Université du Maine

Licence 1

Analyse

Alexandre POPIER

Année : 2009-2010

Table des matières

Introduction

Le texte qui suit constitue un résumé du cours d'analyse, première partie, du premier semestre pour les étudiants de licence première année. Il ne saurait se substituer à un exposé complet et commenté et encore moins à la pratique d'exercices d'application. Il servira néanmoins de référence pour tous les groupes et d'aide-mémoire en ce qui concerne les notions et outils de base de l'analyse.

À la fin de ce polycopié, se trouvent un formulaire (avec les formules de trigonométrie, de dérivation et d'intégration) ainsi qu'un alphabet grec. Le chapitre 7 recense les fonctions les plus classiques en mathématiques. Certaines ont été vues au lycée (fonctions polynomiales, logarithmique, exponentielle, cosinus ou sinus) et leurs principales propriétés seront considérées comme connues dès le début du semestre (lire certains passages peut s'avérer utile); d'autres seront introduites plus tard dans le semestre.

Ces notes de cours sont évidemment une version préliminaire et nous serions reconnaissant à tout lecteur de nous faire part des fautes qu'il y aura détectées à l'adresse suivante : apopier@univ-lemans.fr.

Chapitre 1

Nombres réels et fonctions

Au collège, puis au lycée vous avez rencontré les nombres réels sous des formes différentes. En voici quelques exemples.

- Les nombres *entiers naturels* ou *relatifs*.
- Les nombres *décimaux* $a \times 10^n$ où a et n sont des entiers relatifs; par exemple 3×10^5 et -13×10^{-2} sont des nombres décimaux.
- Les nombres *rationnels*, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier positif non nul. Un nombre décimal est un nombre rationnel.
- Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme 0,33..., où les points de suspension signifient que toutes les décimales valent 3. Un autre exemple est -4,896461616161..., où les trois points signifient que la suite des décimales continue comme indiquée, c'est-à-dire en mettant alternativement 6 et 1.

En général on ne voit pas sur les premières décimales de règle permettant de trouver les décimales suivantes. Ainsi le nombre π qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est représenté par un développement décimal illimité :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 51 \cdots$$

Ici les points de suspension indiquent simplement qu'il n'y a pas «d'arrêt», ni de règle simple pour obtenir les décimales suivantes.

En revanche les nombres décimaux ont un développement qui se termine par des zéros : $-13 \times 10^{-2} = -0,130000....$ La réciproque est vraie : si un développement décimal se termine par des zéros alors le nombre est décimal.

Un nombre réel peut être représenté par un développement décimal. Mais il existe d'autres «représentations».

- Les nombres définis par des opérations à partir d'autres nombres réels; ainsi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{-7}$ ou $(1-3^{-7})^{(2^5)}$.
- Des nombres particuliers, fréquents utilisés en mathématiques (ou en physique, mécanique, etc.), qui ont une notation spéciale : le nombre π ou encore le nombre e, base du logarithme népérien.

Notations : dans tout ce cours,

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls,

– $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs,
– $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,
– $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
– $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Ces ensembles vérifient

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ceci signifie qu'un nombre entier positif est un nombre entier, que tout entier est décimal, tout décimal est rationnel, tout rationnel est réel. Autrement dit les ensembles sont *inclus* les uns dans les autres.

1.1 Opérations sur les nombres réels

On ne donnera pas ici de définition précise de l'ensemble $\mathbb{R}$. Néanmoins les propriétés suivantes sont à connaître.

Théorème 1.1 *$\mathbb{R}$ est un corps commutatif qui contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. L'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$.*

Ce théorème résume en deux phrases les règles de calcul suivantes, qui sont celles que vous avez toujours pratiquées :

$$a+b=b+a, \quad 0+a=a, \quad a+b=0 \Leftrightarrow a=-b, \quad a+(b+c)=(a+b)+c,$$

$$ab=ba, \quad 1\times a=a, \quad ab=1 \Leftrightarrow a=1/b, \quad a(bc)=(ab)c, \quad a(b+c)=ab+ac,$$

$$ab=0 \Leftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0).$$

On peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser par un nombre réel différent de zéro, sans se soucier de l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations.

L'ordre sur $\mathbb{R}$

Tout nombre réel non nul est (strictement) positif ou (strictement) négatif. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul et $\mathbb{R}_-$ les nombres négatifs ou nul. Si a et b sont deux nombres réels, on dit que

Définition 1.1 *a est* inférieur ou égal à *b si le nombre $b-a$ est positif ou nul. Cette relation se note $a \leq b$ ou $b \geq a$.*

La seconde notation correspond en français à : b est supérieur ou égal à a. Si $a \leq b$ et $a \neq b$, on dit que a *est strictement plus petit que* b, ce qui se note $a < b$ ou $b > a$.

Propriétés 1.1 *$\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$, qui satisfait par définition :*
– *$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$ (réflexivité),*
– *$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y$ et $y \leq x \ \Rightarrow x=y$ (anti-symétrie),*
– *$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq y$ et $y \leq z \ \Rightarrow x \leq z$ (transitivité),*

De plus cette relation vérifie également

1. *l'ordre est total, i.e.* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y$ *ou* $y \leq x$*;*
2. *la relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication :*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

On définit le plus grand nombre des nombres réels a et b en posant

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } b \geq a \\ a & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

On définit de même $\min(a, b)$, le plus petit des nombres a et b.

L'ensemble des nombres réels est dit archimédien, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

Propriétés 1.2 *Si a est un nombre réel positif ou nul, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > a$.*

Une conséquence souvent utile de cette propriété est :

Lemme 1.1 *Si $a > 0$ et si $b \geq 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$ et $\frac{b}{n} < a$.*

Elle exprime l'idée intuitive suivante : si a et b sont deux nombres réels, alors en divisant le second suffisamment de fois, on le rend plus petit que le premier.

De ce lemme on déduit

Proposition 1.1 *Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leq x < (k + 1)a$.*

Pour $a = 1$, ceci donne : pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$. Autrement dit k est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Définition 1.2 (Partie entière) *Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la* partie entière *de x. Nous la noterons $E(x)$.*

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$, avec $E(x) \in \mathbb{Z}$.

L'ordre sur $\mathbb{R}$ permet également de définir la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 *Soient a et b des nombres réels.*

1. *Si $a \leq b$, le* segment *$[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.*
2. *On définit les* intervalles ouverts *:*
   - *si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$;*
   - *l'intervalle $]a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x$;*
   - *l'intervalle $]-\infty, a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$;*
   - *l'ensemble vide $\emptyset$ et $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.*

3. *Si $a < b$, l'intervalle $]a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$ et l'intervalle $[a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.*
4. *Les intervalles $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont formés respectivement des nombres réels x tels que $x \leq a$ et $a \leq x$.*

Il y a donc en tout dix « types » d'intervalles ! Le segment $[a, a]$ est l'ensemble $\{a\}$ et ne comporte qu'un élément a.

Proposition 1.2 *Soit I un intervalle.*
- *Si x et y sont des éléments de I tels que $x < y$, alors on a $[x, y] \subset I$.*
- *Si I est un intervalle ouvert, alors pour tout nombre $x \in I$, il existe un intervalle ouvert de centre x contenu dans I.*

Définition 1.4 *Si $a < b$, les nombres a et b s'appellent les* extrémités *des intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$. Le nombre positif $b - a$ s'appelle la* longueur *de l'intervalle. Le* centre*, ou* milieu*, est le nombre $c = (b + a)/2$.*

Le centre c vérifie $c - a = b - c = (b - a)/2 > 0$. Donc c appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Enfin nous dirons qu'un nombre réel x est compris entre a et b si on a ($a \leq b$ et $a \leq x \leq b$) ou bien si on a ($b \leq a$ et $b \leq x \leq a$).

Avant d'aboutir à la proposition clé de ce paragraphe, nous énonçons

Lemme 1.2 *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit s un nombre réel tel que $0 < s < b - a$. Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ns \in]a, b[$.*

Ce lemme permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Dans tout intervalle ouvert non vide, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Majorant, minorant

Définition 1.5 *Soit A une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$. On dit que*
- *A est* majorée *s'il existe un nombre réel M tel que $x \leq M$ quel que soit x dans A ; un tel nombre M s'appelle un* majorant *de A.*
- *A est* minorée *s'il existe un nombre réel m tel que $m \leq x$ quel que soit x dans A ; un tel nombre m s'appelle un* minorant *de A.*
- *A est* bornée *si A est majorée et minorée.*

Par exemple un intervalle $[a, +\infty[$ est minoré (a ou $a - 1$ étant des minorants). Les intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$ sont eux bornés : ils sont minorés par a et majorés par b.

Si M est un majorant de A, et si $M' \geq M$, alors M' est aussi un majorant de A. De même si m est un minorant de A et si $m' \leq m$ alors m' est un minorant de A.

1.2 Fonctions numériques

Dans ce cours on va d'abord s'intéresser aux applications $f : U \to \mathbb{R}$ où U est une partie de $\mathbb{R}$, en général un intervalle ou une réunion d'intervalles. U est son domaine de définition.

Remarque 1.1 *Lorsque nous considérerons une fonction définie sur un intervalle I, il sera sous-entendu que I n'est ni vide, ni un segment $[a, a]$ réduit à un seul élément.*

Si la fonction f est définie par une formule, il arrivera qu'on n'indique pas l'ensemble de départ. Celui-ci sera alors la plus grande partie de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) où la formule a un sens.

Exemple 1.1 La fonction $x \mapsto x^2$ désigne précisément l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En revanche la fonction $x \mapsto 1/x$ est l'application $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui à un nombre réel non nul associe son inverse.

Les opérations entre nombres réels s'étendent aux fonctions comme suit.

Définition 1.6 *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur le même ensemble de départ U et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit*
- *la fonction* somme $f + g : U \to \mathbb{R}$ *qui à $x \in U$ associe $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
- *la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ en posant $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$ pour tout $x \in U$;*
- *la fonction* produit $fg : U \to \mathbb{R}$ *en posant $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$.*

Pour les relations d'ordre,

Définition 1.7 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit V une partie non vide de U.*
- *La fonction f est* positive ou nulle sur V *si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in V$.*
- *La fonction f est* strictement positive sur V *si $f(x) > 0$ pour tout $x \in V$.*

On définit de même une fonction négative ou nulle *ou une fonction* strictement négative *sur V.*

Si g est une fonction elle aussi définie sur U, f est inférieure ou égale à g, *et on note $f \leq g$, si on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in U$. On définit de même la relation* supérieure ou égale.

Attention : deux nombres réels sont toujours comparables ($x \leq y$ ou $y \leq x$). Mais il n'est pas toujours possible de comparer deux fonctions. On laisse le soin au lecteur de trouver des contre-exemples.

S'il existe un nombre a tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in V$, f est dite constante sur V. Si $a = 0$, f est nulle sur V. Si de plus V est égal à l'ensemble U sur lequel est définie f, on dit simplement que f est constante de valeur a (l'ensemble U est sous-entendu s'il n'y a pas d'ambiguité possible).

Définition 1.8 (Parité, imparité, périodicité) ***Soit** U **une partie de** $\mathbb{R}$ **telle que*** *$x \in U \Rightarrow -x \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que*
- *f est* paire *si $f(-x) = f(x)$ quel que soit $x \in U$;*

– *f est* impaire *si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in U$.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit T un nombre réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T *(ou encore T-*périodique*) si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

La parité (resp. l'imparité) d'une fonction est une propriété de symétrie du graphe de cette fonction par rapport à l'axe des ordonnées (resp. à l'origine). Pour étudier une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $U \cap \mathbb{R}_+$ puis de compléter par symétrie. La périodicité est une propriété de répétition. Pour étudier une fonction T-périodique, il suffit de s'intéresser à un intervalle de longueur T, puis de compléter par des translations.

Définition 1.9 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit V une partie non vide de U. On dit que*

– *f est* croissante sur V *si pour tous x et y dans V,*
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y);$$
– *f est* strictement croissante sur V *si pour tous x et y dans V,*
$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y);$$
– *f est* décroissante sur V *si pour tous x et y dans V,*
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y);$$
– *f est* strictement décroissante sur V *si pour tous x et y dans V,*
$$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Une fonction f est monotone sur V *si elle est croissante ou décroissante sur V,* strictement monotone *si elle est strictement décroissante ou strictement croissante sur V.*

On peut remarquer que f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante, et qu'une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante. Il faut prendre soin de toujours préciser l'ensemble sur lequel il y a (ou non) monotonie d'une fonction.

Proposition 1.4 *Soient f et g des fonctions.*

– *Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f + g$ est croissante.*
– *Supposons que f et g soient positives ou nulles sur U. Si f et g sont croissantes sur U, alors fg est croissante sur U.*

Définition 1.10 (Composition) *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in U$, $f(x) \in V$. La* composée de g par f *est la fonction $h : U \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in U$, $h(x) = g(f(x))$. On la note $g \circ f$.*

Attention : cette définition n'est pas symétrique. La composée $g \circ f$ peut exister sans que $f \circ g$ existe. De plus, même si $g \circ f$ et $f \circ g$ existent, en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 1.5 *Si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, alors leur composée, si elle existe, est croissante. Si l'une des fonctions f ou g est croissante, l'autre étant décroissante, alors leur composée est décroissante.*

Définition 1.11 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$.*

- *Un* majorant de f *est un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in U$. S'il existe un majorant M de f, f est* majorée *(par M).*
- *Un* minorant de f *est un nombre réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in U$. S'il existe un minorant m de f, f est* minorée *(par m).*
- *La fonction est* bornée *si elle est majorée et minorée.*

En fait une fonction est majorée (resp. minorée) si elle est inférieure (resp. supérieure) ou égale à une fonction constante.

Définition 1.12 (Image) *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction,* l'image de U par f, *notée $f(U)$, est l'ensemble constitué de tous les $f(x)$ pour $x \in U$. Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres réels y pour lesquels il existe (au moins) un $x \in U$ tel que $y = f(x)$.*

Donc une fonction est majorée si et seulement si $f(U)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

De plus une fonction f est majorée par M si et seulement si $-f$ est minorée par $-M$. Si f est minorée par un nombre réel $m > 0$, alors la fonction $1/f$ est majorée par $1/m$.

Proposition 1.6 *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

- *Si f et g sont majorées, alors la somme $f + g$ est majorée.*
- *Si f et g sont minorées, alors la somme $f + g$ est minorée.*
- *Supposons que f et g soient positives ou nulles. Alors si f et g sont majorées, leur produit fg est majorée.*

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les définitions qui vont être données par la suite pour les fonctions à valeurs réelles, sont en fait valables pour des applications entre deux ensembles (voir le cours d'algèbre). Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une fonction.

Définition 1.13 (Injectivité) *On dit que f est* injective *si tout élément $y \in V$ (espace d'arrivée) a au plus un antécédent $x \in U$ (espace de départ) par f; autrement dit, pour tout $y \in V$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in U$ a au plus une solution.*

En conséquence, $f : U \to V$ est injective si et seulement si

$$\forall (x, x') \in U^2, \quad f(x) = f(x') \Longleftrightarrow x = x'.$$

Définition 1.14 (Surjectivité) *On dit que f est* surjective *si tout élément $y \in V$ a au moins un antécédent $x \in U$ par f; autrement dit, pour tout $y \in V$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in U$ a au moins une solution :*

$$\forall y \in V, \quad \exists x \in U, \ f(x) = y.$$

Par définition, une fonction $f : U \to f(U)$ est surjective ! Et si $f(U) \subsetneq V$, c'est-à-dire si V est «strictement plus gros» que $f(U)$, f n'est pas surjective.

Définition 1.15 (Bijectivité) *On dit que f est* bijective *de U sur V si tout élément $y \in V$ a un et un seul antécédent $x \in U$ par f ; autrement dit, pour tout $y \in V$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in U$ a une seule solution.*

Exemple 1.2 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe x^2 n'est pas injective, car $f(1) = f(-1)$. Elle n'est pas non plus surjective car -1 n'a pas d'antécédent. En revanche la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe x^2 est injective. La fonction $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $h(x) = x^2$ est surjective. Enfin la fonction $F : [0, \infty[\to [0, \infty[$ définie par $F(x) = x^2$ est bijective.

Définition 1.16 *Soit $f : U \to V$ une bijection de U sur V. On appelle* bijection réciproque *la fonction, notée f^{-1}, de V dans U définie par : quel que soit $y \in V$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans U de y par f.*

Proposition 1.7 *Soit $f : U \to V$ une bijection de U sur V. On a*
- *Pour tout $(x, y) \in U \times V$, $x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y$.*
- *f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Enfin on peut donner du coup une définition équivalente de la bijectivité d'une fonction.

Définition 1.17 *Soit $f : U \to V$ une fonction. On dit que f est* bijective de U sur V *s'il existe une fonction $g : V \to U$ telle que*
- *les fonctions composées $f \circ g : V \to V$ et $g \circ f : U \to U$ existent,*
- *et*
$$\forall x \in U,\ (g \circ f)(x) = x, \qquad \forall y \in V,\ (f \circ g)(y) = y.$$

Dans ce cas, la fonction g est unique et est la bijection réciproque de f. Terminons par une propriété concernant la composition de bijections.

Proposition 1.8 *Soient $f : U \to V$ et $g : V \to W$ des fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

La fonction valeur absolue

Définition 1.18 *Soit x un nombre réel. La* valeur absolue de x *est le nombre réel défini par*
$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$$
La fonction valeur absolue *$x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

La valeur absolue d'un nombre x peut aussi être définie comme le plus grand des nombres x et $-x$. La fonction valeur absolue est donc paire. Rappelons quelques propriétés.

Propriétés 1.3 *Pour tous nombres réels x et y,*
1. *$|x| \geq 0$, $-|x| \leq x \leq |x|$, $|-x| = |x|$ et $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.*

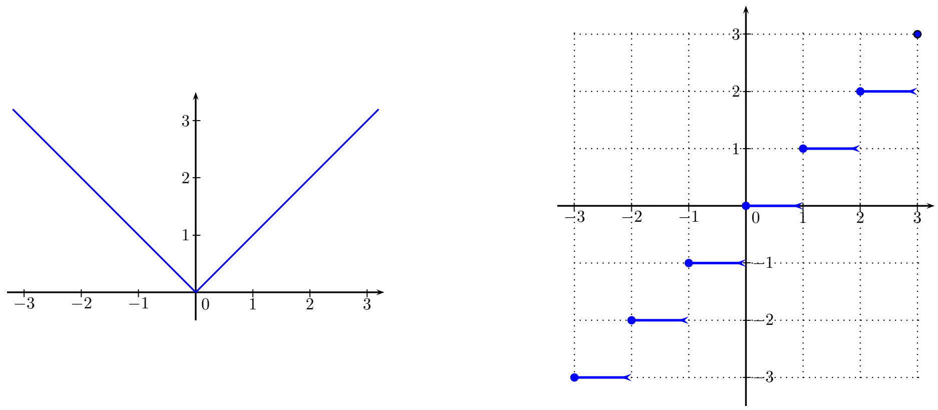


FIG. 1.1 – *Fonctions valeur absolue et partie entière*

2. $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. $|xy| = |x||y|$ *et si* $x \neq 0$, $|1/x| = 1/|x|$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
5. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Proposition 1.9 *Soit* r *un nombre réel strictement positif. Pour tous les nombres réels* a *et* x

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r, \qquad |x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

Proposition 1.10 *Soit* f *une fonction. La fonction* f *est bornée si et seulement si la fonction* $|f| : x \mapsto |f(x)|$ *est majorée.*

La fonction partie entière

Nous avons déjà défini la partie entière d'un nombre x : c'est l'unique entier noté $E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. La fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe sa partie entière $E(x)$ est appelée la fonction partie entière.

Proposition 1.11 *Cette fonction est croissante sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout entier* $N \in \mathbb{Z}$, *elle est constante sur l'intervalle* $[N, N + 1[$.

Chapitre 2

Limite et continuité

2.1 Limite d'une fonction

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou bien est une extrémité de I.

Définition 2.1 (Limite) *Soit l un nombre réel. On dit que f* a pour limite *l* en *x_0, ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \quad x \neq x_0, \quad \textit{et } |x - x_0| \leq \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$.

Intuitivement cette définition signifie que $f(x)$ est aussi près que l'on veut de l à condition de choisir x assez près de x_0, mais différent de x_0.

Par définition il revient au même de dire que $f(x)$ tend vers l ou que $f(x) - l$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On a ainsi les équivalences très utiles

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0.$$

Remarque 2.1 *Dans la définition de la limite en x_0, la fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 et si elle l'est, la valeur $f(x_0)$ n'a aucune influence sur l'existence ou la valeur de la limite.*

Ainsi il est possible de chercher si $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ a une limite quand x tend vers 1.

Par ailleurs en ce qui concerne la limite en x_0, seules comptent les valeurs que prend la fonction aux points x assez proches de x_0, mais différents de x_0. Aussi si on crée une fonction g en modifiant la fonction f au point x_0 et en dehors d'un intervalle $]a, b[$ tel que $x_0 \in]a, b[$, alors f a pour limite l en x_0 si et seulement si g a pour limite l en x_0.

Définition 2.2 (Limite à l'infini) *Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$, $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si l est un nombre réel,* *on dit que f* a pour limite l en $+\infty$*, ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $r > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \text{et } x > r) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si l est un nombre réel, on dit que f a pour limite l en $-\infty$*, ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $r < 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \text{et } x < r) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

La proposition suivante est une conséquence utile des définitions.

Proposition 2.1 *Soient f une fonction et a, l des nombres réels tels que $l > a$.*

- *Supposons que x_0 est un nombre réel et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Alors il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \neq x_0 \quad \text{et } |x - x_0| < \eta) \Longrightarrow f(x) > a.$$

- *Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors il existe un nombre $r > 0$ tel que $f(x) > a$ pour tout $x > r$.*
- *Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, alors il existe un nombre $r < 0$ tel que $f(x) > a$ pour tout $x < r$.*

On a un énoncé analogue si l'on suppose $l < b$: dans le cas de la limite en x_0, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $f(x) < b$ pour tout $x \neq x_0$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$.

Corollaire 2.1 *Si une fonction a une limite, cette limite est unique.*

Nous parlerons désormais de **la** limite d'une fonction en x_0, en $+\infty$ ou $-\infty$. Mais attention la limite d'une fonction en un point n'existe pas toujours.

Corollaire 2.2 *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et l un nombre réel.*

- *Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors il existe un nombre $\eta > 0$ tel que f est bornée sur l'ensemble $\{x \in I \mid x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta\}$.*
- *Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que f est bornée sur $]r, +\infty[$.*
- *Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, alors il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que f est bornée sur $]-\infty, r[$.*

Limite infinie

Définition 2.3 (Limite infinie)

- *On dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0*, et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \quad x \neq x_0, \quad \text{et } |x - x_0| < \eta) \Longrightarrow f(x) > A.$$

– *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$*, et l'on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si pour tout nombre $A>0$, il existe un nombre $r>0$ tel que*

$$x>r \Longrightarrow f(x)>A.$$

– *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$*, et l'on note $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, si pour tout nombre $A>0$, il existe un nombre $r<0$ tel que*

$$x<r \Longrightarrow f(x)>A.$$

– *On dit que $f(x)$* tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 *(ou bien* quand x tend vers $+\infty$*, ou bien* quand x tend vers $-\infty$*), si $-f(x)$ tend vers $+\infty$. Cette propriété se note $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ dans le cas, par exemple, de la limite en x_0.*

2.2 Propriétés des limites et opérations

Dans ce paragraphe nous énonçons les propriétés pour la limite en $x_0\in\mathbb{R}$, mais les résultats restent vrais si l'on remplace x_0 par $+\infty$ ou $-\infty$. Il est très important de bien comprendre et connaître ces résultats pour pouvoir les utiliser à bon escient.

Proposition 2.2 *Soient f et g des fonctions et l, l' des nombres réels. Supposons $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)=l'$.*

1. *On a $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=l+l'$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=ll'$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}\lambda f(x)=\lambda l$.*
2. *Si $l'\neq 0$, alors $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{l'}$.*

Proposition 2.3 *Soient f et g des fonctions. Supposons $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.*

1. *On a $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$.*
2. *Si f est minorée, alors $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.*
3. *Si f est minorée par un nombre strictement positif, alors on a $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=+\infty$.*
4. *Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ et $f(x)>0$ pour tout x, alors $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.*

Corollaire 2.3 *Soit l un nombre réel strictement positif. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=+\infty$.*

Théorème 2.1 *Soient f une fonction et l un nombre réel. Si $f(x)\geq 0$ quel que soit x et si $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, alors $l\geq 0$.*

Passage à la limite dans les inégalités. *Soient f et g des fonctions telles que $f \geq g$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors $l \geq l'$.*
Attention : même si $f > g$, on peut avoir $l = l'$!

Les énoncés suivants sont importants car ils permettent d'affirmer l'existence de la limite et de la calculer.

Théorème 2.2 *Soit l un nombre réel et soient f, g et h des fonctions.*

- *Si $f \leq g \leq h$, et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.*
- *Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*

Corollaire 2.4 *Soient f et g des fonctions. Si f est bornée et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Voici un résultat sur certaines limites de fonctions composées.

Proposition 2.4 *Soient f et g des fonctions. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$), alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$).*

Limite à droite, limite à gauche

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert, soit $x_0 \in]a, b[$ et soit f une fonction définie sur la réunion $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Par exemple la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x} - x}{|x - 2|}$ vérifie ces hypothèses si l'on choisit $x_0 = 2$, $a = 0$ et $b = 5$.

Définissons les fonctions $g :]a, x_0[\to \mathbb{R}$ et $h :]x_0, b[\to \mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, x_0[$ et $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in]x_0, b[$.

Définition 2.4 *Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$), on dit que $f(x)$* tend vers l (ou $+\infty$ ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 à gauche *et l'on note $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$. On définit de même* la limite à droite en x_0 *: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ signifie $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.*

Bien remarquer le signe - ou + ajouté sous la limite !

Formes indéterminées

Toutes les propriétés précédentes ne permettent pas de calculer toutes les limites. Par exemple il n'y a pas de résultat général pour le produit d'une fonction qui tend vers zéro par une fonction qui tend vers $+\infty$: selon les cas, le résultat peut d'ailleurs être 0 ou $\pm\infty$ ou une limite finie non nulle, ou bien il n'y a pas de limite; on dit que $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

Il existe d'autres formes indéterminées comme $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $(+\infty - \infty)$, 1^∞, ou ∞^0. Pour lever les indéterminations, c'est-à-dire pour voir si de telles expressions ont une limite et éventuellement calculer cette limite, il suffit parfois de transformer convenablement l'expression (ce qui n'est pas toujours simple) et de se ramener aux énoncés précédents. Souvent il faudra faire appel à des techniques que nous verrons progressivement (dérivabilité, développements limités, etc.).

2.3 Continuité d'une fonction

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.5 *Si $x_0 \in I$, on dit que la fonction f est* continue en *x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. La fonction f est* continue sur *I, si quel que soit $x_0 \in I$, f est continue en x_0.*

En utilisant la définition de la limite en un point x_0 et en remarquant que si $x = x_0$, alors $f(x) - f(x_0) = 0$, on obtient que f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$(x \in I, \quad \text{et } |x - x_0| < \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On peut enlever dans l'expression précédente $x \neq x_0$.

Exemple 2.1
- Une fonction constante sur I est continue sur I.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue (voir chapitre 1) est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière (voir chapitre 1) est continue en tout point non entier et n'est pas continue (ou *discontinue*) en tout point entier.

La proposition sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un inverse permet d'énoncer :

Proposition 2.5 *Soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in I$.*
- *Les fonctions $f + g$, fg et λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0.*
- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction f/g est continue en x_0.*

Corollaire 2.5 *Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) définie sur un intervalle I, alors f est continue sur I.*

Pour les définitions des fonctions polynomiales ou rationnelles, on renvoie le lecteur au chapitre 7.

Théorème 2.3 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(I) \subset J$. Supposons que l'on a $l \in J$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Si g est continue en l, alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(l)$.*

Corollaire 2.6 *La composée de deux fonctions continues est continue.*

Théorème 2.4 (Prolongement par continuité) *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$, soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction et soit l un nombre réel.*

Supposons que l'on a $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et définissons la fonction $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b[; \\ l & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Nous avons $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = l$, donc $\lim_{x \to a} g(x) = l = g(a)$. Ainsi la fonction g est continue en a. La fonction g s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Parfois par abus de notation on confondra f et son prolongement en notant ce dernier également par f.

Fonctions lipschitziennes

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.6 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est* lipschitzienne sur I *s'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Ainsi les accroissements de f sont contrôlés par les accroissements de la variable elle-même.

Exemple 2.2
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ et la fonction valeur absolue sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur tout segment $[a, b]$.

Proposition 2.6 *Une fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.*

Chapitre 3

Suites

Définition 3.1 *Une* suite de nombres réels *ou* suite à termes réels *est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre $u(n)$ est noté u_n et s'appelle un* terme *de la suite.*

La suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Attention quand même aux simplifications de notation. (u_n) désigne une suite, c'est-à-dire une application, tandis que u_n est un nombre.

Parfois on ne prend pas la peine de définir quelques premiers termes de la suite. Si l'on veut on peut alors préciser l'entier n_0 à partir duquel la définition donnée a un sens, en notant $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite en question. Ainsi la suite $(1/n^2)$ n'a de sens que pour $n \geq 1$. Mais on parlera quand même de la suite $(\sqrt{n-2})$ sans avoir à définir u_0 et u_1. Là encore gare aux confusions avec ce type de notations.

On peut étendre aux suites certaines définitions relatives aux fonctions.

Définition 3.2 *Une suite de nombres réelles u est*
- *majorée si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$;*
- *minorée si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$;*
- *bornée si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ (ce qui est équivalent à dire que la suite $(|u_n|)$ est majorée)*
- *croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$;*
- *décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante.*

On peut définir la somme $u + v$ de deux suites en posant $(u + v)_n = u_n + v_n$; le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$: $(\lambda u)_n = \lambda u_n$ et le produit de deux suites u et v en posant $(uv)_n = u_n v_n$.

3.1 Limite d'une suite

Définition 3.3 (Limites) *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge vers *$l \in \mathbb{R}$ ou* a pour limite *l ou* tend vers *l si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N ayant la propriété suivante :*

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Dans tous les autres cas, la suite diverge.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ *si pour tout nombre* $A > 0$ *il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n > A.$$

Si $(-u_n)$ *tend vers* $+\infty$*, on dit que la suite* (u_n) *tend vers* $-\infty$*.*

Proposition 3.1 *La limite* l*, si elle existe, est unique. Et on note* $\boxed{l = \lim_{n\to+\infty} u_n}$.

Exemple 3.1 Soit v définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la suite v converge vers 0. En revanche la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La suite w définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Attention. La limite d'une suite n'a de sens que pour n tendant vers $+\infty$. Ainsi la phrase «la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers 4 est...» n'a pas de sens.

3.2 Théorèmes sur les limites

La plupart des résultats qui suivent est analogue aux résultats sur les limites de fonctions.

Proposition 3.2 *Une suite convergente est bornée.*

Proposition 3.3 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites convergentes.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$*, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda l$*.*
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ *et* $\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = ll'$*.*
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *et si* $l \neq 0$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} (1/u_n) = 1/l$*.*

Proposition 3.4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente vers 0 et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée. Alors la suite* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite 0.*

Proposition 3.5 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites telles que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$*.*

- *On a* $\lim_{n\to+\infty} (1/v_n) = 0$*.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée, alors la suite* $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$*.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre strictement positif, alors la suite* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$*.*
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et si* $u_n > 0$ *pour tout* n*, alors* $\lim_{n\to+\infty} (1/u_n) = +\infty$*.*

En particulier la somme et le produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$, tendent vers $+\infty$.

Théorème 3.1 (Passage à la limite dans les inégalités)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites convergentes. Si* $u_n \leq v_n$ *quel que soit* n*, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$*.*

Corollaire 3.1 *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Si $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \geq 0$.*

Théorème 3.2 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites.*

- *Supposons que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.*
- *Si $u_n \leq v_n$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

La première assertion du théorème est connue aussi sous l'appellation « théorème des gendarmes ». Voici enfin un théorème très souvent utilisé pour calculer les limites de suites.

Théorème 3.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dont tous les termes sont dans I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si f est continue en l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.*

La proposition qui suit complète ce théorème.

Proposition 3.6 *Soient f une fonction, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (ou $+\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ (ou $+\infty$).*

Mentionnons pour finir le résultat suivant.

Proposition 3.7 *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.*

Caractérisation séquentielle de la limite

Les résultats qui suivent auront surtout une utilité pour montrer qu'une limite n'existe pas.

Théorème 3.4 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction (avec I intervalle de $\mathbb{R}$) et a un point ou une extrémité de I. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ existe.*

Ce théorème affirme que l'existence de la limite en a revient à l'existence de la limite pour toutes les suites de la forme $f(u_n)$ si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Il sous-entend que toutes ces suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite l, qui est justement $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Autrement dit la limite ne dépend pas du choix de la suite (u_n).

On l'emploie plus souvent l'implication sous forme contraposée, c'est-à-dire

Corollaire 3.2 *S'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, convergentes toutes les deux vers a et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, alors la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.*

Ainsi la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$, car en choisissant $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \pi + 2\pi n$, on obtient $\cos(u_n) = 1$ et $\cos(v_n) = -1$.

Corollaire 3.3 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ existe (et vaut $f(a)$).*

3.3 Suites définies par récurrence

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit (u_n) une suite ayant la propriété suivante :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n.$$

On dit que (u_n) est une suite récurrente.

Proposition 3.8 *Supposons que la fonction f soit croissante.*

- *Si $u_1 > u_0$, alors la suite (u_n) est croissante.*
- *Si $u_1 < u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante.*
- *Si $u_1 = u_0$, alors la suite (u_n) est constante.*

Théorème 3.5 *Supposons que la fonction f soit continue. Si la suite (u_n) converge et si sa limite l appartient à I, alors $l = f(l)$.*

Attention : sans l'hypothèse de continuité de f, ce résultat est faux en général.

Exemple 3.2 Étudier les suites (u_n) à termes réels vérifiant

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3.4 Des exemples importants

Suites arithmétiques

Définition 3.4 *On appelle* suite arithmétique de raison *a toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a.$$

Proposition 3.9 *Une suite arithmétique de raison a est entièrement déterminée par a et la donnée de u_0, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + na.$$

Si $a = 0$, la suite est constante (donc convergente). De plus une suite arithmétique peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0, auquel cas pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + a(n - n_0)$.

Proposition 3.10 *Une suite arithmétique de raison $a \neq 0$*

- *converge si et seulement si $a = 0$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$;*

– *tend vers* $+\infty$ *si* $a > 0$*;*
– *tend vers* $-\infty$ *si* $a < 0$.

Proposition 3.11 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de raison* a*, alors*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = (N+1)u_0 + a\frac{N(N+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Définition 3.5 *On appelle* suite géométrique de raison a *toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n.$$

Proposition 3.12 *Une suite géométrique de raison* a *est entièrement déterminée par* a *et la donnée de* u_0*, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 a^n.$$

Si $a = 1$, la suite est constante (donc convergente). De plus une suite géométrique peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0, auquel cas pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} a^{(n-n_0)}$.

Proposition 3.13 *Une suite géométrique de raison* $a \neq 1$

– *converge si et seulement si* $u_0 = 0$ *ou* $|a| < 1$ *et alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*;*
– *tend vers* $+\infty$ *si* $a > 1$ *et* $u_0 > 0$*, vers* $-\infty$ *si* $a > 1$ *et* $u_0 < 0$*;*
– *diverge si* $a \leq -1$.

Pour prouver la dernière assertion dans le cas où $a = -1$, on pourra utiliser le résultat suivant :

Proposition 3.14 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Posons* $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$*. Si* l *est un nombre réel alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l.$$

Proposition 3.15 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $a \neq 1$*, alors*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0\frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

Généralisations.

1. Ici on considère les suites dont le terme u_n est donné sous la forme

$$u_n = n^p a^n, \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.16 *Si* a *est un nombre réel positif différent de 1, alors pour tout entier* $p \in \mathbb{Z}$*, la suite* (u_n) *a la même limite que la suite géométrique* (a^n)*.*

2. Suites telles $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L < 1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $u_n \neq 0$ et telle qu'il existe $0 < L < 1$ tel que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L < 1$ pour tout n. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En application, on montrera que pour tout nombre réel a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

3.5 Raisonnement par récurrence

Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide d'un type de preuve particulier : le raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$\mathcal{P}(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

on peut utiliser le raisonnement par récurrence :

on **prouve** que $\mathcal{P}(0)$ est vraie;
on **suppose** que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,
on **prouve** qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie pour tous les entiers.

Le principe est simple : une fois le « départ » assuré ($\mathcal{P}(0)$ vraie ou $\mathcal{P}(1)$...), on montre que l'on est capable de franchir un échelon de $\mathcal{P}(n)$ à $\mathcal{P}(n+1)$; donc :

$$\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{P}(n) \Rightarrow \ldots$$

Revenons à l'exemple. Ici $\mathcal{P}(0)$ s'énonce :

$$0 \text{ est-il égal à } \frac{0(0+1)}{2} \ ?$$

Réponse : oui. Supposons que $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, et prouvons que

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On voit que

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (0 + 1 + \ldots + n) + (n+1).$$

Par hypothèse de récurrence, on connaît la valeur de la première parenthèse :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

On regroupe en mettant $(n+1)$ en facteur, d'où :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Exercice 3.1 *Prouver que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Chapitre 4

Borne supérieure

L'une des propriétés de $\mathbb{R}$ est l'existence de la borne supérieure. Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

4.1 Définition

Définition 4.1 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

- *I est la* borne inférieure de *A si I est le plus grand minorant de A, c'est-à-dire si I est un minorant de A ($\forall x \in A, I \leq x$), mais que, parmi tous les minorants possibles, I est le plus grand.*
- *S est la* borne supérieure de *A si S est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire si S est un majorant de A ($\forall x \in A, x \leq S$), mais que, parmi tous les majorants possibles, S est le plus petit.*

On peut écrire également :

$$\boxed{S = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x. \end{cases}}$$

La première ligne signifie que S majore A, et la deuxième signifie que tout nombre inférieur à S (donc de la forme $S - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$) ne majore pas A. Donc S est le plus petit majorant de A. C'est la borne supérieure. De même :

$$\boxed{I = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & I \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in A,\ x < I + \varepsilon. \end{cases}}$$

Théorème 4.1 (Axiome de $\mathbb{R}$) *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Comme dit plus haut, cette propriété est caractéristique de $\mathbb{R}$ et ne saurait être démontrée.

Exemple 4.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$. Notons A l'ensemble des termes de la suite (u_n), c'est-à-dire

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}, \quad x = (-1)^n \frac{n}{n+2} \right\}.$$

A est majorée, non vide et admet 1 pour borne supérieure.

Exercice 4.1 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \cos \dfrac{1}{x}$ et soit A l'image de $]0,+\infty[$ par f, c'est-à-dire

$$A = f(]0,+\infty[) = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| \exists x \in \mathbb{R} \quad y = f(x) \right\}.$$

Montrer que $\sup A = 1/2$.

Corollaire 4.1 *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Exemple 4.2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur I. Alors l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \;\middle|\; (x,y) \in I^2,\ x \neq y \right\}$$

est non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure $\sup A$. Alors pour tout $(x,y) \in I^2$

$$|f(x) - f(y)| \leq (\sup A)|x - y|.$$

Cette constante $\sup A$ est appelée constante de Lipschitz de la fonction f sur l'intervalle I.

Une utilisation courante de la borne supérieure est la suivante :

$$\boxed{\forall x \in A,\ x \leq M \Rightarrow \sup A \leq M.}$$

De même :

$$\boxed{\forall x \in A,\ m \leq x \Rightarrow m \leq \inf A.}$$

La notion de borne supérieure et son existence permettent de prouver la propriété d'Archimède vue au chapitre 1.

Corollaire 4.2 $\mathbb{R}$ *est archimédien :* $\forall x > 0,\ \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N},\ x < ny$.

Preuve. Considérer l'ensemble $E = \{ny|\ n \in \mathbb{N},\ ny \leq x\}$ non vide majoré par x. Soit S sa borne supérieure. $S - y < S$ donc $S - y < ny$, i.e. $S < (n+1)y$. Donc $(n+1)y \notin E \Rightarrow (n+1)y > x$. □

La proposition suivante fournit d'autres exemples importants de bornes supérieures.

Proposition 4.1 *Si une suite croissante a une limite finie, alors cette limite est la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite.*

Remarque 4.1 *Si A est une partie de $\mathbb{Q}$ non vide et majorée, l'ensemble des majorants rationnels de A peut ne pas avoir de plus petit élément; autrement dit la partie A peut ne pas avoir de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Par exemple on peut considérer $\sqrt{2}$ et l'ensemble A de ses approximations décimales.*

4.2 Application aux suites et fonctions croissantes

Nous avons montré que si une suite croissante a une limite finie, alors cette limite est la borne supérieure des termes de la suite. Grâce à l'existence de la borne supérieure, nous allons démontrer une réciproque à ce résultat : si l'ensemble des termes d'une suite croissante est majoré, alors la borne supérieure de cet ensemble est la limite de cette suite. Les résultats de ce chapitre sont fondamentaux car ils permettent d'affirmer l'existence d'une limite.

Commençons par énoncer le résultat dans le cadre des fonctions croissantes.

Théorème 4.2 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante, où a est un nombre réel et où b est un nombre réel ou $+\infty$.*

- *Si la fonction f est majorée, alors f a une limite quand x tend vers b et cette limite est la borne supérieure des valeurs de f sur $[a, b[$.*
- *Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.*

Ainsi *pour une fonction croissante et majorée sur* $[a, b[$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to b} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b[\}}\,.$$

De même si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, où b est un nombre réel et où a est un nombre réel ou $-\infty$, alors :

- si la fonction f est minorée, f a une limite quand x tend vers a et cette limite est la borne inférieure des valeurs de f sur $]a, b]$;
- si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Voici maintenant la version du théorème précédent appliqué aux suites.

Théorème 4.3 *Une suite croissante et majorée converge. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Propriété des segments emboités

Il s'agit d'une propriété forte des nombres réels.

Théorème 4.4 (Segments emboités) *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_n \le b_n$ pour tout n. Si l'on a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout n, alors il existe au moins un nombre réel appartenant à tous les segments $[a_n, b_n]$.*

L'inclusion des segments signifie que l'on a $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$. Donc cette propriété peut s'énoncer ainsi :

Théorème 4.5 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que $a_n \leq b_n$ pour tout n. Alors il existe au moins un nombre réel x tel que pour tout n, $a_n \leq x \leq b_n$.*

On utilise souvent la version suivante de la propriété des segments emboités.

Théorème 4.6 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que $a_n \leq b_n$ pour tout n et telles que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Alors les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite l. De plus pour tout n, $a_n \leq l \leq b_n$.*

Définition 4.2 *Des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions du théorème précédent sont* adjacentes.

Chapitre 5

Fonctions continues sur un intervalle

Les résultats de ce chapitre sont très généraux et se démontrent pour l'essentiel grâce à la notion de borne supérieure et à la propriété des segments emboités. Cependant les démonstrations sont souvent difficiles. Aussi l'important est d'apprendre et de bien comprendre les énoncés pour savoir les utiliser.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si A est une partie de I, rappelons que l'image de A par f est l'ensemble $f(A)$ ayant pour éléments les nombres réels $f(x)$, où x appartient à A. Si $A = I$, l'image $f(I)$ s'appelle l'image de f ou bien l'ensemble des valeurs de f.

5.1 Image d'un intervalle

Proposition 5.1 *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors il existe au moins un élément $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Une méthode de démonstration, appelée dichotomie, consiste à couper en deux l'intervalle et à créer ainsi une suite convergente vers une solution de l'équation $f(x) = 0$. Il est tout à fait possible que la fonction f s'annule plusieurs fois sur l'intervalle $[a, b]$, et même une infinité de fois. La méthode précédente ne conduit alors qu'à l'une des solutions.

Corollaire 5.1 *Un polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.*

Théorème 5.1 (des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que k est un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.*

Si f est continue, tout «nombre intermédiaire» entre $f(a)$ et $f(b)$ est donc une valeur de la fonction f.

Corollaire 5.2 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Exemple 5.1 – La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a pour image l'intervalle $[-1, 1]$.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + x + 1$. On a $f(x) = (x + 1/2)^2 + 3/4$. Donc l'image de f est l'intervalle $[3/4, +\infty[$.
- L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$ est l'intervalle $]0, 1]$.

5.2 Image d'un segment

Proposition 5.2 *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction f est bornée.*

Théorème 5.2 *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f([a, b])$ est un segment.*

Ainsi il existe deux nombres réels M (*maximum de f* sur $[a, b]$) et m (*minimum de f* sur $[a, b]$) tels que pour tout $x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$ et M et m sont des valeurs de f.

Corollaire 5.3 *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors il existe un nombre réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Exemple 5.2

- Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/x$. La fonction f est continue, donc f est continue sur tout intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$. Prenons pour I la segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$. L'ensemble $f(I)$ est le segment $[1/b, 1/a]$, ce qui est conforme au théorème.

  Si nous choisissons $I =]0, b]$, l'ensemble $f(I)$ est l'intervalle $[1/b, +\infty[$ qui n'est pas un segment. De même si nous choisissons $I = [a, +\infty[$, alors $f(I) =]0, 1/a]$ qui n'est pas non plus un segment.
- Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$. On a $f(x) > 0$ pour tout x; mais puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il n'existe pas de nombre réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout x. Dans le corollaire précédent, il est donc nécessaire que l'intervalle sur lequel f est strictement positive soit un segment.

5.3 Fonctions monotones

Dans ce paragraphe, nous utiliserons la notions d'application bijective vue au chapitre 1.

Théorème 5.3 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.*

1. *$f(I)$ est un intervalle et l'application f est une bijection de I sur $f(I)$.*

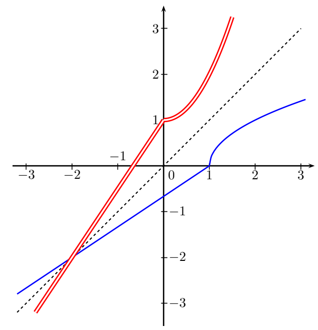


FIG. 5.1 – *Fonction réciproque*

2. *Si a et b sont les bornes de I, où a et b sont des nombres réels ou bien l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, alors les bornes de l'intervalle $f(I)$ sont $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$.*
3. *La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Remarque 5.1 *Ajoutons que I et $f(I)$ ont les mêmes crochets : si I est ouvert, $f(I)$ l'est aussi; si f est croissante et si $I = [a,b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim_{x\to b} f(x)[$; si f est décroissante et si $I =]a,b]$, alors $f(I) = [f(b), \lim_{x\to a} f(x)[$; etc.*

Exemple 5.3 Considérons l'application $f :]0,\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\tan x}$. Soient x et y des nombres réels tels que $0 < x < y$. Puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$, nous avons les inégalités $\tan 0 = 0 < \tan x < \tan y$, donc $0 < x\tan x < x\tan y < y\tan y$. Ainsi la fonction f est strictement décroissante. D'autre part f est continue en tant qu'inverse d'une fonction continue ne prenant pas la valeur 0. Puisqu'on a $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$, il vient $\lim_{x\to(\pi/2)^-} x\tan x = +\infty$ et par suite $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = 0$. La fonction $x \mapsto x\tan x$ étant continue en 0, on a $\lim_{x\to 0} x\tan x = 0$, et puisque f est positive, on en déduit $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

En appliquant le théorème précédent, on obtient que l'intervalle $f(]0,\pi/2[)$ est égal à l'intervalle ouvert $]\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)[=]0,+\infty[$ et que la fonction f définit une bijection de $]0,\pi/2[$ sur $]0,+\infty[$.

Graphes d'une bijection et de sa bijection réciproque. Soient I et J des intervalles et soit $f : I \to J$ une application. Rappelons que le *graphe* de f est la partie G de $\mathbb{R}^2$ formée de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \in I$. Supposons que f est bijective. Le graphe de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est la partie G' de $\mathbb{R}^2$ formée de tous les couples $(x, f^{-1}(x))$ où $x \in J$. Il est clair que par définition de f^{-1} pour tout élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence

$$(x,y) \in G \Longleftrightarrow (y,x) \in G'.$$

Autrement dit, on a une symétrie par rapport à la première bissectrice du plan : *les graphes de f et de f^{-1} sont donc symétriques par rapport à cette bissectrice* (voir figure 5.1 : la fonction et sa réciproque sont en trait plein (simple ou double)).

Chapitre 6

Dérivée d'une fonction

La dérivée est l'outil principal pour étudier une fonction. Pour bien utiliser cette notion, il faut connaître parfaitement la définition et s'entraîner à calculer des dérivées rapidement et sans erreur.

6.1 Dérivée en un point et fonction dérivée

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un élément de I.

Définition 6.1 *On dit que f est* dérivable en x_0 *si* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite finie quand x tend vers x_0. La limite* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est notée $f'(x_0)$ et s'appelle le* nombre dérivé de f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I *si quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$, s'appelle la* dérivée de f.

On note $D(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Supposons f dérivable en x_0 et définissons une fonction ε en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \quad \text{si } x \neq x_0, \qquad \text{et } \varepsilon(x_0) = 0.$$

Pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas les deux membres sont égaux à $f(x_0)$. Par ailleurs

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = \varepsilon(x_0),$$

donc la fonction ε est continue en x_0.

Finalement si f est dérivable en x_0, il existe une fonction ε continue en x_0 telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{quel que soit } x \in I.$$

Cette propriété caractérise les fonctions dérivables en x_0.

Proposition 6.1 *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un nombre réel a et une fonction ε ayant les propriétés suivantes :*

- *ε est continue en x_0 et $\varepsilon(x_0) = 0$,*
- *$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in I$.*

Dans ce cas, le nombre a est égal à $f'(x_0)$.

Corollaire 6.1 *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Monotonie et dérivée.

Lemme 6.1 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- *Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*
- *Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.*

Tangente au graphe de f.

Soit $\mathcal{C}$ le graphe de la fonction f dans le plan. Notons M_0 le point $(x_0, f(x_0))$ et si $x \in I$, $x \neq x_0$, notons M le point $(x, f(x))$; par définition les points M_0 et M appartiennent à $\mathcal{C}$.

Le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la *pente* de la droite passant par M_0 et M. Supposons que f est dérivable en x_0. Alors intuitivement, quand x tend vers x_0, la droite (M_0M) a pour position limite la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$. Par définition cette droite s'appelle la *tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0*. Ainsi :

Propriétés 6.1 *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour tangente au point M_0 la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.*

Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un élément de I.

Définition 6.2 *On dit que f est* dérivable à droite en x_0 *si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à droite quand x tend vers x_0. La limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est notée $f'_d(x_0)$. De même, si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à gauche quand x tend vers x_0, on dit que f est* dérivable à gauche en x_0 *et la limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est notée $f'_g(x_0)$.*

Distinguons quatre cas :

- Cas 1 : si x_0 n'est pas une extrémité de I. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si l'on a $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$; dans ce cas le nombre dérivé de f en x_0 est $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Si f est dérivable à droite (ou à gauche) en x_0, on dit que le graphe de f admet une demi-tangente de pente $f'_d(x_0)$ (ou $f'_g(x_0)$) au point d'abscisse x_0.
- Cas 2 : $x_0 = \max I$ (extrémité droite). Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0.
- Cas 3 : $x_0 = \min I$ (extrémité gauche). Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0.
- Cas 4 : f n'est pas dérivable (à gauche ou à droite) en un point, au sens où une des limites vaut $\pm\infty$. Dans ce cas le graphe de f admet en ce point une (demie) tangente verticale. C'est le cas des fonctions racine, Arccos, Arcsin ou encore Argch que nous verrons au chapitre 7.

Prenons par exemple la fonction f définie par $f(x) = |x|$. Le rapport $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ est égal à $x/x = 1$ si $x > 0$ et à $-x/x = -1$ si $x < 0$. On a donc $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

6.2 Calcul des dérivées

Dérivée d'une somme et du produit par une constante. Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors les fonctions $f+g$ et λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sont dérivables en x_0 et

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)}\,.$$

Dérivée d'un produit. Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors la fonction fg est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}\,.$$

Dérivée d'une fonction constante. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction constante et soit x_0 un élément de I. Quel que soit $x \in I$, nous avons $u(x) = u(x_0)$. Le rapport $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ est égal à 0, par conséquent $u'(x_0) = 0$. Ainsi une fonction constante a une dérivée nulle en tout point.

Dérivée d'une composée. Soient f et g deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ est définie. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)}\,.$$

Dérivée de l'inverse. Soit f dérivable en x_0. Si $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}}\,.$$

En utilisant les formules donnant la dérivée d'un produit et d'un inverse, on obtient :

Corollaire 6.2 *Si f et g sont des fonctions dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en x_0 et*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}.$$

En conséquence on peut montrer que

- *Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction dérivée est une fonction polynôme.*
- *Une fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition et la fonction dérivée est une fonction rationnelle.*

Dérivée d'une fonction réciproque. Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Posons $J = f(I)$ et notons $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque de $f : I \to J$. Si l'on a $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur J et l'on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}.$$

Exemple 6.1 Reprenons l'exemple 5.3 du chapitre 5. Soit la fonction $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(x \tan x)$. On a montré que f est une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$. En utilisant les résultats précédents, f est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x \tan x)^2}\left(\tan x + x\frac{1}{(\cos x)^2}\right) \neq 0.$$

Donc la bijection réciproque g de f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Tableau des dérivées. Enfin on renvoie au tableau des dérivées situé dans le formulaire, qui recense les dérivées des fonctions usuelles. Ce tableau est à connaître par cœur !

6.3 Dérivées successives

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable; par définition cela signifie que f est dérivable en tout point de I. Nous avons alors défini la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout x appartenant à I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Si la fonction f' est à son tour dérivable en tout point de I, alors la fonction $(f')'$ dérivée de f' est définie sur I; cette fonction se note f'' et s'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement si n est un entier positif ou nul, on définit, si elle existe, la dérivée n-ième de f en posant $f^{(0)} = f$ par convention et

$$f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)' \text{ pour tout entier } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq n.$$

Si la dérivée n-ième de f existe, on dit que f est n fois dérivable.

Définition 6.3 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que f* est de classe C^p sur *I si et seulement si f est (au moins) p fois dérivable et la dérivée p-ième $f^{(p)}$ est continue sur I.*

On dit que f est de classe C^∞ sur *I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I (ou de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$). Pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^p(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^p sur I.*

Si f est de classe C^p sur I, alors $f^{(p)}$ est continue sur I et $f, f', \ldots, f^{(p-1)}$ sont aussi continues car dérivables. Si $f \in C^\infty$ sur I, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est continue sur I. En particulier $C^0(I) = C(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I. Les fonctions dans $C^1(I)$ sont dites *continuement dérivables*. Enfin on a les inclusions suivantes (toutes strictes) :

$$C^\infty(I) \subset \ldots \subset C^{p+1}(I) \subset C^p(I) \subset \ldots \subset C^1(I) \subset D(I) \subset C(I).$$

Exemple 6.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi $e_n(x) = x^n$. Alors e_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si $0 \leq p \leq n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_n^{(p)}(x) = n(n-1)\ldots(n-p-1)x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}.$$

En particulier $e_n^{(n)}(x) = n!$. Et si $p \geq n+1$, $e_n^{(p)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Somme, produit et composée de fonctions dans $C^p(I)$

Proposition 6.2 *Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si f et g sont dans $C^p(I)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont dans $C^p(I)$ et*

$$(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}, \qquad (\lambda f)^{(p)} = \lambda f^{(p)}.$$

Proposition 6.3 (Formule de Leibniz) *Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si f et g sont dans $C^p(I)$, alors fg appartient à $C^p(I)$ et*

$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

Pour $n = 1$, on retrouve $(fg)' = f'g + fg'$.

Théorème 6.1 *Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si f est dans $C^p(I)$, g dans $C^p(J)$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe C^p sur I.*

Corollaire 6.3 *Si f et g sont de classe C^p sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est de classe C^p sur I (pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

Théorème 6.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^p sur I avec $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ strictement monotone et telle que f' ne s'annule pas sur I. Si $J = f(I)$ et si $g : J \to \mathbb{R}$ est la bijection réciproque de f, alors g est de classe C^p sur J.*

6.4 Extremum local d'une fonction

Définition 6.4 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $x_0 \in I$, on dit que*
- f a un maximum local en x_0 *s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 et contenu dans I, tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout nombre x appartenant à J;*
- f a un minimum local en x_0 *s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 et contenu dans I, tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout nombre x appartenant à J;*
- f a un extremum local en x_0 *si f a un maximum local ou un minimum local en x_0.*

Exemple 6.3 1. Si une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ a un maximum (ou un minimum) en un point $x_0 \in]a, b[$, alors f a aussi un maximum local (ou un minimum local) en x_0.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |1 - x^2|$. Si $x \in]-1, 1[$, on a $x^2 < 1$, donc $f(x) = 1 - x^2$. On en déduit que si $x \in]-1, 1[$, alors $f(x) \leq 1$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$. La fonction f a donc un maximum local en 0. Hors de cet intervalle, la fonction f peut prendre des valeurs supérieures à 1 : ainsi $f(4) = 15$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $f(1) = f(-1) = 0$. Donc la fonction f atteint son minimum global (par opposition à local) en 1 et -1. En ces points f a aussi un minimum local.
3. La fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |1 - x^2|$ a encore un minimum local (et global) en 1, mais n'a pas de maximum local en 0.

Lorsqu'une fonction f est dérivable, le théorème suivant donne une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en un point.

Théorème 6.3 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f a un extremum local en un point $x_0 \in I$ et que f est dérivable en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Dans l'exemple 6.3, cas 2, la fonction f a un maximum local en 0, et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = 1 - x^2$. Donc $f'(x) = -2x$ et ainsi $f'(0) = 0$, conformément au théorème. En revanche au point 1, f a un minimum local mais n'est pas dérivable en ce point. En effet si $x > 0$ et $x \neq 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|1 + x||1 - x|}{x - 1} = (1 + x)\frac{|1 - x|}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 1 \\ -(x + 1) & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

Théorème 6.4 (de Rolle) *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *$f(a) = f(b) = 0$.*

Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le principe de la démonstration consiste à prouver qu'il existe un maximum (ou un minimum) local strictement positif (ou négatif).

6.5 Le théorème des accroissements finis

Théorème 6.5 (des accroissements finis) *Soient a et b des nombres tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Le nombre $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un point $(c, f(c))$ du graphe de f où la tangente est parallèle à cette droite.

Corollaire 6.4 *Soient a et b des nombres tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.*
- *Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.*
- *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.*

On peut même préciser que les deux premières assertions sont des équivalences (voir lemme 6.1). Pour la troisième on a :

Proposition 6.4 *Soit Z l'ensemble des points x de $]a, b[$ tels que $f'(x) = 0$. f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et Z ne contient aucun intervalle ouvert $]u, v[$ avec $u < v$.*

Le théorème suivant affirme qu'une fonction dérivable, à dérivée bornée est lipschitzienne (voir la définition 2.6).

Théorème 6.6 (Inégalité des accroissements finis) *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un nombre $K > 0$ tel que $|f'(t)| \leq K$ pour tout $t \in I$. On a alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ quels que soient les nombres x et y appartenant à I.*

On prendra garde que la réciproque est fausse : la fonction valeur absolue est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, sans être dérivable sur $\mathbb{R}$.
Méthode : pour encadrer une expression de la forme $f(x) - f(y)$, pensez au théorème et à l'inégalité des accroissements finis.

Nous allons voir une application à l'étude de la dérivabilité en un point.

Théorème 6.7 (Prolongement de la dérivée) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$.*

1. *Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = l$ et f est de classe C^1 sur $[a, b]$.*
2. *Si $\lim\limits_{x \to a^+} |f'(x)| = +\infty$, f n'est pas dérivable en a et sa courbe admet une tangente verticale d'abscisse a.*

Ce résultat peut être commode pour affirmer qu'une fonction possède en un point une dérivée à droite ou à gauche. Mais la réciproque est fausse : une fonction f peut être dérivable en un point a sans que $f'(a)$ soit égