|X_{u\wedge S_m} - \tilde{X}_{u\wedge S_m}\right\|^2 du.
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall avec $f(t) = \mathbb{E}\left\|X_{t\wedge S_m} - \tilde{X}_{t\wedge S_m}\right\|^2$ et on conclut que $\{X_{t\wedge S_m},\ t \geq 0\}$ et $\{\tilde{X}_{t\wedge S_m},\ t \geq 0\}$ sont des modifications l'un de l'autre et sont donc indistinguables (car continus). On fait tendre m vers $+\infty$ et on obtient le résultat. $\square$

Lemme 3.2 (de Gronwall) *Si une fonction continue f vérifie*

$$0 \leq f(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t f(s)ds; \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec $\beta \geq 0$ et $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ intégrable, alors

$$f(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 3.2 (Existence) *Supposons que les coefficients b et σ soient globalement lipschitziens et à croissance au plus linéaire*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\|x-y\|,$$

$$\|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2),$$

pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, avec K constante positive. Supposons aussi que $\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$.

Alors il existe un processus adapté et continu X qui est la solution de l'EDS. De plus pour tout $T > 0$, il existe une constante $C = C(K,T)$ telle que

$$\mathbb{E}\|X_t\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Preuve. La démonstration consiste à utiliser la même technique de point fixe que pour les EDO. On définit une suite de processus par $X_t^{(0)} = \xi$ et

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})dB_s, \quad 0 \leq t < +\infty; \tag{3.2}$$

pour $k \geq 0$. Ces processus sont tous continus et adaptés à la filtration de départ et on va montrer que cette suite de processus converge vers un processus limite X solution de l'EDS.

Tout d'abord, on montre que pour tout $T > 0$, il existe une constante positive C dépendant uniquement de K et de T telle que pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left\|X_t^{(k)}\right\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct}. \tag{3.3}$$

En effet c'est vrai pour $k = 0$ et d'après (3.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\|X_t^{(k+1)}\right\|^2 &\leq 9\mathbb{E}\|\xi\|^2 + 9T\mathbb{E}\int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds + 9\mathbb{E}\int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2 ds \\ &\leq 9\mathbb{E}\|\xi\|^2 + 18(1+T)K^2 \int_0^t (1 + \mathbb{E}\|X_s^{(k)}\|^2) ds. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E}\left\|X_t^{(k+1)}\right\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2) + C\int_0^t \mathbb{E}\|X_s^{(k)}\|^2 ds.$$

Soit en itérant :

$$\mathbb{E}\left\|X_t^{(k+1)}\right\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)\left[1 + Ct + \frac{(Ct)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Ct)^{k+1}}{(k+1)!}\right].$$

L'inéquation (3.3) s'en déduit.

Maintenant on a : $X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} = \Gamma_t + M_t$ avec

$$\Gamma_t = \int_0^t (b(s, X_s^{(k)}) - b(s, X_s^{(k-1)}))ds, \quad M_t = \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)}))dB_s.$$

L'inéqualité (3.3), et l'hypothèse de croissance sur σ, impliquent que M est une martingale de carré intégrable (en fait un vecteur de martingales). Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\max_{0\le s\le t} \|M_s\|^2\right] &\le \Lambda_1 \mathbb{E} \int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\|^2 ds \\ &\le \Lambda_1 K^2 \mathbb{E} \int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds. \end{aligned}$$

La constante Λ_1 ici est une constante universelle et provient des inégalités dites de Burkholder-Davis-Gundy. D'un autre côté, on a

$$\mathbb{E}\|B_t\|^2 \le K^2 t \mathbb{E} \int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds.$$

Donc pour tout $0 \le t \le T$:

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le s\le t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right] \le 4K^2(\Lambda_1 + T)\mathbb{E} \int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds.$$

On pose $L = 4K^2(\Lambda_1 + T)$ et on itère l'inégalité précédente :

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le s\le t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right] \le \frac{(Lt)^k}{k!} \mathbb{E}\left[\max_{0\le t\le T} \|X_t^{(1)} - \xi\|^2\right] = \frac{(Lt)^k}{k!} C^*. \tag{3.4}$$

Or avec (3.3), $C^* < +\infty$. De plus la relation (3.4) et l'inégalité de Čebyšev donnent

$$\mathbb{P}\left[\max_{0\le t\le T} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|^2 > \frac{1}{2^{k+1}}\right] \le 4C^* \frac{(4Lt)^k}{k!}. \tag{3.5}$$

Le terme de droite dans l'inégalité est sommable. Du lemme de Borel-Cantelli, on déduit qu'il existe un événement $\Omega^* \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ et une v.a. à valeurs entières $N(\omega)$ tels que pour tout $\omega \in \Omega^*$

$$\max_{0\le t\le T} \|X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega)\|^2 \ge 2^{-(k+1)}, \quad \forall k \ge N(\omega).$$

Ainsi

$$\max_{0\le t\le T} \|X_t^{(k+m)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega)\|^2 \ge 2^{-k}, \quad \forall m \ge 1,\ \forall k \ge N(\omega).$$

La suite de trajectoires continues $\{X_t^{(k)}(\omega);\ 0 \le t \le T\}$ est donc convergente pour la norme infinie dans l'espace des fonctions continues. Et donc il existe une limite continue $\{X_t(\omega);\ 0 \le t \le T\}$ pour tout $\omega \in \Omega^*$. T étant pris arbitrairement, on en déduit l'existence d'un processus continu X tel que pour presque tout ω, $X_\cdot^{(k)}(\omega)$ converge vers $X_\cdot(\omega)$ uniformément sur tout compact de $[0, +\infty[$. Il est alors aisé de voir que X est une solution de l'EDS (3.1) et que X vérifie aussi (3.3). $\square$

Proposition 3.1 (Comparaison) *Supposons que sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *satisfaisant les conditions usuelles, on ait un mouvement brownien* B *de dimension 1 et deux processus adaptés* $X^{(j)}$, $j = 1, 2$, *t.q. pour* $t \ge 0$ *:*

$$X_t^{(j)} = X_0^{(j)} + \int_0^t b^{(j)}(s, X_s^{(j)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(j)})dW_s.$$

Supposons que

1. σ soit lipschitzienne,

2. ou b^1 ou b^2 soit lipschitzienne,

3. $X_0^{(1)} \leq X_0^{(2)}$ p.s.

4. $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $b^{(1)}(t,x) \leq b^{(2)}(t,x)$.

Alors $\mathbb{P}(X_t^{(1)} \leq X_t^{(2)},\ \forall t \geq 0) = 1$.

Preuve. Admise. □

3.1.2 Cas où on sait résoudre

Comme pour les EDO, le **cas linéaire** est celui qu'on sait bien résoudre.

— Solutions de l'équation $b(t,x) = -ax$ et $\sigma(t,x) = \sigma$

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s.$$

C'est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir exercice 3.4).

— Solutions de l'équation $b(t,x) = \mu_t x$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x$ avec $\int_0^T |\mu_t| dt < \infty$ et $\int_0^T |\sigma_t|^2 dt < \infty$:

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right).$$

— Solutions de l'équation affine :

$$dX_t = X_t[b_t dt + \sigma_t dB_t] + c_t dt + \delta_t dB_t.$$

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t \left[X_0 + \int_0^t Z_s^{-1} (\tilde{c}_s ds + \delta_s dB_s) \right],\ \tilde{c} = c - \sigma\delta, \\ \text{avec} \qquad Z_t &= \exp\left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right). \end{aligned}$$

Preuve. Elle consiste à vérifier via la formule d'Itô que les formes proposées vérifient l'équation et on applique le théorème d'unicité. □

Hormis le cas linéaire, la résolution explicite doit plus ou moins se faire au cas par cas. Néanmoins quand $d = n = 1$, on peut utiliser la transformation de Doss.

Proposition 3.2 *Supposons que σ soit de classe C^1, avec σ' lipschitzienne et bornée, b étant lipschitzienne. L'EDS $dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$ a une unique solution, qui peut s'écrire*

$$X_t(\omega) = u(Y_t(\omega), W_t(\omega));\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega$$

avec

1. *$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solution de l'EDO :*

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sigma(u(x_1, x_2)), \quad u(x_1, 0) = x_1,$$

2. *et Y solution de l'EDO aléatoire $\dfrac{d}{dt} Y_t(\omega) = f(Y_t(\omega), W_t(\omega))$ avec*

$$f(x_1, x_2) = \exp\left[- \int_0^{x_2} \sigma'(u(x_1, y)) dy \right] \left[b(u(x_1, x_2)) - \frac{1}{2}(\sigma\sigma')(u(x_1, x_2)) \right].$$

Preuve. À vérifier. □

3.1.3 Connexion avec les EDP (hors programme)

Considérons l'EDS

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}) dB_r; \ t \leq s < \infty \tag{3.6}$$

sous les hypothèses :

1. les coefficients $b_i, \sigma_{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continus et satisfont l'hypothèse de croissance :
$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2);$$
2. l'équation (3.6) a une unique solution $X^{t,x}$, pour tout couple (t, x).

En théorie des équations aux dérivées partielles (EDP), le problème de Cauchy est le suivant. Étant donnés

— $T > 0$;

— des fonctions continues $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ tels que
$$\forall 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, \ |f(x)| + |g(t, x)| \leq L(1 + \|x\|^{2\lambda});$$

on cherche une fonction continue $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que v soit de classe $C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R}^n)$ et satisfasse :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t} + kv = \mathcal{A}_t v + g; & \text{dans } [0, T) \times \mathbb{R}^d; \\ v(T, .) = f; & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ici $\mathcal{A}_t$ est l'opérateur qui agit sur les fonctions de classe C^2 comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_t \phi)(x) = \mathcal{A}_t \phi(x) &= \frac{1}{2} \text{Trace}\left(\sigma^*(t, x) D^2 \phi(x) \sigma(t, x) \right) + b(t, x) \nabla \phi(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k}(x) \sigma_{ki}(t, x) + \sum_{i=1}^n b^{(i)}(t, x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Théorème 3.3 (Feynman-Kac (1949)) *Sous les hypothèses précédentes, supposons que v soit solution du problème de Cauchy avec une croissance polynomiale :*

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t,x)| \leq M(1 + \|x\|^{2\mu}).$$

Alors v admet la représentation stochastique :

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathbb{E}^{t,x}\left[f(X_T) \exp\left(- \int_t^T k(r, X_r) dr \right) \right. \\ & \qquad \left. + \int_t^T g(r, X_r) \exp\left(- \int_t^r k(s, X_s) ds \right) dr \right] \end{aligned}$$

sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Preuve. Il faut appliquer la formule d'Itô à $v(s, X_s^{t,x})$ entre $s = t$ et $s = T$. □

Dans le théorème de Feynman-Kac, on peut affaiblir l'hypothèse de régularité de la solution v (théorie de Itô-Krylov). On peut aussi l'étendre à des cas non linéaires, qu'on appelle EDP quasi-linéaires. Très récemment en 2010, N. Touzi et ses coauteurs l'ont même étendu au cas complètement non linéaire.

Un autre problème en EDP peut avoir sa représentation probabiliste : le problème de Dirichlet. Ici on se donne

— D ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$,

— b et σ indépendantes de t,

— $\mathcal{A}$ elliptique : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, où a est la matrice $\sigma^* \sigma$,

— $k : \bar{D} \to [0, \infty)$, $g : \bar{D} \to \mathbb{R}$ et $f : \partial D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction continue $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ t.q. u soit de classe $C^2(D)$ et satisfasse :

$$\begin{cases} \mathcal{A}u - ku = -g; & \text{dans } D; \\ u = f; & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Proposition 3.3 *Soit u une solution du problème de Dirichlet sur un ouvert D, et soit $\tau_D = \inf\{t \geq 0;\ X_t \notin D\}$. Si*

$$\mathbb{E}^x \tau_D < \infty; \quad \forall x \in D, \tag{3.7}$$

alors on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \exp\left(- \int_0^{\tau_D} k(X_s) ds \right) \right. \\ & \qquad \left. + \int_0^{\tau_D} g(X_t) \exp\left(- \int_0^t k(X_s) ds \right) dt \right] \end{aligned}$$

pour tout $x \in \bar{D}$.

Remarque : (3.7) est vraie si pour un certain $1 \leq j \leq n$, $\displaystyle\min_{x \in \bar{D}} a_{jj}(x) > 0$.

3.2 Théorème de Girsanov

Ici on a un espace de référence $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. C'est la probabilité historique en finance.

Définition 3.4 *Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est* un changement de probabilité *s'il existe une v.a. Y positive telle que*

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_A), \ \ si\ A \in \mathcal{F}.$$

Y est la densité *ou la* vraisemblance *de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. On note*

$$\mathbb{Q} = Y\mathbb{P}, \ \ ou\ d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}, \ \ ou\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y.$$

Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes ($\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$) si la v.a. Y est strictement positive $\mathbb{P}$-p.s., ce qui entraîne que $\mathbb{P}$ est un changement de probabilité par rapport à $\mathbb{Q}$ de densité Y^{-1}.

Si $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$, on écrit $Y = e^Z$, Z étant la log-vraisemblance. On se donne aussi

- des événements mesurables par rapport à une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$;
- et $\mathbb{Q}$ probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$, de densité Y $\mathcal{F}$-mesurable.

On rappelle que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{G})$ avec Z v.a. positive ou intégrable est l'unique v.a. $\mathcal{G}$-mesurable qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{G})\mathbf{1}_A).$$

Théorème 3.4 *La restriction de $\mathbb{Q}$ à la tribu $\mathcal{G}$ admet une densité par rapport à $\mathbb{P}$ donnée par $\hat{Y} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})$. Et la règle de Bayes donne*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY|\mathcal{G})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})}.$$

Preuve. Il faut vérifier. Pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\hat{Y}\mathbf{1}_A).$$

De même pour la règle de Bayes

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY|\mathcal{G})\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\hat{Y}\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY|\mathcal{G})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})}\mathbf{1}_A\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY|\mathcal{G})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})}\mathbf{1}_A\right).$$

□

3.2.1 Pour le mouvement brownien

Commençons par le cas gaussien.

Proposition 3.4 *Soit U une v.a. gaussienne de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. Posons*

$$Y = \exp\left[\lambda(U-m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right].$$

Y est une v.a. positive d'espérance 1, qui définit une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle U est une v.a. gaussienne de variance σ^2, et de moyenne $m_{\mathbb{Q}} = m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma^2$.

Preuve. Que Y soit d'espérance 1 est du au calcul de transformée de Laplace d'une variable gaussienne. Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, la v.a. U admet une loi de densité donnée par

$$\exp\left[\lambda(x-m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right),$$

qui se transforme en

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m-\lambda\sigma^2)^2\right),$$

d'où le résultat. □

Ce résultat peut s'interpréter ainsi. Sous la probabilité $\mathbb{P}$, la v.a. translatée $U + \lambda\sigma^2$ est gaussienne de variance σ^2 et de moyenne $m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma^2 = m_{\mathbb{Q}}$. Elle a la même loi que la v.a. U sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Autrement dit, pour toute fonction f positive

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f(U+\lambda\sigma^2)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f(U)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\lambda(U-m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right) f(U)\right].$$

Ce résultat s'étend aussi au cas vectoriel.

Proposition 3.5 *Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n, U)$ un vecteur gaussien. Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, de densité Y par rapport à $\mathbb{P}$, où*

$$Y = \exp(U - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(U) - \frac{1}{2} Var^{\mathbb{P}}(U)),$$

le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est gaussien, de même matrice de covariance sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$, et de vecteur des espérances

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X_i) + Cov^{\mathbb{P}}(X_i, U).$$

Théorème 3.5 (Formule de Cameron-Martin) *Soit B un mouvement brownien par rapport à une probabilité $\mathbb{P}$ et f une fonction de $L^2([0,T])$. La v.a.*

$$L_T = \exp\left[\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f^2(s)ds\right]$$

est une densité de probabilité qui définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle le processus $\{B_t^{\mathbb{Q}} = B_t - \int_0^{t\wedge T} f(s)ds,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien.

Autrement dit sous $\mathbb{Q}$, B est un processus d'Itô :

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)\mathbf{1}_{s\leq T} ds.$$

Preuve. On applique la proposition précédente avec $U = \int_0^T f(s)dB_s$, de loi gaussienne centrée de variance $\int_0^T f^2(s)ds$, en remarquant que

$$\mathrm{Cov}(U, B_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(B_t \int_0^T f(s)dB_s) = \int_0^{t\wedge T} f(s)ds,$$

d'après le calcul de Wiener. □

Passons maintenant au cas général. Soit donc

- un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
- un mouvement brownien $\{B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)});\ t \geq 0\}$,
- avec une filtration satisfaisant les conditions usuelles.
- $\{X_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)});\ t \geq 0\}$: un vecteur de processus adaptés t.q.

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \left(X_t^{(i)}\right)^2 dt < \infty\right] = 1;\ 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq T < \infty.$$

On pose

$$Z_t(X) = \exp\left[\sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|X_s^{(i)}\right\|^2 ds\right].$$

Z est une martingale locale continue t.q.

$$Z_t(X) = 1 + \sum_{i=1}^d \int_0^t Z_s(X) X_s^{(i)} dB_s^{(i)}.$$

En général $Z(X)$ n'est pas une martingale. On fait donc l'hypothèse que $Z(X)$ est une martingale.

- Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}Z_t(X) = 1$.
- On définit une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z_T(X)), \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

- Cette famille de probabilités satisfait la condition de consistance :

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \tilde{\mathbb{P}}_t(A), \quad A \in \mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 3.6 (Girsanov (1960)) *Supposons que $Z(X)$ soit une martingale. On définit le processus $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)});\ t \geq 0\}$ par*

$$W_t^{(i)} = B_t^{(i)} - \int_0^t X_s^{(i)} ds; \quad 1 \leq i \leq d,\ t \geq 0.$$

Pour tout $T \in [0, \infty)$ fixé, le processus $\{W_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien d-dimensionel sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$.

Preuve. Admise. $\square$

Vérifier que $Z(X)$ est une martingale n'est généralement pas simple. Donnons ici simplement une condition suffisante.

Proposition 3.6 (Novikov (1972)) *Si X vérifie*

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|X_t\|^2 \, dt\right) < \infty, \quad T \geq 0,$$

alors $Z(X)$ est une martingale.

3.2.2 For a compound Poisson process

Poisson process. Assume that

- — N is a Poisson process on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ relative to a filtration $\{\mathcal{F}_t\}$;
- — λ is its intensity ;
- — $M_t = N_t - \lambda t$ denotes the associated compensated Poisson process. Remember, It is a martingale under $\mathbb{P}$.
- — $\tilde{\lambda}$ is any positive real number.

Lemma 3.1 *The process Z defined by*

$$Z(t) = \exp\left((\lambda - \tilde{\lambda})t\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_t} \tag{3.8}$$

satisfies

$$dZ(t) = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} Z(t-) dM_t.$$

Therefore Z is a martingale under $\mathbb{P}$ and $\mathbb{E}(Z(t)) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Proof. Define $X_t = \dfrac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} M_t$. The continuous part of X is

$$X_t^c = (\lambda - \tilde{\lambda})t \Rightarrow \langle X \rangle_t^c = 0.$$

The jump part is : $J_t = \dfrac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} N_t$. Therefore $1 + \Delta X_t = \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{\Delta N_t}$. Now we use Propostion 2.5 with a Lévy process X of finite variations to obtain :

$$Z_t = \mathcal{E}(X)_t = \exp((\lambda - \tilde{\lambda})t) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) = \exp\left((\lambda - \tilde{\lambda})t\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_t}$$

and since M is a martingale, Defintion 2.3 shows that Z is a martingale. $\square$

For some $T > 0$, let us define

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z(T)) \ \text{ for } A \in \mathcal{F}_T.} \tag{3.9}$$

Proposition 3.1 *Under the probability $\widetilde{\mathbb{P}}$, the process N is a Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}$.*

Proof. We use the Laplace transform of N under $\widetilde{\mathbb{P}}$: for any $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}(e^{uN_t}) &= \mathbb{E}(e^{uN_t} Z_t) = e^{(\lambda-\tilde{\lambda})t}\mathbb{E}\left[e^{uN_t}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_t}\right] = e^{(\lambda-\tilde{\lambda})t}\mathbb{E}\left[\exp\left[\left(u + \ln\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)\right)N_t\right]\right] \\
&= e^{(\lambda-\tilde{\lambda})t}\exp\left[\lambda t\left(e^{u+\ln\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)} - 1\right)\right] \\
&= \exp(\tilde{\lambda}(e^u - 1)).
\end{aligned}$$

This proves exactly that under $\widetilde{\mathbb{P}}$, the process N is a Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}$. □

Compound Poisson process with discrete jumps. We deal now with a compound Poisson process Q with

- N a Poisson process with intensity λ ;
- $Y_1, Y_2, \ldots$ sequence of i.i.d. discrete random variables, independent of N

$$\mathbb{P}(Y_i = y_m) = p(y_m) > 0,\ m = 1, \ldots, M; \quad \text{and } \sum_{m=1}^{M} p(y_m) = 1;$$

- $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$

We decompose the process Q as follows.

- Denote by N^m the number of jumps of Q with size y_m. These are independent Poisson processes with intensity $\lambda_m = \lambda p(y_m)$.
- Write $N_t = \sum_{m=1}^{M} N_t^m$, $Q_t = \sum_{m=1}^{M} y_m N_t^m$.

Let $\tilde{\lambda}_m$, $m = 1, \ldots, M$, be positive numbers and

$$Z_m(t) = \exp\left((\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right)^{N_t^m}, \qquad Z(t) = \prod_{m=1}^{M} Z_m(t).$$

Lemma 3.2 *The process Z is a martingale under $\mathbb{P}$. In particular $\mathbb{E}(Z(t)) = 1$.*

Proof. Left as an exercise (see Exercise 2.9). □

For some $T > 0$, we define as before a new probability : $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z(T))$ for $A \in \mathcal{F}_T$.

Proposition 3.2 *Under $\tilde{\mathbb{P}}$, Q is a compound Poisson process with intensity $\tilde{\lambda} = \sum_{m=1}^{M} \tilde{\lambda}_m$ and Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$ are i.i.d. with $\tilde{\mathbb{P}}(Y_i = y_m) = \tilde{p}(y_m) = \dfrac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}}$.*

Proof. Once again we use the Laplace transform. For any $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(e^{uQ_t}) &= \mathbb{E}(e^{uQ_t} Z_t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(u \sum_{m=1}^{M} y_m N_t^m\right) \prod_{m=1}^{M} e^{(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t} \left(\frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right)^{N_t^m}\right] \\
&= \prod_{m=1}^{M} e^{(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t} \mathbb{E} \exp\left[\left(u y_m + \ln \frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right) N_t^m\right] \\
&= \prod_{m=1}^{M} e^{(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t} \exp\left\{\lambda_m t \left[\exp\left(u y_m + \ln \frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right) - 1\right]\right\} \\
&= \prod_{m=1}^{M} \exp\left\{\tilde{\lambda}_m t \left[\exp\left(u y_m\right) - 1\right]\right\} = \prod_{m=1}^{M} \exp\left(\tilde{\lambda} t \tilde{p}(y_m) e^{u y_m} - \tilde{\lambda}_m t\right) \\
&= \exp\left[\tilde{\lambda} t \left(\sum_{m=1}^{M} \tilde{p}(y_m) e^{u y_m} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

This achieves the proof. □

Remark that we can write

$$Z(t) = \prod_{m=1}^{M} Z_m(t) = \prod_{m=1}^{M} \exp\left((\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t\right) \left(\frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right)^{N_t^m} = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \prod_{i=1}^{N(t)} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{p}(Y_i)}{\lambda p(Y_i)}.$$

General case. We can extend the previous result to the density case. Assume that Y_i has a density f.

— Let $\tilde{f}$ an other density such that $f(y) = 0 \Rightarrow \tilde{f}(y) = 0$,

— and $\tilde{\lambda} > 0$.

We put

$$Z(t) = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \prod_{i=1}^{N(t)} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}.$$

Proposition 3.3 *Z is a martingale under $\mathbb{P}$. Under the probability measure $\tilde{\mathbb{P}}$ defined by (3.9) with the appropriated Z, Q is a compound Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}$ and Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$ are i.i.d. with density $\tilde{f}$.*

Proof. First prove that Z is a martingale. Define

$$J_t = \prod_{i=1}^{N(t)} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)} = J_{t-} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_{N_t})}{\lambda f(Y_{N_t})} = J_{t-} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)}.$$

Now we consider the following compound Poisson process :

$$H_t = \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}.$$

We have : $\Delta H_t = \dfrac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)}$ and

$$\mathbb{E}\frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)} = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{f}(y)}{f(y)} f(y)dy = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}.$$

Therefore $M_t = H_t - \tilde{\lambda}t$ is a martingale and

$$\Delta J_t = J_{t^-}\left(\frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)} - 1\right) = J_{t^-}(\Delta H_t - \Delta N_t).$$

Now the Itô formula implies :

$$\begin{aligned}
Z_t &= Z_0 + \int_0^t J_{s^-}(\lambda - \tilde{\lambda})e^{(\lambda-\tilde{\lambda})s}ds + \int_0^t e^{(\lambda-\tilde{\lambda})s}dJ_s \\
&= Z_0 + \int_0^t J_{s^-}(\lambda - \tilde{\lambda})e^{(\lambda-\tilde{\lambda})s}ds + \int_0^t e^{(\lambda-\tilde{\lambda})s}J_{s^-}(dH_s - dN_s) \\
&= 1 + \int_0^t Z_{s^-}d(H_s - \tilde{\lambda}s) - \int_0^t Z_{s^-}d(N_s - \lambda s).
\end{aligned}$$

Hence Z is a martingale with

$$\Delta Z_t = Z_{t^-}\Delta H_t - Z_{t^-}\Delta N_t.$$

Now we have to prove that

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}e^{uQ_t} = \exp\left(\tilde{\lambda}t(\tilde{\phi}_Y(u) - 1)\right), \qquad \tilde{\phi}_Y(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{uy}\tilde{f}(y)dy.$$

We define the process

$$X_t = \exp\left(uQ_t - \tilde{\lambda}t(\tilde{\phi}_Y(u) - 1)\right),$$

and we prove that XZ is a $\mathbb{P}$-martingale. We apply the Itô formula to obtain :

$$X_tZ_t = 1 + \int_0^t X_{s^-}dZ_s + \int_0^t Z_{s^-}dX_s + \langle X, Z\rangle_t. \tag{3.10}$$

On the right hand side, the first term is a martingale. Now remark that $\Delta X_t = X_{t^-}\left(e^{u\Delta Q_t} - 1\right)$. Hence

$$\int_0^t Z_{s^-}dX_s = -\tilde{\lambda}(\tilde{\phi}_Y(u) - 1)\int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}ds + \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}\left(e^{u\Delta Q_s} - 1\right).$$

Moreover

$$\langle X, Z\rangle_t = \sum_{0<s\leq t}\Delta X_s\Delta Z_s = \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}\left(e^{u\Delta Q_s} - 1\right)(\Delta H_s - \Delta N_s).$$

Thus

$$\begin{aligned}
\int_0^t Z_{s^-}dX_s + \langle X, Z\rangle_t &= -\tilde{\lambda}(\tilde{\phi}_Y(u) - 1)\int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}ds + \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}\left(e^{u\Delta Q_s} - 1\right) \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}\left(e^{u\Delta Q_s} - 1\right)(\Delta H_s - \Delta N_s) \\
&= \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}e^{u\Delta Q_s}\Delta H_s - \tilde{\lambda}\tilde{\phi}_Y(u)\int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}ds \\
&\quad - \sum_{0<s\leq t} X_{s^-}Z_{s^-}\Delta H_s + \tilde{\lambda}\int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}ds.
\end{aligned}$$

The last equality can be written as follows :

$$(3.11)\qquad \int_0^t Z_{s^-}dX_s + \langle X,Z\rangle_t = \int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}\left(dV_s - \tilde\lambda\tilde\phi_Y(u)ds\right) - \int_0^t X_{s^-}Z_{s^-}\left(dH_s - \tilde\lambda ds\right)$$

with $M_t = H_t - \tilde\lambda t$ martingale and $V_t = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{uY_i}\frac{\tilde\lambda\tilde f(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}$. Indeed $\Delta V_t = e^{u\Delta Q_t}\Delta H_t$. Finally $\mathbb{E}\left(e^{uY_i}\frac{\tilde\lambda\tilde f(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}\right) = \frac{\tilde\lambda}{\lambda}\tilde\Phi(u)$. Combining Equations (3.10) and (3.11), we obtain that XZ is a $\mathbb{P}$-martingale, hence $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(X_t) = \mathbb{E}(X_tZ_t) = 1$. □

The compound Poisson case can be resumed as follows.

Proposition 3.4 *Let $(X,\mathbb{P})$ and $(X,\mathbb{Q})$ be compound Poisson processes on $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ with Lévy measures $\nu^{\mathbb{P}}$ and $\nu^{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$ are equivalent if and only if $\nu^{\mathbb{P}}$ and $\nu^{\mathbb{Q}}$ are equivalent. In this case the density is*

$$\exp\left[(\lambda^{\mathbb{P}} - \lambda^{\mathbb{Q}})T + \sum_{0<s\le T}\phi(\Delta X_s)\right],$$

where $\lambda^{\mathbb{P}} = \nu^{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$, $\lambda^{\mathbb{Q}} = \nu^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ and $\phi = \ln\frac{d\nu^{\mathbb{Q}}}{d\nu^{\mathbb{P}}}$.

Proof. The if part is a consequence of the previous results. Now the only if part can be proved as follows. Assume that $\nu^{\mathbb{P}}$ and $\nu^{\mathbb{Q}}$ are not equivalent. Then we can find either a set B such that $\nu^{\mathbb{P}}(B) > 0$ and $\nu^{\mathbb{Q}}(B) = 0$ or a set B' such that $\nu^{\mathbb{P}}(B') = 0$ and $\nu^{\mathbb{Q}}(B') > 0$. Suppose that we are in the first case. Then the set of trajectories having at least one jump the size of which is in B has positive $\mathbb{P}$-probability and zero $\mathbb{Q}$-probability, which shows that these two measures are not equivalent. □

3.2.3 For a jump-diffusion process

Assume now that on the same space $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

— W is a Brownian motion ;

— $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ is a compound Poisson process with N Poisson process with intensity λ, and Y_i, $i\in\mathbb{N}^*$are i.i.d. random variables with density f.

Let $\tilde f$ be a density such that $f(y) = 0 \Rightarrow \tilde f(y) = 0$, $\tilde\lambda > 0$, and Θ an adapted process. We define

$$\begin{aligned} Z_t^1 &= \exp\left(-\int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 du\right), \\ Z_t^2 &= e^{(\lambda-\tilde\lambda)t}\prod_{i=1}^{N(t)}\frac{\tilde\lambda\tilde f(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}, \\ Z_t &= Z_t^1 Z_t^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.3 *Z is a martingale under $\mathbb{P}$. In particular $\mathbb{E}(Z_t) = 1$, $\forall t \geq 0$.*

Proof. The proof is straightforward if Θ just depends on W. Recall that from Proposition 2.3, the two processes W and Q are independent. Therefore Z^1 and Z^2 are two independent martingales, and thus Z is a martingale.

Now in general let us use the Itô formula to obtain :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z^2_{s-} dZ^1_s + \int_0^t Z^1_{s-} dZ^2_s + \langle Z^1, Z^2 \rangle_t.$$

Now since Z^1 is continuous and Z^2 is a pure jump quadratic martingale, $\langle Z^1, Z^2 \rangle_t = 0$. $\square$

For some $T > 0$, we put $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z(T))$ for $A \in \mathcal{F}_T$.

Theorem 3.1 *Under $\tilde{\mathbb{P}}$,*

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_u du$$

is a Brownian motion and Q is a compound Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}$ and Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$ i.i.d. with intensity $\tilde{f}$. Furthermore $\tilde{W}$ and Q are independent.

Proof. Here we want to show that

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} e^{u_1 \tilde{W}_t + u_2 Q_t} = \exp\left(\frac{1}{2} u_1^2 t\right) \exp\left(\tilde{\lambda} t (\tilde{\phi}_Y(u_2) - 1)\right).$$

We define

$$\begin{aligned} X^1_t &= \exp\left(u_1 \tilde{W}_t - \frac{1}{2} u_1^2 t\right), \\ X^2_t &= \exp\left(u_2 Q_t - \tilde{\lambda} t (\tilde{\phi}_Y(u_2) - 1)\right). \end{aligned}$$

From the proof of Theorem 3.3, we know that $X^2 Z^2$ is a $\mathbb{P}$-martingale. Moreover

$$d(X^1 Z^1)_t = (u_1 - \Theta_t) X^1_t Z^1_t dW_t,$$

which implies that $X^1 Z^1$ is a martingale. Since $\langle X^1 Z^1, X^2 Z^2 \rangle = 0$,

$$(X^1 X^2 Z^1 Z^2)_t = 1 + \int_0^t (X^1 Z^1)_{s^-} d(X^2 Z^2)_s + \int_0^t (X^2 Z^2)_{s^-} d(X^1 Z^1)_s$$

which proves that $X^1 X^2 Z^1 Z^2$ is a $\mathbb{P}$-martingale. $\square$

3.3 Exercices

Équations différentielles stochastiques

Exercice 3.1 Soit B un mouvement brownien et $g(x) = e^{ix} = (\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $Y_t = (Y_t^1, Y_t^2) = g(B_t)$ est la solution de l'équation stochastique différentielle stochastique

$$dY = -\frac{1}{2} Y_t dt + K Y_t dB_t, \quad \text{où } K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2 Soit B un mouvement brownien. Vérifier que les processus donnés résolvent les EDS correspondantes.

1. $X_t = e^{B_t}$ résout $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t$.
2. $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ résout $dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t$.

Exercice 3.3 Soient B^1, B^2 et B des mouvements browniens. Résoudre les EDS suivantes (est-ce que les solutions sont uniques ?) :

1. $\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_t^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}$.
2. $dX_t = X_t dt + dB_t$.
3. $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$.
4. $dX_t = (m - X_t) dt + \sigma dB_t$ où m et σ sont constantes.

Exercice 3.4 Soit B un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Résoudre l'EDS d'Orstein-Uhlenbeck

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \tag{3.12}$$

où μ et σ sont constantes. La solution est appelée le processus Orstein-Uhlenbeck.

1. Montrer que X est un processus gaussien et calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{Var}\,(X_t)$.
2. Justifier que $\int_0^t X_s ds$ est un processus gaussien. Calculer $\mathbb{E}[\exp(\int_0^t X_s ds)]$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ et $\mathrm{Var}\,(X_t | \mathcal{F}_s)$ pour $t > s$.
4. Soit X la solution de (3.12), et ϕ une fonction de class C^2. Ecrire la formule d'Itô pour $Z_t = \phi(X_t)$. En déduire que si $\phi(x) = \int_0^x \exp(-\mu \frac{y^2}{\sigma^2}) dy$, alors

$$Z_t = \sigma \int_0^t \exp(-\mu \frac{B_s^2}{\sigma^2}) dB_s + \phi(x).$$

   Z est-elle une martingale de carré intégrable ?

5. Soit λ fixé, calculer
$$\Phi(t,x) = E(e^{\lambda X_t^2}).$$
Montrer que Φ est la solution d'une equation aux dérivées partielles. Soit $\Psi(t,x) = \ln \Phi(t,x)$. Montrer que
$$\Psi(t,x) = x^2 a(t) + b(t)$$
avec $a'(t) = -2a(t)(\mu + \sigma^2 a(t))$ et $b'(t) = -\sigma^2 a(t)$.

Exercice 3.5 Soit B un mouvement brownien et a, α, b, β des constantes réelles. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'EDS

$$dX_t = (a + \alpha X_t)dt + (b + \beta X_t)dB_t, \quad X_0 = x. \tag{3.13}$$

1. Montrer que (3.13) admet une unique solution.
2. On note $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$. Montrer que $m(t)$ est la solution de l'EDO
$$y' - \alpha y = a, \quad y(0) = x. \tag{3.14}$$
3. Ecrire la formule d'Ito pour X^2 où X est la solution de (3.13).
4. En déduire que $M(t)$ est l'unique solution de l'EDO
$$y' - (2\alpha + \beta^2)y = 2(a + b\beta)m + b^2, \quad y(0) = x^2. \tag{3.15}$$
où m est la solution de (3.14) (on admettera que l'intégrale qui intervient est une martingale).
5. Résoudre (3.14) et puis (3.15).

Théorème de Girsanov

Exercice 3.6 Soient B un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ rélativement à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Soit en outre un procéssus $(\mu_t)_{t\geq 0}$ continu et borné et $\mathbb{F}$-adapté.

1. Vérifier que le processus M défini par
$$M_t := \exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds \right)$$
est une $\mathbb{P}$-martingrale.
2. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $d\mathbb{Q} = M_T d\mathbb{P}$. Montrer que, si $T \geq t$ et si X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable $\mathbb{Q}$-intégrable, alors
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = M_t^{-1} E_{\mathbb{P}}[X M_T|\mathcal{F}_t].$$

3. En déduire que M^{-1} est une $\mathbb{Q}$-martingale.
4. Soit $(\phi_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté continu borné et $L_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \mu_s \phi_s ds$. Montrer que L est une $\mathbb{Q}$-martingale.
5. On pose $Z_t = M_t L_t$, calculer dZ_t et montrer que Z_t est une $\mathbb{P}$-martingale.

Exercice 3.7 Soit B un mouvement brownien rélativement à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et θ un processus continue, borné et $\mathbb{F}$-adapté. Soit

$$H_t = \exp(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds).$$

On note $\mathbb{Q}$ la probabilité telle que $d\mathbb{Q} = H_t d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_T \ln H_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds).$$

Chapitre 4

Application en finance

C'est Black et Scholes (et Merton) qui ont amorcé en 1975 la théorie de valorisation et de couverture d'un actif. Schématiquement la valeur d'un actif financier est donnée par la valeur d'un portefeuille de réplication de cet actif. Dans ce chapitre nous développons cette théorie.

4.1 Cadre, autofinancement, arbitrage

Dans toute la suite, nous ferons les hypothèses suivantes sur le marché.

- Il n'y a pas de coûts de transaction pour la vente ou l'achat de titres.
- Les ventes à découvert illimité sont acceptées et les actifs sont indéfiniment fractionnables.
- Sauf mention du contraire, les titres ne versent pas de dividende.
- À tout instant, il existe des vendeurs et des acheteurs pour tous les titres du marché.

C'est donc un marché parfaitement liquide sans friction.

À cela s'ajoute le « modèle d'incertain », qui est un espace probabilisé de référence constitué de

- un ensemble Ω (tous les états du monde) ;
- une tribu $\mathcal{F}$ (information globale disponible sur le marché) ;
- une filtration (continue à droite si nécessaire) qui décrit l'information disponible à l'instant t ;
- une classe $\mathcal{N}$ des événements que le marché considère comme impossibles ;
- une probabilité $\mathbb{P}$ historique ou objective.

Sur ce marché, il y a $(d+1)$ titres de base (ou actifs) notés $S^0, S^1, \dots, S^d$.

- S_t^i est le prix de l'actif i à la date t. Ce sont des processus de prix continus en temps.
- S^0 représente la valeur de 1 € capitalisé (cash). Il sera considéré comme sans risque de rendement instantané r_t.
- Les prix des titres sont adaptés à la filtration.

Les prix sont modélisés de la façon suivante. Les aléas économiques sont engendrés par un brownien B k-dimensionnel. Et les d actifs risqués S^i $(1 \leq i \leq d)$ suivent la dynamique suivante :

$$\boxed{dS_t^i = S_t^i \left[b_t^i dt + \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^i(t) dB_t^j \right].} \tag{4.1}$$

Ou plus généralement si X est un processus de sauts-diffusion de dimension d :

$$\boxed{dS_t^i = S_t^i dX_t^i.} \tag{4.2}$$

Le titre sans risque S^0 est décrit par :

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt.$$

Ici

— $b = \{b_t,\ t \geq\}$ est le vecteur des taux de rendement des titres de base. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, adapté de composantes b^i.

— $\sigma = \{\sigma(t),\ t \geq 0\}$ est la matrice des volatilités des actifs de dimension $d \times k$ adaptée de terme général $\sigma_j^i(t)$.

On suppose tous ces processus bornés (idem parfois pour r).

Définition 4.1 (Stratégie de portefeuille) *Une **stratégie de portefeuille** est la donnée des processus $(\delta^i(t),\ i = 0, \ldots, d)$ représentant les quantités investies dans chacun des titres.*

*Une **stratégie simple** est la donnée d'un ensemble fini de dates de trading*

$$\Theta = \{t_i,\ i = 1, \ldots, N;\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$$

et de $d+1$ processus $(\delta^i(t),\ i = 0, \ldots, d)$ qui donnent la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps

$$\delta^i(t) = n_0^i \mathbf{1}_{[0,t_1]}(t) + \ldots + n_k^i \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + \ldots + n_{N-1}^i \mathbf{1}_{]t_{N-1},t_N]}(t)$$

où les variables n_k^i sont $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurables.

La valeur financière (liquidative) du portefeuille δ est notée $V_.(\delta)$. À la date t, elle vaut

$$V_t(\delta) = \delta(t).S_t = \sum_{i=0}^{d} \delta^i(t) S_t^i.$$

4.1.1 Autofinancement.

L'**autofinancement** est une condition importante pour l'évaluation d'actifs. Pour (Θ, δ) une stratégie simple de trading, entre les dates t_k et t_{k+1}, un investisseur place η_k^i unités dans l'actif S^i. Juste avant la date de renégociation, la valeur de son portefeuille est : $\eta_k.S_{t_{k+1}}$. À l'instant t_{k+1} l'investisseur forme un nouveau portefeuille, c'est-à-dire une répartition différente des poids des actifs. Si aucune somme n'est investie ou désinvestie, à l'instant t_{k+1}, la valeur du portefeuille est $\eta_{k+1}.S_{t_{k+1}}$. Et il y a autofinancement si

$$\eta_k, S_{t_{k+1}} = \eta_{k+1}.S_{t_{k+1}} \Longrightarrow V_{t_k}(\delta) + \eta_k.S_{t_{k+1}} - S_{t_k} = V_{t_{k+1}}(\delta).$$

Les variations d'un portefeuille autofinançant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. On peut résumer cela ainsi.

Définition 4.2 *Soit* (Θ, δ) *une stratégie simple de trading autofinançante. Alors la valeur du portefeuille s'écrit comme l'intégrale stochastique par rapport aux prix des actifs* S^i *de la stratégie simple* δ. *Soit :*

$$\boxed{V_t(\delta) = \delta(t).S_t, \ \ et\ V_t(\delta) - V_0(\delta) = \int_0^t \delta(u).dS_u.} \tag{4.3}$$

De façon plus générale, si δ est un processus adapté, S étant des processus d'Itô, alors une stratégie δ est autofinançante si (4.4) est satisfaite (ce qui suppose que l'intégrale stochastique est bien définie).

Avec les paramètres concernant la dynamique des actifs, on obtient

$$\begin{aligned} dV_t(\delta) &= \sum_{i=0}^{d} \delta^i(t) dS_t^i \\ &= \delta^0(t) S_t^0 r_t dt + \sum_{i=1}^{d} \delta^i(t) S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{k} \delta^i(t) S_t^i \sigma_j^i(t) dB_t^j \\ &= \delta^0(t) S_t^0 r_t dt + (\delta S)_t.b_t dt + (\delta S)_t.\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

On élimine δ^0 via l'autre équation pour obtenir :

$$\boxed{dV_t(\delta) = V_t(\delta) r_t dt + (\delta S)_t.(b_t - r_t \mathbf{1})dt + (\delta S)_t.\sigma_t dB_t} \tag{4.4}$$

avec

— $\mathbf{1}$ vecteur de composantes toutes égales à 1,

— $(\delta S)_t = \pi_t = (\delta^i(t) S_t^i,\ i = 1, \ldots, d)$ vecteur des montants investis en titres risqués.

Voici quelques exemples de stratégie.

— *Stratégie statique :* on investit dans n_0 actions à $t = 0$ et on attend.

$$dV_t = n_0 dS_t + (V_t - n_0 S_t) r_t dt$$

— *Stratégie à temps fixe proportionnelle :* 50% du portefeuille en actions.

$$dV_t = r_t V_t dt + \frac{1}{2} V_t \left(\frac{dS_t}{S_t} - r_t dt \right).$$

— *Stratégie à temps variable :* renégociation dès que le cours de l'action a varié de plus de 2%.

4.1.2 Arbitrage

Définition 4.3 (Arbitrage) *Une opportunité d'arbitrage est une stratégie de portefeuille* δ *autofinançante telle que*

1. $V_0(\delta) = 0$,

2. $V_T(\delta) \geq 0$ *et* $\{V_T(\delta) \neq 0\} \notin \mathcal{N}$.

Hypothèse fondamentale (AOA) : il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage parmi les stratégies de portefeuille **admissibles**. On dit aussi que le marché est **viable**. Ainsi attendre jusqu'à l'instant $T_x = \inf\{t \geq 0,\ B_t = x > 0\}$ est une stratégie d'arbitrage en horizon infini. La difficulté est de définir la notion d'admissibilité d'une stratégie. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies admissibles qui doit :

— contenir les stratégies constantes,
— être stable par recollement,
— être assez riche pour évaluer de nombreux produits dérivés,
— n'être pas trop gros pour éviter les OA.

En voici un exemple :

$$\mathcal{A} = \left\{\delta;\ \mathbb{E}\int_0^T \left[(\delta_t^0 S_t^0)^2 + |(\delta S)_t|^2\right] dt < \infty\right\}.$$

— Vecteurs constants dans $\mathcal{A} \Rightarrow$ prix S^i de chaque titre de base de carré intégrable sur $[0, T]$, à volatilité bornée.
— Auquel cas tous les processus prévisibles bornés sont dans $\mathcal{A}$.
— r, b, σ bornés : hypothèse suffisante.

Proposition 4.1 (Contraintes sur les rendements sous AOA)

1. *La valeur présente d'un protefeuille admissible ayant des flux positifs dans le futur est positive à toute date intermédiaire.*
2. *Deux portefeuilles admissibles qui ont la même valeur à la date T p.s. ont la même valeur financière à toute date intermédiaire t p.s.*

Preuve. Admise (ou en exercice). □

4.2 Modèle de Black-Scholes

4.2.1 Modélisation du prix des actifs.

Les prix du sous-jacent sont modélisés par un processus stochastique $\{S_t;\ t \in [0, T]\}$. Différentes modèles ont été proposés.

— Bachelier (1900). Le cours de l'actif est un mouvement brownien avec tendance. Le problème est que le prix peut être négatif.
— Samuelson (1960). C'est les rendements du cours qui sont modélisés par un mouvement brownien avec tendance.

Pour illustrer leur théorie de pricing par couverture, Black et Scholes ont introduit le modèle suivant. Le rendement entre deux périodes est la différence des logarithmes des cours. Et :

— $S_0 = x$;
— le rendement $\ln(S_T) - \ln(S_s)$ suit une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \sigma^2/2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$.
— Pour tout $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les accroissements relatifs $\{S_{t_{i+1}}/S_{t_i};\ 0 \leq i \leq n-1\}$ sont indépendants.

On montre alors que la dynamique du prix S suit un mouvement brownien géométrique :

$$S_t = x \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = f(t, B_t) \tag{4.5}$$

B étant un mouvement brownien standard.

En appliquant la formule d'Itô à f, on obtient l'équation du prix écrite sous forme différentielle :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t. \tag{4.6}$$

Le lemme suivant est utile pour les calculs.

Lemme 4.1 *La transformée de Laplace d'une v.a. normale U de moyenne m et de variance γ^2 est :*

$$\mathbb{E}\exp(\lambda U) = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right).$$

En particulier pour B mouvement brownien

$$\mathbb{E}\exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = 1.$$

Preuve. On pose $f(\lambda) = \mathbb{E}\exp(\lambda U)$ et on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda u} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\gamma^2}\right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2 - 2\gamma^2\lambda u}{2\gamma^2}\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(u-m-\lambda\gamma^2)^2 + m^2 - (m+\gamma^2\lambda)^2}{2\gamma^2}\right) du \\
&= \exp\left(\frac{(m+\gamma^2\lambda)^2 - m^2}{2\gamma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(u-m-\lambda\gamma^2)^2}{2\gamma^2}\right) du \\
&= \exp\left(\lambda m + \gamma^2\lambda^2/2\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.1 *Soit S un mouvement brownien géométrique de valeur initiale x.*

1. *Le cours S_t suit une loi log-normale avec*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t) &= xe^{\mu t}, \quad \mathbb{E}(S_t^2) = x^2 \exp((2\mu + \sigma^2)t) \\
var(S_t) &= x^2 \exp(2\mu t)(\exp(\sigma^2 t) - 1).
\end{aligned}$$

En particulier le ratio de Sharpe

$$\textit{Sharpe ratio} \;=\; \frac{\mathbb{E}(S_t) - x}{\sqrt{var(S_t)}}$$

est indépendant de x.

2. *Pour toute fonction h positive ou bornée*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(S_t)) &= \int h(x \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}u)))g(u)du \\ &= \int h(y) l_{\mu,\sigma^2}(t,x,y)dy \end{aligned}$$

avec

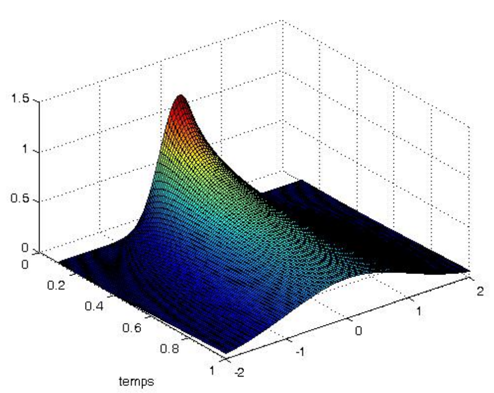
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

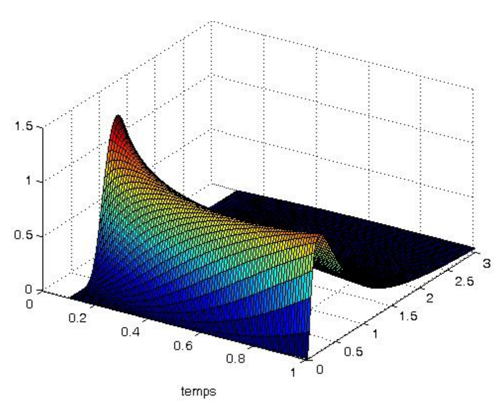
3. *La densité de la loi de S_t partant de x est celle de la loi log-normale $l_{\mu,\sigma^2}(t,x,y)$ donnée par*

$$\begin{aligned} l_{\mu,\sigma^2}(t,x,y) &= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} d_0(t, xe^{\mu t}, y)^2\right) \\ d_0(t,x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Preuve. Laissée en exercice. □

Les deux graphes sont la densité gaussienne et la densité log-normale.





L'interprétation des paramètres est la suivante.

— Si $\sigma = 0$, μ est le rendement annualisé du titre. Par arbitrage, $\mu = r$, où r est le taux d'un placement sans risque à la banque. On notera S_t^0 la valeur en t de la capitalisation d'un euro à la banque qui suit la dynamique suivante : $dS_t^0 = rS_t^0 dt$.

— Si le titre est risqué ($\sigma \neq 0$), μ est le rendement annualisé du tire espéré par unité de temps. Et $\mu - r$ est le paramètre d'excès de rendement par rapport au cash.

— La prime de risque est le ratio de Sharpe par unité de temps des excès de rendement par rapport au cash.

$$\lambda = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}(\frac{dS_t}{S_t}) - r}{\sqrt{\frac{1}{dt}\mathrm{var}(\frac{dS_t}{S_t})}} = \frac{\mu - r}{\sigma}\frac{dS_t}{S_t}.$$

— Le paramètre clé est la volatilité σ !

$$dS_t = S_t\left[\mu dt + \sigma dB_t\right] = S_t\left[rdt + \sigma(dB_t + \lambda dt)\right].$$

Ce modèle a des inconvénients immédiats :

— Supposer les paramètres constants est peu réaliste. Nous renvoyons au paragraphe sur l'implémentation pratique du modèle.

— Mais pour Black et Scholes (1973) le modèle est peu important. Ce qu'ils ont apporté est une nouvelle idée sur le pricing des options.

— Mandelbrot (1963) : le rendements des actifs n'est pas gaussien. Il y a des queues épaisses, d'où problème dans les cas de mesures (ou de gestion) du risque.

Remarquons aussi que la prime de risque n'est pas spécifique du titre, mais de la source de bruit ! C'est une caractéristique du marché au même titre que le taux d'intérêt.

4.2.2 Arbitrage, probabilité risque-neutre et pricing

Encore une fois, l'idée nouvelle de Black et Scholes est de valoriser un produit via la valeur liquidative d'un portefeuille de couverture géré dynamiquement de manière autofinançante. Le gestionnaire peut donc investir

— soit dans un titre risqué (action, taux, etc.) de prix S_t ;

— soit dans le cash (placement ou emprunt à la banque) à taux r.

On rappelle qu'une stratégie autofinançante est une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'actions et de prêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait de cash.

Notations :

— V_t est la valeur de marché ou valeur liquidative ou Mark to Market (MtM) du portefeuille à la date t.

— δ_t est le nombre d'actions du portefeuille (positif (acheteur ou long), négatif (vendeur ou short)).

L'hypothèse d'auto-financement du portefeuille fait que dans un temps très court, la variation du portefeuiile est uniquement due à la variation du cours et de l'intérêt versé, soit :

$$\boxed{dV_t = V_{t+dt} - V_t = \delta_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t)rdt = rV_t dt + \delta_t(dS_t - rS_t dt).} \tag{4.7}$$

C'est l'équation (4.3) d'auto-financement réécrite.

Proposition 4.2 *Ce marché est sans opportunité d'arbitrage.*

Preuve. D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité de départ $\mathbb{P}$ sous laquelle $W_t = \int_0^t (dB_s + \lambda ds)$ est un mouvement brownien. $\mathbb{Q}$ admet une densité par rapport à $\mathbb{P}$ donnée par

$$Y_T = \exp\left[-\lambda B_T - \frac{\lambda^2 T}{2}\right].$$

Sous cette probabilité $\mathbb{Q}$, les prix actualisés sont des martingales locales. En particulier le prix actualisé $\tilde{S}$ de l'actif risqué suit la dynamique :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t,$$

où W est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, tandis que le prix S est donné par

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t).$$

De même si V_t est la valeur à l'instant t d'un portefeuille autofinançant de stratégie δ, alors d'après (4.4) ou (**??**),

$$dV_t(\delta) = V_t(\delta)rdt + (\delta S)_t.\sigma dW_t$$

dont la valeur actualisée est une martingale (locale) :

$$d\tilde{V}_t(\delta) = (\delta\tilde{S})_t.\sigma dW_t.$$

Donc sa moyenne reste constante égale à la valeur initiale et il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. □

Donc sous $\mathbb{Q}$, S_t est donné par

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + (r - \sigma^2/2)t\right).$$

On peut remarquer ici que cette probabilité $\mathbb{Q}$ est unique et que le marché sera donc complet. De plus le prix d'un actif quelconque de payoff Φ_T sera donné par la formule :

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi_T \exp\left(-r(T-t)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

En effet $\tilde{V}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, donc

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans cette formule, on peut remarquer que la tendance μ n'apparaît plus ! Sous $\mathbb{Q}$, S_t est un brownien géométrique de paramètres r et σ. Donc si Φ_T dépend de $(S_t,\ t \in [0,T])$, V_t ne dépend que de r et σ, pas de μ. On peut même développer le calcul de l'espérance dans le cas où $\Phi_T = h(S_T)$.

Proposition 4.3 *Lorsque la variable aléatoire Φ_T est de la forme $h(S_T)$, on peut expliciter la valeur V_t de l'option à l'instant t comme une fonction de t et S_t : $V_t = v(t, S_t)$ avec*

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[h\left(x \exp\left(\sigma\sqrt{T-t}Z + (r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\right] \tag{4.8}$$

où Z suit une loi normale centrée réduite.

Preuve. En effet

$$
\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h\left(S_t\exp\left(\sigma(W_T-W_t)+(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

La variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et, sous $\mathbb{Q}$, $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. On a donc $V_t = v(t, S_t)$ avec :

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h\left(x\exp\left(\sigma(W_T-W_t)+(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\right].$$

et comme, sous $\mathbb{Q}$, $W_T - W_t$ est une gaussienne centrée de variance $T-t$:

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[h\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{T-t}Z+(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{\mathbb{R}} h\left(x\exp\left(\sigma z\sqrt{T-t}+(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz
\end{aligned}
$$

avec Z de loi normale centrée réduite. □

On verra plus loin que dans le cas du call ou du put, la formule (4.8) peut être explicitée. On a obtenu la **règle d'évaluation** suivante : pour faire le prix d'un produit dérivé les agents font comme si le marché dans lequel se font les transactions était risque-neutre. Et ainsi le prix est une espérance du flux terminal actualisé sous une probabilité pour laquelle la prime de risque est nulle. Il s'agit maintenant de pouvoir déterminer le portefeuille de réplication. L'intérêt de ce modèle est qu'il permet un calcul explicite de ce portefeuille.

4.2.3 Portefeuille dynamique et couverture.

Le problème se formule de la façon suivante : trouver une stratégie de portefeuille autofinançant qui réplique le flux $h(S_T)$ (P&L final nul), avec pour seule information, la valeur du cours passée et présente. Nous voulons ici compléter la proposition **??** en explicitant la valeur de α_t.

Pour pouvoir mener à bien les calculs, on fait l'hypothèse que la valeur du portefeuille, ainsi que la stratégie de couverture, ne dépendent que du temps et du prix du sous-jacent. On cherche donc un couple de fonctions $v(t,x)$ et $\delta(t,x)$ « régulières » telles que

— la valeur du portefeuille V_t soit donné par $V_t = v(t, S_t)$,

— l'équation d'auto-financement (4.7) soit satisfaite avec $\delta_t = \delta(t, S_t)$,

— et le P&L soit nul.

Ceci nous amène à

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} dv(t,S_t) &=& v(t,S_t)rdt + \delta(t,S_t)(dS_t - rS_tdt) \\ v(T,S_T) &=& h(S_T). \end{array}\right.} \tag{4.9}$$

Le seul problème ici concerne l'existence de la fonction δ. En effet s'il y a une solution, elle est forcément unique à cause de l'hypothèse d'absence d'arbitrage et l'existence de la fonction v est donnée par la formule (4.8). De plus nous devons supposer que v est une fonction régulière par rapport à t et x. Cette dernière condition est généralement satisfaite : presque sans hypothèse sur la fonction h (continue et à croissance au plus exponentielle ou discontinue et bornée par exemple), v donnée par la formule (4.8) est de classe C^∞ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ et on peut appliquer à v et à la semi-martingale S la formule d'Itô.

Proposition 4.4 *Si v est régulière, alors*

$$\delta(t,x) = \partial_x v(t,x).$$

Preuve. Rappelons que le prix de l'actif est donné par $V_t = v(t,S_t)$ et donc sa valeur actualisée par $e^{-rt}v(t,S_t) = e^{-rt}v(t,e^{rt}\tilde{S}_t)$ où $\tilde{S}_t$ est le prix actualisée du sous jacent, dont la dynamique sous $\mathbb{Q}$ est donnée par :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t.$$

On note

$$\partial_t f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t} f(t,x), \quad \partial_x f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x} f(t,x), \quad \partial^2_{xx} f(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(t,x).$$

On applique la formule d'Itô à la fonction $(t,x) \mapsto \tilde{v}(t,x) = e^{-rt}v(t,xe^{rt}$ de classe $C^{1,2}$ et à la semi-martingale $\tilde{S}_t$:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t = \tilde{v}(t,\tilde{S}_t) &= \tilde{v}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \partial_t \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)du + \int_0^t \partial_x \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx}\tilde{v}(u,\tilde{S}_u)d\langle \tilde{S}\rangle_u \\
&= \tilde{v}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \partial_t \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)du + \int_0^t \partial_x \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx}\tilde{v}(u,\tilde{S}_u)(\tilde{S}_u)^2\sigma^2 du \\
&= \tilde{v}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \partial_x \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u + \int_0^t \Theta_u du.
\end{aligned}$$

Comme le prix actualisé est une martingale (locale), nécessairement, $\Theta_u = 0$ et

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \partial_x \tilde{v}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u.$$

Par identification, on voit que

$$\delta(t,S_t) = \partial_x \tilde{v}(t,\tilde{S}_t) = \partial_x v(t,S_t),$$

et on obtient ainsi la couverture du produit dérivé. □

4.2.4 EDP de Black-Scholes

La démonstration de la proposition précdente montre que la quantité

$$\Theta_u = \partial_t \tilde{v}(u,\tilde{S}_u) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\tilde{v}(u,\tilde{S}_u)(\tilde{S}_u)^2\sigma^2$$

doit être nul. Autrement dit $\tilde{v}$ doit satisfaire l'EDP : pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}$

$$\partial_t \tilde{v}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\partial^2_{xx}\tilde{v}(t,x) = 0.$$

Comme $\tilde{v}(t,x) = e^{-rt}v(t, xe^{rt})$, on en déduit que v doit satisfaire l'EDP :

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - rv(t,x) = 0} \tag{4.10}$$

avec comme condition terminale $v(T,x) = h(x)$. C'est l'équation de Black-Scholes.

L'évaluation de l'équation (4.9) peut se faire aussi en utilisant les EDP (voir la section 3.1.3 et le théorème de Feymann-Kac).

Proposition 4.5

1. *Soit h une fonction continue à croissance au plus linéaire telle que l'EDP* (4.10) *admet une solution v de classe $C^{1,2}$ sur $]0,T[\times]0,+\infty[$ et continue sur $[0,T]\times]0,+\infty[$. Le pay-off $h(S_T)$ est réplicable par un portefeuille dont la valeur est $v(t,S_t)$ et celle du portefeuille de couverture $\delta(t,S_t) = \partial_x v(t,S_t)$.*
2. *De plus $v(t,x) = e^{rt}u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right)$ où u solution de*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = 0,\ \ u(T,z) = e^{-rT}h\left(\exp((r-\sigma^2/2)T + \sigma z)\right).$$

Preuve. On note

$$\partial_t f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}f(t,x), \quad \partial_x f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}f(t,x), \quad \partial^2_{xx}f(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(t,x).$$

On applique la formule d'Itô à la fonction de classe $C^{1,2}$:

$$f : (t,y) \mapsto v(t, x\exp(\sigma y + \mu t - \sigma^2/2t)).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
h(S_T) &= v(T,S_T) = f(T,B_T) \\
&= f(t,B_t) + \int_t^T \partial_t f(u,B_u)du + \int_t^T \partial_y f(u,B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_t^T \partial^2_{yy}f(u,B_u)du \\
&= v(t,S_t) + \int_t^T \partial_t v(u,S_u)du + \int_t^T \partial_x v(u,S_u)(\mu - \sigma^2/2)S_u du \\
&\quad + \int_t^T \partial_x v(u,S_u)\sigma S_u dB_u + \frac{1}{2}\int_t^T \partial^2_{xx}v(u,S_u)\sigma^2 S_u^2 du + \frac{1}{2}\int_t^T \partial_x v(u,S_u)\sigma^2 S_u du \\
&= v(t,S_t) + \int_t^T \partial_x v(u,S_u)dS_u + \int_t^T \left(\partial_t v(u,S_u) + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{xx}v(u,S_u)S_u^2\right)du \\
&= v(t,S_t) + \int_t^T \partial_x v(u,S_u)dS_u + \int_t^T (rv(u,S_u) - r\partial_x v(u,S_u)S_u)\, du \\
&= v(t,S_t) - \int_t^T r\partial_x v(u,S_u)S_u du + \int_t^T \partial_x v(u,S_u)\,(dS_u - rS_u)\, du
\end{aligned}$$

Donc l'équation (4.9) est satisfaite.

Pour la seconde partie, on a

$$\begin{aligned}
\partial_t v(t,x) &= re^{rt}u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) + e^{rt}\partial_t u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
&\quad - e^{rt}\frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
\partial_x v(t,x) &= e^{rt}\frac{1}{\sigma x}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
\partial^2_{xx} v(t,x) &= -\frac{e^{rt}}{\sigma x^2}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
&\quad + \frac{e^{rt}}{\sigma^2 x^2}\partial^2_{zz} u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right).
\end{aligned}$$

Donc si on injecte tout cela dans l'équation (4.10), on obtient pour u :

$$\begin{aligned}
& re^{rt}u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) + e^{rt}\partial_t u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
& \quad - e^{rt}\frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) + e^{rt}\frac{r}{\sigma}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
& \quad - \frac{e^{rt}\sigma}{2}\partial_z u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) + \frac{e^{rt}}{2}\partial^2_{zz} u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
& \quad - re^{rt}u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) \\
& = e^{rt}\partial_t u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) + \frac{e^{rt}}{2}\partial^2_{zz} u\left(t, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)t)\right) = 0.
\end{aligned}$$

De plus à l'instant final :

$$h(x) = v(T,x) = e^{rT}u\left(T, \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - (r-\sigma^2/2)T)\right)$$

donc

$$u(T,z) = e^{-rT}h(\exp(\sigma z + (r-\sigma^2/2)T)).$$

□

Ce théorème montre que pour résoudre le problème de couverture, on peut résoudre une équation aux dérivées partielles (4.10), et que cette EDP peut par un changement de variable se ramener à l'équation de la chaleur que l'on sait résoudre depuis le 19-ième siècle. En faisant le lien avec la proposition 4.3, on voit que la solution v de l'EDP est donnée par la formule (4.8). Cette formule peut se retrouver directement en utilisant la densité gaussienne

$$g(T,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right)$$

En effet la solution u de :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = 0, \; u(T,z) = k(z);$$

avec $t \in]0,T[$ et $z \in \mathbb{R}$, est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u(t,z) & = & \int_{\mathbb{R}} k(z-y)g(T-t,y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)g(T-t,z-y)dy \\ & = & \mathbb{E}(k(z+B_T-B_t)) = \mathbb{E}(k(B_T)|B_t=z). \end{array}}$$

Il n'y a plus qu'à faire le changement de variable pour retrouver l'expression de v.

Proposition 4.6 *Soit h une fonction continue à croissance au plus linéaire. Le prix de l'actif est donné par la fonction v obtenue par la formule* (4.8)*. Cette fonction peut aussi s'écrire $v(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(z)\pi(t,x,z,T)dz$ avec*

$$\begin{aligned} \pi(t,x,z,T) &= e^{-r(T-t)} l(T-t,x,,y,r,\sigma^2) \\ l(t,x,y,r,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} d_0^2(t,xe^{rt},y)\right) \\ d_0(t,x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}. \end{aligned}$$

$\pi(t,x,y,T)$ est la solution fondamentale de l'EDP (4.10) *dans les variables t et x.*

Preuve. On fait dans l'intégrale le changement de variable

$$z = x\exp((r-\sigma^2/2)(T-t)-\sigma y) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{z} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\right).$$

On remarque que si $y \in \mathbb{R}$, alors $z \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-r(T-t)} h\left(x\exp((r-\sigma^2/2)(T-t)-\sigma y)\right) g(T-t,y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} h(z)e^{-r(T-t)} g\left(T-t, \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{z} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)\frac{1}{\sigma}\frac{dz}{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} h(z)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2(T-t)}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{z} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\right)\right)^2\right)\frac{1}{\sigma}\frac{dz}{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} h(z)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma z\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{xe^{T-t}}{z} - \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{2}\right)^2\right) dz \end{aligned}$$

ce qui donne l'autre écriture intégrale de v. □

De là on déduit

Proposition 4.7 *Supposons que h soit dérivable presque partout et à dérivée à croissance polynomiale.*

1. *Dérivée du prix de l'option (le delta Δ) :*

$$\begin{aligned} Delta(0,x) &= \partial_x v(0,x) \\ &= e^{-rT}\int e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma y}\partial_x h(xe^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma y})g(T,y)dy. \end{aligned}$$

Le calcul du Delta revient à calculer le prix d'un actif de payoff : $\frac{S_T}{x}\partial_x h(S_T)$.

2. Autre méthode :

$$Delta(0,x) = e^{-rT}\int h(y)\partial_x l(T,x,y,r,\sigma^2)dy$$
$$\partial_x l(T,x,y,r,\sigma^2) = l(T,x,y,r,\sigma^2)(-d_0(T,xe^{rT},y))\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}$$

Le calcul du Delta revient alors à calculer le prix d'un actif de payoff

$$\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}(-d_0(T,xe^{rT},S_T))h(S_T).$$

Preuve. On peut faire un calcul direct.

1. Il suffit de dériver par rapport à x l'équation (4.8).
2. En utilisant l'autre écriture de v et en dérivant par rapport à x.

□

L'intérêt de cette proposition est que pour couvrir le produit de payoff $h(S_T)$, on calculer simultanément le prix avec payoff $h(S_T)$ et celui avec payoff $\frac{S_T}{x}\partial_x h(S_T)$ (donc deux prix) et on obtient le prix et la couverture ! Si le modèle de Black-Scholes est devenu aussi populaire, c'est en partie à cause des formules fermées de pricing du call et du put.

4.2.5 Formule de Black-Scholes.

Théorème 4.2 (Formule de Black-Scholes) *Le prix d'un call de maturité T et de prix d'exercice K est donné par*

$$\boxed{\mathcal{C}(t,x) = x\mathcal{N}\left[d_1(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right]} \tag{4.11}$$

avec

$$d_0(t,x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t},\ \ d_1(t,x,y) = d_0(t,x,y)+\sigma\sqrt{t}$$

De plus cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\Delta(t,S_t) = \partial_x\mathcal{C}(t,S_t) = \mathcal{N}\left[d_1(T-t,S_te^{r(T-t)},K)\right]$$

parts de l'actif risqué de prix S_t à l'instant t.

De même le prix d'un put de mêmes caractéristiques est donné par

$$\boxed{\mathcal{P}(t,x) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_1(T-t,K,xe^{r(T-t)})\right] - x\mathcal{N}\left[d_0(T-t,K,xe^{r(T-t)})\right]} \tag{4.12}$$

et

$$\Delta(t,S_t) = \partial_x\mathcal{P}(t,S_t) = -\mathcal{N}\left[d_0(T-t,K,S_te^{r(T-t)})\right].$$

Lorsque les coefficients dépendent du temps, la même formule reste valable à condition de poser

$$r = R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s ds, \quad \sigma^2 = \Sigma^2(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds.$$

Preuve. Il suffit de reprendre les formules des propositions 4.3, 4.4, 4.6 et 4.7 avec $h(z) = (z - K)^+$. Donc

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-r(T-t)} h\left(x \exp((r-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y)\right) g(T-t,y)dy \\ &= \int_{\Gamma} e^{-r(T-t)} \left(x \exp((r-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y) - K\right) g(T-t,y)dy \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ y \in \mathbb{R},\ x \exp((r-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y) \geq K \right\} \\ &= \left\{ \frac{y}{\sqrt{T-t}} \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln(xe^{r(T-t)}/K) - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{y}{\sqrt{T-t}} \leq d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_{\Gamma} e^{-r(T-t)} x \exp((r-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y) g(T-t,y)dy \\ & \quad -Ke^{-r(T-t)} \int_{\Gamma} g(T-t,y)dy \\ &= x \int_{\Gamma} \exp((-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y) g(T-t,y)dy \\ & \quad -Ke^{-r(T-t)} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale on fait le changement de variable $z = y/\sqrt{T-t}$ et on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy = \mathcal{N}\left[d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right],$$

tandis que pour la première on a

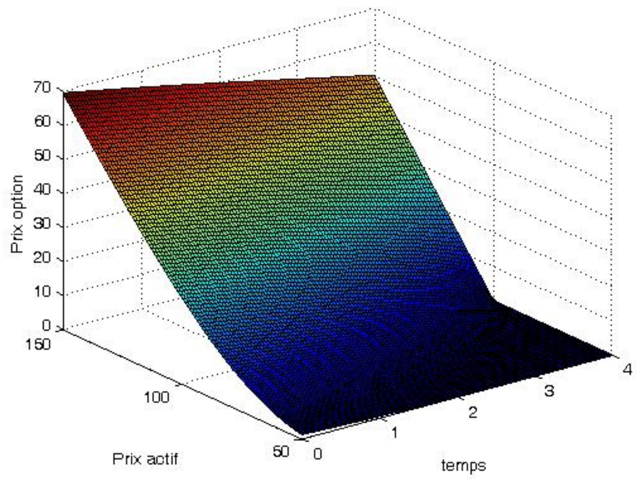
$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} e^{(-\sigma^2/2)(T-t) - \sigma y} g(T-t,y)dy = \int_{\Gamma} \exp\left(-\frac{1}{2(T-t)}(y + \sigma(T-t))^2\right) dy \\ &= \int_{z \leq d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K) + \sigma\sqrt{T-t}} g(1,z)dz = \mathcal{N}\left[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right]. \end{aligned}$$

On a donc bien la formule 4.11 pour l'option d'achat. Pour calculer le Delta de couverture, on peut soit dériver (4.11) par rapport à x, soit utiliser la proposition 4.7 qui donne que le Delta est le prix d'un actif de payoff

$$\frac{S_T}{x} \partial_x h(S_T) = \frac{S_T}{x} \mathbf{1}_{S_T \geq K}$$

et donc en appliquant le calcul fait pour le call on obtient immédiatement le Delta. On laisse au lecteur le soin de refaire les calculs pour le put. □

Ainsi nous pouvons tracer la surface de prix $(t,x) \mapsto C(t,x)$ d'une option d'achat. Ici on choisit $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $T = 4$, et $K = 100$.



Détaillons maintenant quelques propriétés des prix des calls et des puts.

Propriétés 4.1

1. ***Parité call-put :***

$$Call - Put = \mathcal{C}(t,x) - \mathcal{P}(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}.$$

2. ***Positivité :*** $\mathcal{C}(t,x) \geq (x - Ke^{-r(T-t)})^+$.
3. ***Convexité :*** $x \mapsto \mathcal{C}(t,x)$ *convexe.*
4. ***Monotonie :*** $\sigma \mapsto \mathcal{C}(t,x,\sigma)$ *croissante,* $K \mapsto \mathcal{C}(t,x,K)$ *décroissante.*
5. ***Homogénéité :***

$$\mathcal{C}(t,\lambda x, r, \sigma, \lambda K, T) = \lambda \mathcal{C}(t, x, r, \sigma, K, T).$$

Preuve. Quasiment toutes ces propriétés peuvent se prouver par AOA (y réfléchir). Néanmoins ici on va exploiter les formules (4.8), (4.11) et (4.12).

1. Cette propriété due à l'absence d'arbitrage se vérifie aisément en retranchant (4.11) et (4.12).
2. En effet comme $h(z) = (z-K)^+ \geq 0$, nécessairement avec (4.8), $C(t,x) \geq 0$. Et comme $h(z) \geq z - K$, alors $C(t,x) \geq x - Ke^{-r(T-t)}$. D'où le résultat.
3. On a
$$\Delta(t,x) = \partial_x \mathcal{C}(t,x) = \mathcal{N}\left[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right]$$
qui est par composition une fonction croissante. Donc la fonction $\mathcal{C}(t,.)$ est convexe.
4. Pour cela on calcule les dérivées partielles correspondantes.
$$\begin{aligned}\partial_\sigma \mathcal{C}(t,x,\sigma) &= x\mathcal{N}'\left[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right]\left(\partial_\sigma d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K) + \sqrt{T-t}\right) \\ &\quad -Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'\left[d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right]\partial_\sigma d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K) \\ &= x\sqrt{T-t}\mathcal{N}'\left[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right] \geq 0,\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
&x\mathcal{N}'\left[d_1(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right]-Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'\left[d_0(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right]\\
&=\mathcal{N}'\left[d_0(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right]\left[x\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}d_0(T-t,xe^{r(T-t)},K)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.-Ke^{-r(T-t)}\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

Et de même

$$\partial_K\mathcal{C}(t,x,K) \quad = \quad -e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0(T-t,xe^{r(T-t)},K)\right].$$

5. Enfin l'homogénéité s'obtient car

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t,\lambda x,\lambda K) &= \lambda x\mathcal{N}\left[d_1(T-t,\lambda xe^{r(T-t)},\lambda K)\right]-\lambda Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0(T-t,\lambda xe^{r(T-t)},\lambda K)\right]\\
&= \lambda\mathcal{C}(t,x,K).
\end{aligned}$$

□

Le calcul de la prime, ainsi que de la couverture, n'est pas toujours suffisant. On peut avoir besoin de déterminer la sensibilité des prix par rapport aux paramètres du modèle ; on parle de grecques. Rappelons les paramètres intervenant dans le prix $\mathcal{C}(t,x,r,\sigma,K,T)$:

— Prix du sous-jacent x et temps t : variables d'états.
— Taux sans risque r et volatilité σ : paramètres fixés du modèle.
— Maturité T et prix d'exercice K : paramètres fixés de l'option.

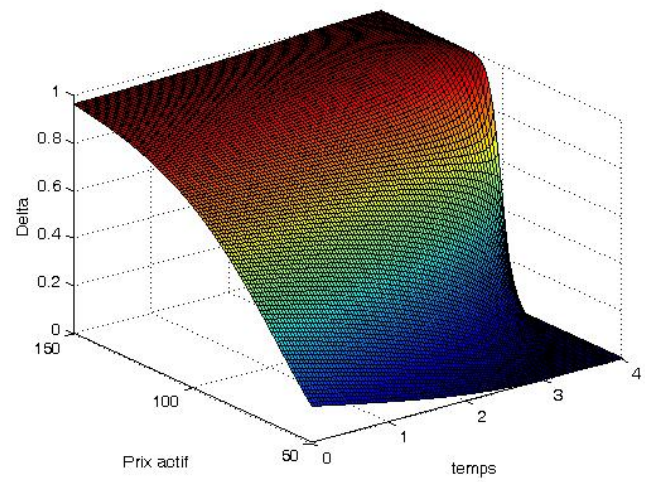
Voici la liste des grecques :

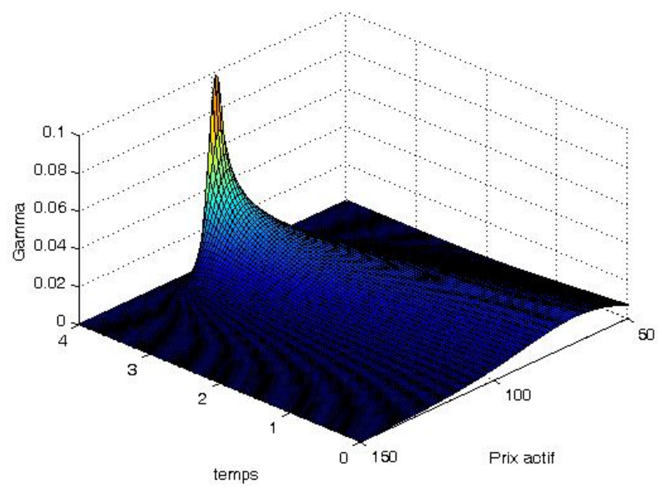
$$\begin{array}{lclcl}
Delta=\Delta & = & \mathcal{C}'_x & = & \mathcal{N}(d_1)\\
Gamma=\Gamma & = & \mathcal{C}''_{xx} & = & \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_1)>0\\
Theta=\Theta & = & \mathcal{C}'_T & = & \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_0)-Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_0)\\
\mathcal{C}'_K & = & & & -e^{-rT}\mathcal{N}(d_0)\\
Vega & = & \mathcal{C}'_\sigma & = & x\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_1)\\
Rho=\rho & = & \mathcal{C}'_r & = & TKe^{-rT}\mathcal{N}(d_0)>0
\end{array}$$

On voit donc que pour le modèle de Black-Scholes, toutes ces valeurs sont calculables ! Et on peut réécrire l'équation de Black-Scholes. Avec $\sigma^2x^2\Gamma=\sigma/TVega$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\Gamma+rx\Delta-r\mathcal{C}+\Theta=\frac{1}{2}\frac{\sigma}{T-t}Vega+rx\Delta-r\mathcal{C}+\Theta=0.$$

Nous pouvons ainsi tracer les surfaces du Delta et du Gamma. Ainsi en prenant pour paramètres : $r=0,05$, $\sigma=0,2$, $T=4$, $K=100$, on obtient





4.3 Pricing and hedging for jump diffusion processes models

4.3.1 Asset driven by a Poisson process

The model is the following. Assume that
— N is a Poisson process with intensity $\lambda > 0$,
— $M_t = N_t - \lambda t$ is the compensated Poisson process, thus a martingale.
The dynamic of the risky asset S_t is given by :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left[\alpha t + N_t \ln(1+\sigma) - \lambda \sigma t\right] \\ &= S_0 e^{(\alpha - \lambda\sigma)t}(1+\sigma)^{N_t}. \end{aligned}$$

Now if for
— $\lambda > 0$,

— $\sigma > -1$, $\sigma \neq 0$,
— $\alpha \in \mathbb{R}$,

the process S

$$S_t = S_0 \exp\left[\alpha t + N_t \ln(1+\sigma) - \lambda\sigma t\right] = S_0 e^{(\alpha-\sigma\lambda)t}(\sigma+1)^{N_t}$$

is the price of a asset, then S satisfies

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S(t^-) dM_t = \alpha S_t dt + \sigma S(t^-) d(N_t - \lambda t).$$

This can be obtained using the Itô formula. S is called a geometric Poisson process. Now assume that under a probability measure $\widetilde{\mathbb{P}}$, N is a Poisson process with intensity $\tilde{\lambda} > 0$. This probability is risk-neutral if under $\widetilde{\mathbb{P}}$, S satisfies

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S(t^-) d(N_t - \tilde{\lambda} t),$$

where r is the riskless interest rate. Therefore

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S(t^-) d(N_t - \lambda t) = rS_t dt + \sigma S(t^-) d(N_t - \tilde{\lambda} t),$$

which is possible if and only if

$$\alpha - \sigma\lambda = r - \sigma\tilde{\lambda} \Longleftrightarrow \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{\alpha - r}{\sigma}. \tag{4.13}$$

Lemma 4.1 *Assume that S is geometric Poisson process with intensity λ and drift α, and r is the riskless interest rate.*

— *If $\lambda > \dfrac{\alpha - r}{\sigma}$, we define $\tilde{\lambda} = \lambda - \dfrac{\alpha - r}{\sigma} > 0$, Z by Equation (3.8) and $\widetilde{P}$ by (3.9). Under $\widetilde{\mathbb{P}}$:*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S(t^-) d\tilde{M}_t = rS_t dt + \sigma S(t^-) d(N_t - \tilde{\lambda} t).$$

Hence the discounted price is a martingale and $\widetilde{\mathbb{P}}$ is a martingale risk measure. There is no arbitrage.

— *If $\lambda \leq \dfrac{\alpha - r}{\sigma}$, there is an arbitrage !*

Proof. The first case is an application of Theorem 3.1. For the second case assume that $\sigma > 0$. Then a.s.

$$S_t \geq S_0 e^{rt}(\sigma+1)^{N_t} \geq S_0 e^{rt}.$$

Therefore buy the stock and borrow the price at rate r is an arbitrage. If $\sigma < 0$, then $r \geq \alpha - \lambda\sigma$. Thus

$$S_t \leq S_0 e^{rt}(\sigma+1)^{N_t} \leq S_0 e^{rt}.$$

Sell the stock and deposit the amount at rate r is an arbitrage. □

In order to avoid arbitrage opportunity, we assume that

$$\boxed{\lambda > \frac{\alpha - r}{\sigma}.}$$

We define $\tilde{\lambda} = \lambda - \dfrac{\alpha - r}{\sigma} > 0$ and

$$Z_t = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_t}$$

is a martingale and

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \boxed{\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z_T)}.$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ is the risk-neutral measure and under $\tilde{\mathbb{P}}$:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S(t^-) d\tilde{M}_t \iff d(e^{-rt} S_t) = \sigma e^{-rt} S(t^-) d\tilde{M}_t$$

with $\tilde{M}_t = N_t - \tilde{\lambda} t$ is a martingale. Equivalently

$$\boxed{S_t = S_0 e^{(r - \tilde{\lambda}\sigma)t} (\sigma + 1)^{N_t}}.$$

See Theorem 3.1 and what follows for the details.

Now we consider an European call at time T with strike K :

$$C(T) = (S_T - K)^+.$$

We denote with $C(t)$ the risk-neutral price of the European call :

$$\begin{aligned} e^{-rt} C(t) &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-rT} (S(t) e^{(r - \tilde{\lambda}\sigma)(T-t)} (\sigma + 1)^{N_T - N_t} - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Therefore $C(t) = c(t, S(t))$ where

$$\boxed{c(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(x e^{-\tilde{\lambda}\sigma(T-t)} (\sigma + 1)^j - K e^{-r(T-t)} \right)^+ \frac{\tilde{\lambda}^j (T-t)^j}{j!} e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}}.$$

Proposition 4.1 *The function c satisfies :*

- *$c(T, x) = (x - K)^+$ for every $x \geq 0$;*
- *for $0 \leq t < T$ and $x \geq 0$:*

$$\boxed{-rc(t,x) + \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + (r - \tilde{\lambda}\sigma) x \frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \tilde{\lambda}(c(t, (\sigma+1)x) - c(t,x)) = 0.}$$

If we define

$$\boxed{\delta(t) = \frac{c(t, (\sigma+1)S(t)) - c(t, S(t))}{\sigma S(t)}},$$

then

$$dC(t) = \delta(t^-) dS(t) + r(C(t) - \delta(t) S(t)) dt$$

and

$$e^{-rt} C(t) = C(0) + \int_0^t e^{-ru} \left[c(u, (\sigma+1) S(u^-)) - c(u, S(u^-)) \right] d\tilde{M}(u).$$

This proves that the model is complete and the risk-neutral probability is unique ! Hence this model is equivalent to the Black-Scholes model for pure jump process.

4.3.2 Asset driven by a compound Poisson process and a Brownian motion

Now we try to generalize the previous model. We define

— W Brownian motion,

— $N_1, \ldots, N_M$ independent Poisson processes, with intensity $\lambda_m > 0$,

— $-1 < y_1 < \ldots < y_M$ nonzero numbers.

and

$$N_t = \sum_{m=1}^{M} N_m(t), \quad Q_t = \sum_{m=1}^{M} y_m N_m(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad \lambda = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m,$$

where $Y_1, Y_2, \ldots$ are i.i.d. random variables with distribution

$$\mathbb{P}(Y_i = y_m) = p(y_m) = \frac{\lambda_m}{\lambda}.$$

Q is a compound Poisson process with expectation equal to $\beta\lambda$ where $\beta = \mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{M} \lambda_m y_m$. Therefore the process $M_t = Q_t - \beta\lambda t$ is a martingale.

The model for the stock price is now : $S(0) > 0$ and

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW_t + S(t^-)dM_t \\ &= (\alpha - \beta\lambda)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t + S(t^-)dQ_t. \end{aligned}$$

Proposition 4.2 *The solution of the previous equation is*

$$S(t) = S(0)\exp\left[\sigma W(t) + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\prod_{i=1}^{N_t}(Y_i + 1).$$

Proof. Multiply S_t by $\exp[-(\alpha - \beta\lambda)t]$, apply Itô's formula to $X_t = S_t \exp[-(\alpha - \beta\lambda)t]$:

$$dX_t = \sigma X(t)dW_t + X(t^-)dQ_t$$

and use Proposition 2.5. □

We construct risk-neutral measures. We use Theorem 3.1. Let

— $\theta \in \mathbb{R}$,

— $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_M$ be positive constants.

—

$$Z_0(t) = \exp\left(-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \quad Z_m(t) = e^{(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)t}\left(\frac{\tilde{\lambda}_m}{\lambda_m}\right)^{N_m(t)}$$

The density of the measure change is :

$$Z(t) = Z_0(t)\prod_{m=1}^{M} Z_m(t), \quad \tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z(T)).$$

Under $\tilde{\mathbb{P}}$:

— $\tilde{W}(t) = W(t) + \theta t$ is a Brownian motion,
— each N_m is a Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}_m$,
— $\tilde{W}$ and $N_1, \ldots, N_m$ are independent of one another.

Now define

$$\tilde{\lambda} = \sum_{m=1}^{M} \tilde{\lambda}_m, \quad \tilde{p}(y_m) = \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}}.$$

Under $\tilde{\mathbb{P}}$:
— $N_t = \sum_{m=1}^{M} N_m(t)$ is a Poisson process with intensity $\tilde{\lambda}$,
— the jump-size r.v. $Y_1, Y_2, \ldots$ are i.i.d. r.v. with $\tilde{\mathbb{P}}(Y_i = y_m) = \tilde{p}(y_m)$,
— $\tilde{M}(t) = Q(t) - \tilde{\beta}\tilde{\lambda}t$ is a martingale where

$$\tilde{\beta} = \tilde{\mathbb{E}} Y_i = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{m=1}^{M} \tilde{\lambda}_m y_m.$$

Recall that

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\alpha - \beta\lambda)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t + S(t^-)dQ(t) \\ &= rS(t)dt + \sigma S(t)d\tilde{W}_t + S(t^-)d(Q(t) - \tilde{\beta}\tilde{\lambda}t), \end{aligned}$$

or

$$S(t) = S(0)\exp\left[\sigma\tilde{W}(t) + \left(r - \tilde{\beta}\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\prod_{i=1}^{N_t}(Y_i + 1).$$

Hence $\tilde{\mathbb{P}}$ is a risk-neutral probability if the *market price of risk equation* is satisfied :

$$\boxed{\alpha - \beta\lambda = r + \sigma\theta - \tilde{\beta}\tilde{\lambda}} \iff \alpha - r = \sigma\theta + \sum_{m=1}^{M}(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m)y_m. \tag{4.14}$$

This equation has many solutions and a choice has to be made. Merton in his seminal article has choosen to let the coefficients λ_m unchanged and to only modify the Brownian drift.

Assumption : we choose $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_M$ and then θ such that (4.14) holds.

Remember that the *Black-Scholes price* of a call with volatility σ, interest rate r, current stock price x, expiration data τ, strike K is :

$$\kappa(\tau, x) = x\mathcal{N}(d_+(\tau, x)) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-(\tau, x)),$$

with

$$d_\pm(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]$$

and

$$\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz.$$

Theorem 4.1 *For $0 \leq t \leq T$ the risk-neutral price of a call*

$$C(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

is given by $C(t) = c(t, S(t))$ where

$$\boxed{c(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\tilde{\lambda}(T-t)} \frac{\tilde{\lambda}^j (T-t)^j}{j!} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\kappa \left(T-t, x e^{-\tilde{\beta}\tilde{\lambda}(T-t)} \prod_{i=1}^{j} (Y_i+1)\right)\right].}$$

The price is a convex combinaison of Black-Scholes prices. The function c satisfies $c(T,x) = (x-K)^+$ and the partial integro-differential equation (PIDE in short)

$$\boxed{\begin{aligned} & -rc(t,x) + \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + (r - \tilde{\lambda}\tilde{\beta}) x \frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) \\ & \quad + \tilde{\lambda}\left[\sum_{m=1}^{M} \tilde{p}(y_m) c(t,(y_m+1)x) - c(t,x)\right] = 0. \end{aligned}}$$

Corollary 4.1 *The call price c satisfies*

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}c(t,S(t))) &= e^{-rt}\sigma S(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t))d\tilde{W}_t \\ &+ \sum_{m=1}^{M} e^{-rt}\left[c(t,(y_m+1)S(t^-)) - c(t,S(t^-))\right] d(N_m(t) - \tilde{\lambda}_m t). \end{aligned}$$

A natural question is : what about hedging ? Define a portfolio by : $X(0) = c(0, S(0))$ and

$$dX(t) = \delta(t^-)dS(t) + r[X(t) - \delta(t)S(t)]dt$$

with the **delta-hedging strategy :** $\boxed{\delta(t) = \frac{\partial c}{\partial x}(t, S(t))}$.

Proposition 4.3

1.
$$\begin{aligned} & d\left[e^{-rt}c(t,S(t)) - e^{-rt}X(t)\right] \\ = & \sum_{m=1}^{M} e^{-rt} d(N_m(t) - \tilde{\lambda}_m t) \\ & \times \left[c(t,(y_m+1)S(t^-)) - c(t,S(t^-)) - y_m S(t^-)\frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t^-))\right]. \end{aligned}$$

2. *for any $0 \leq t \leq T$ $\tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rt}c(t,S(t))\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rt}X(t)\right]$.*

Continuous jump distribution. Let us finish with the case of continuous jump distribution, that is, Y_i have a density f with support in $(-1, \infty)$. We denote $\beta = \mathbb{E}(Y_i) = \int_{-1}^{\infty} y f(y) dy$, and we choose θ, $\tilde{\lambda} > 0$ and a density $\tilde{f}$ with support in supp (f) s.t.

$$\boxed{\alpha - r = \sigma\theta + \beta\lambda - \tilde{\beta}\tilde{\lambda}}, \tag{4.15}$$

with $\tilde{\beta} = \tilde{\mathbb{E}}(Y_i) = \int_{-1}^{\infty} y\tilde{f}(y)dy$. Once again to solve (4.15), the *Merton's approach* consists to take $f = \tilde{f}$ and to change only the drift on W.

In this case, Theorem 4.1 holds. But the PIDE becomes :

$$\boxed{\begin{aligned} &-rc(t,x) + \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + (r - \tilde{\lambda}\tilde{\beta})x\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) \\ &\qquad + \tilde{\lambda}\left[\int_{-1}^{\infty} c(t,(y+1)x)\tilde{f}(y)dy - c(t,x)\right] = 0. \end{aligned}}$$

If X is a hedging portfolio with $X(0) = c(0, S(0))$ and

$$dX(t) = \delta(t^-)dS(t) + r[X(t) - \delta(t)S(t)]dt, \text{ with } \delta(t) = \frac{\partial c}{\partial x}(t, S(t)),$$

then

$$\begin{aligned} & d\left[e^{-rt}c(t,S(t)) - e^{-rt}X(t)\right] \\ = \ & e^{-rt}\left[c(t,S(t)) - c(t,S(t^-)) - (S(t) - S(t^-))\frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t^-))\right] dN_t \\ - \ & e^{-rt}\tilde{\lambda}\int_{-1}^{\infty}\left[c(t,S(t)) - c(t,S(t^-)) - yS(t^-)\frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t^-))\right]\tilde{f}(y)dydt. \end{aligned}$$

In that case, the market is always incomplete.

4.4 Exercices

Modèle de Black-Scholes

Exercice 4.1 (Option binaire) On considère un marché financier où les taux d'intérêt et les primes de risque sont constants. La dynamique du prix S d'une action est

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x.$$

Une option d'achat binaire (ou digitale) est une option qui paye 1 si le sous-jacent est à l'échéance T supérieur au prix d'exercice K, rien sinon.

1. Donner le prix de cette option, en utilisant les notations classiques dans la formule de Black-Scholes.
2. Calculer le Delta de cette option. Décrire la stratégie de portefeuille qui réplique l'option binaire.
3. Que se passe-t-il au voisinage de l'échéance ?

Exercice 4.2 (Option Call-Spread) Reprendre les questions de l'exercice précédent si le pay-off est de la forme :

$$f(S_T) = \min\left\{\alpha(S_T - K)^+; C\right\}.$$

α, K et C sont des constantes positives.

Exercice 4.3 On note $C(S_t, T-t, K)$ le prix à la date t du call de prix d'exercice K et d'échéance T. On note de même $P(S_t, T-t, K)$ le put. S_t est le prix du sous-jacent à la date t, qui suit une dynamique de type Black-Scholes.

On fixe $T_0 \in]0, T[$. On considère l'option (DF) à départ forward suivante : le détenteur de cette option reçoit à l'instant T_0 un call d'échéance T et de strike S_{T_0}.

1. Quel est le payoff terminal en T de cette option ?
2. Prouver que le prix en T_0 de cette option peut s'écrire sous la forme $S_{T_0}C(1, T - T_0, 1)$.
3. Montrer que le prix pour $0 \leq t \leq T_0$ est $C(S_t, T - T_0, S_t)$.

On considère maintenant l'option (CH) chooser suivante : le détenteur d'une telle option choisit à la date T_0 si l'option en question est un call ou un put d'exercice fixe K et d'échéance prédéterminée T.

1. Quel est le prix en T_0 ?
2. Quel est le payoff terminal en T d'une telle option ?
3. Prouver que $CH_{T_0} = C(S_{T_0}, T - T_0, K) - (Ke^{-r(T-T_0)} - S_{T_0})^+$.
4. Trouver le prix CH_t de cette option pour $t \in [0, T_0]$. Donner un portefeuille de couverture statique entre 0 et T_0.

Exercice 4.4 (Contrôle 2011-2012) On se place dans le modèle de Black-Scholes.

1. Exprimer le prix initial C du Call d'échéance T et de prix d'exercice K à l'aide de la fonction de répartition de la loi gaussience centrée réduite $\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$, de $d_1 = \frac{\ln(S_0 e^{rT}/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$ et de $d_0 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.
2. Vérifier que $e^{\frac{d_1^2-d_0^2}{2}} = \frac{S_0 e^{rT}}{K}$. En déduire que $C'(\sigma) = S_0\sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-d_1^2/2}$. Déterminer les limites $C(0)$ et $C(+\infty)$ de la fonction C pour σ tendant vers 0 et vers $+\infty$.
3. Pourquoi le prix de marché C_m du Call est-il compris entre $C(0)$ et $C(+\infty)$? Conclure à l'existence d'un unique niveau de volatilité σ_{imp} tel que $C(\sigma_{imp}) = C_m$. Ce niveau porte le nom de volatilité implicite de l'option.

Exercice 4.5 (Option asiatique, contrôle 2011-2012) Soit S solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), \text{ avec } S_0 > 0,$$

où B est un mouvement brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sous une probabilité $\mathbb{P}$, les paramètres r (taux d'intérêt) et σ (volatilité) sont constants. On veut valoriser l'option dont le payoff est

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+$$

K étant le prix d'exercice de l'option, T sa maturité.

On désignera par $A(T,K)$ le prix en 0 de cette option, et $C(T,K)$ le prix en 0 d'un Call de flux terminal $(S_T - K)^+$.

1. On appelle $G(T,K)$ le prix en 0 de l'option de pay-off

$$\Psi_T = \left(\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_u du\right) - K\right)^+.$$

Montrer que

$$G(T,K) \leq A(T,K) \leq \frac{1}{T}\int_0^T e^{-r(T-u)} C(u,K) du.$$

Indication : utiliser l'inégalité de Jensen.

2. (a) Montrer que $\int_0^T B_t dt = \int_0^T (T-s) dB_s$.
   (b) En déduire que $\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_u du$ est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera les deux premiers moments sous la probabilité $\mathbb{P}$.
   (c) Calculer $G(T,K)$ à l'aide de la formule de Black et Scholes.

3. On pose $Y_t = y + \int_0^t S_u du$. On considère l'option de flux terminal $\left(\frac{1}{T}Y_T - K\right)^+$.
   (a) Montrer qu'un portefeuille autofinançant de la forme $u(t, S_t, Y_t)$ (où u est une fonction régulière) qui réplique ce flux terminal satisfait l'EDP
$$u'_t(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}x^2 u''_{xx}(t,x,y) + rxu'_x(t,x,y) + xu'_y(t,x,y) - ru(t,x,y) = 0,$$
$$u(T,x,y) = (\frac{y}{T} - K)^+$$
   (b) Exprimer $A(T,K)$ en fonction de u.
4. On cherche à réduire la dimension de cette EDP bidimensionnelle.
   (a) On désigne par V_t le portefeuille autofinançant qui réplique $\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K$. Montrer que
$$V_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{T}\int_0^t S_u du + S_t \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rT} - Ke^{-r(T-t)}$$
   et que
$$dV_t = rV_t dt + \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rT} S_t \sigma dB_t.$$
   (b) On pose $Z_t = V_t S_t^{-1}$ et $\rho_t = \frac{1-e^{-r(T-t)}}{rT}$. Montrer que
$$dZ_t = (\rho_t - Z_t)\sigma(dB_t - \sigma dt)\,; \quad Z_0 = z_0$$
   et calculer z_0.
   (c) Soit $\mathbb{Q}^S$ la probabilité de densité $e^{-rT}\frac{S_T}{S_0}$. Montrer que $B_t^S = B_t - \sigma t$ est un $\mathbb{Q}^S$ mouvement brownien. En déduire que Z_t est une $\mathbb{Q}^S$ martingale.
   (d) On désigne par Z_t^z la solution de l'EDS précédente de condition initiale z. Montrer que si $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}((Z_t^z)^+) = v(t,z)$ est une fonction « régulière », elle est solution de l'EDP
$$v'_t(t,z) = \frac{1}{2}(\rho_t - z)^2\sigma^2 v''_{zz}(t,z)\,; \quad v(0,z) = z^+.$$
   (e) Exprimer $A(T,K)$ à l'aide de la fonction v.

Exercice 4.6 On généralise le modèle de Black-Scholes en introduisant un taux de dividendes q pour l'actif risqué dont le cours à l'instant t est noté S_t. Entre t et $t + dt$, le détenteur d'une unité d'actif risqué reçcoit un montant de dividendes égal à $qS_t dt$. Ce montant vient se soustraire à la valeur de l'actif dont l'évolution est donnée par
$$dS_t = \sigma S_t dBt + (\mu - q)S_t dt.$$

1. Comment doit-on modifier la définition de l'autofinancement pour prendre en compte les dividendes versés par les actifs risqués détenus dans le portefeuille ?

2. Montrer que si v est solution régulière de l'EDP

$$(4.16)\quad v'_t(t,x)+\frac{\sigma^2x^2}{2}v''_{xx}(t,x)+(r-q)xv'_x(t,x)-rv(t,x)=0,\quad (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}_+^*$$

avec $v(T,x)=h(x)$,$x\in\mathbb{R}_+^*$, alors pour $t<T$,

$$dv(t,St)=\delta(t,S_t)dS_t+r(v(t,S_t)-\delta(t,S_t)S_t)dt+q\delta(t,S_t)S_td_t$$

pour une fonction δ que l'on précisera. Conclure que l'option européenne de payoff $h(S_T)$ en T est alors duplicable par un portefeuille autofinancé que l'on précisera.

3. Vérifier que

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left(e^{-r(T-t)}h\left(xe^{\sigma B_{T-t}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\right)\right)$$

est bien solution de (4.16) (on pourra commencer par écrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $u(t,y)=e^{-rt}v(t,e^{\sigma y+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})t})$).

Exercice 4.7 (Volatilité stochastique) Un modèle dit à volatilité stochastique est un modèle dans lequel la volatilité du prix d'un actif est elle même un processus d'Itô. Ainsi pour un marché avec un actif risqué S et pour $-1<\rho<1$:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu_tdt+\sigma_tdB_t\\ d\sigma_t &= a_tdt+b_tdW_t,\quad d\langle B,W\rangle_t=\rho dt\\ \frac{dS_t^0}{S_t^0} &= rdt.\end{aligned}$$

On peut citer quelques exemples

- Heston : $d\sigma_t=\theta(\omega-\sigma_t)dt+\xi\sqrt{\sigma_t}dW_t$.
- GARCH : $d\sigma_t=\theta(\omega-\sigma_t)dt+\xi\sigma_tdW_t$.
- Cadre markovien : $a_t=a(t,S_t,\sigma_t)$ et $b_t=b(t,S_t,\sigma_t)$.

1. Expliquer (intuitivement) pourquoi on ne peut pas éliminer le risque de volatilité ou risque de vega.

On ajoute un actif liquide coté au prix $C_t^0=C^0(t,S_t,\sigma_t)$ avec $\dfrac{\partial C^0}{\partial\sigma}>0$.

2. Montrer que le portefeuille de couverture composé de δ_t actions et ω_t unités de C^0 suit la dynamique suivante :

$$\begin{aligned}dV_t &= (V_t-\delta_tS_t-\omega_tC_t^0)rdt+(\delta_t+\omega_t\frac{\partial C^0}{\partial S})dS_t\\ &\quad+\omega_t\frac{\partial C^0}{\partial\sigma}d\sigma_t+\omega_t\mathcal{L}_tC^0dt\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{L}_t=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}S_t^2\sigma_t^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+\frac{1}{2}b_t^2\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+S_t\sigma_tb_t\rho\frac{\partial^2}{\partial S\partial\sigma}.$$

3. On suppose que $V_t = C(t, S_t, \sigma_t)$. Quelle est l'EDP satisfaite par C ? Que valent δ_t et ω_t ?
4. Montrer que l'évaluation risque-neutre donne :

$$dC_t = rC_t dt + \frac{\partial C}{\partial S}(dS_t - rS_t dt) + \frac{\partial C}{\partial \sigma}(d\sigma_t - \lambda_t dt)$$

en précisant ce qu'est λ_t. Montrer qu'en plus de la prime de risque, il y a une prime de risque de volatilité et que sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$C(t, \sigma, S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) \middle| \sigma_t = \sigma, S_t = S \right].$$

Modèles à sauts

Exercice 4.8 On reprend l'énoncé de l'exercice 1.14. On suppose que $\lambda > 0$ et $\beta > 0$. On rappelle qu'alors X se décompose ainsi

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma W_t + Y_t = \gamma_0 t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t^3} V_i - \sum_{j=1}^{N_t^4} Z_j,$$

avec

- W mouvement brownien,
- $N^3 = (N_t^3)_{t \geq 0}$ et $N^4 = (N_t^4)_{t \geq 0}$ deux processus de Poisson d'intensité respective μ_3 et μ_4,
- les V_i étant positifs ou nuls de densité f,
- les Z_i une loi géométrique de paramètre p.

On suppose que le prix $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ d'un actif risqué est de la forme $S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$. T désigne la maturité du contrat, $r > 0$ le taux sans risque.

1. Montrer que S est bien défini et admet des moments d'ordre 1 et 2.

Pour tout $\eta > 0$, $\tilde{\mu} > 0$, et toute densité g sur $]0, +\infty[$ ayant un moment exponentiel d'ordre 1, on pose

$$\Theta(t) = \exp\left(-\eta W_t - \eta^2 t/2\right) e^{(\mu_3 - \tilde{\mu})t} \prod_{i=1}^{N_t^4} \frac{\tilde{\mu} g(V_i)}{\mu_3 f(V_i)}.$$

2. Montrer que Θ est une martingale sous $\mathbb{P}$.
3. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ de densité Θ_T. Quelle est la loi de $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ sous $\mathbb{Q}$?
4. Montrer que sous $\mathbb{Q}$, le prix actualisé est une martingale si et seulement si

$$\gamma_0 - \sigma\eta + \sigma^2/2 + \mu_4 \left(\frac{(1-p)}{e-p} - 1 \right) + \tilde{\mu} \left(\int_0^{+\infty} e^x g(x) dx - 1 \right) = 0.$$

5. Exprimer le prix à l'instant initial de l'option d'achat européenne de strike K, de maturité T, comme une série double faisant intervenir les prix Black-Scholes d'options d'achat européennes.

Exercice 4.9 On reprend l'exercice 2.10. Le prix de l'actif risqué est donné par l'équation suivante :

$$dS_t = S_{t_-}(bdt + \sigma dW_t + \delta dM_t), \quad S_0 > 0.$$

1. Soit $\gamma > -1$. Montrer que $(L_t^\gamma = \mathcal{E}(\psi W)(t)\mathcal{E}(\gamma M)(t))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale définissant une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}^\gamma$ équivalente à $\mathbb{P}$, si et seulement si
$$b - r + \sigma\psi + \lambda\delta\gamma = 0.$$
2. Montrer que sous $\mathbb{Q}^\gamma$, on a pour tout $t \in [0,T]$
$$\exp(-rt)S_t = S_0\mathcal{E}(\sigma W^\gamma)(t)\mathcal{E}(\delta M^\gamma)(t).$$
On précisera la dynamique de $(W_t^\gamma)_{0\leq t\leq T}$ et $(M_t^\gamma)_{0\leq t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}^\gamma$.

On définit alors le prix V^γ de l'option d'achat $(S_T - K)^+$ sous $\mathbb{Q}^\gamma$ par

$$\forall t \in [0,T],\ V_t^\gamma = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\gamma}((S_T - K)^+|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^\gamma((S_T - K)^+|\mathcal{F}_t).$$

On définit aussi $H(t, S_t)$ comme le prix Black-Scholes de ce même contrat à l'instant t et $\mathcal{L}H$ la fonction

$$\mathcal{L}H(t,x) = H(t,(1+\delta)x)) - H(t,x) - \delta x\frac{\partial H}{\partial x}(t,x).$$

On supposera (sans le redémontrer) que $H \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R})$, que $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ est bornée et que H est convexe par rapport à la seconde variable.

3. En appliquant la formule d'Itô, montrer que
$$e^{-rt}V_t^\gamma = e^{-rt}H(t,S_t) + (1+\gamma)\lambda\mathbb{E}^\gamma\left[\int_t^T e^{-rs}\mathcal{L}H(s,S_s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right].$$
4. Montrer que pour tout $\gamma \in]-1,+\infty[$,
$$\forall t \in [0,T], \quad H(t,S_t) \leq V^\gamma(t) \leq S_t.$$
5. Montrer que $|\mathcal{L}H(t,x)| \leq 2xC|\delta|$ avec $|\partial H/\partial x(t,x)| \leq C$.
6. En déduire que $\lim\limits_{\gamma\to -1} V^\gamma(t) = H(t,S_t)$.
7. Prouver que pour tout $0 < a < 1$ et $t > 0$, $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} \mathbb{E}^\gamma((\mathcal{E}(\delta M^\gamma)(t))^a) = 0$.

   Indication : procéder comme à la question 3. On rappelle que sous les hypothèses imposées à a et δ, $(1+\delta)^a - a\delta - 1 < 0$.
8. Montrer que $V_0^\gamma = S_0 - e^{-rT}\mathbb{E}^\gamma\left[G(S_0\mathcal{E}(\delta M^\gamma)(T))\right]$ avec $G(y) = \mathbb{E}^\gamma\left[g(ye^{rT}\mathcal{E}(\sigma W^\gamma)(T))\right]$ et $g(x) = x - (x-K)^+$.
9. En déduire alors que $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} \mathbb{E}^\gamma(e^{-rT}(S_T - K)^+) = S_0$ et que $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} V^\gamma(t) = S_t$.
10. À quoi correspond l'intervalle $[H(t,S_t), S_t]$ en terme de prix ?

Bibliographie

[1] R. Cont, P. Tankov, *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman and Hall.

[2] N. El Karoui, E. Gobet, *Les outils stochastiques des marchés financiers*, Éditions de l'École Polytechnique.

[3] I. Karatzas, S.E. Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer.

[4] I. Karatzas, S.E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer.

[5] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique en finance*, Ellipses.

[6] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations, An introduction with Applications*, Springer.

[7] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

[8] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer.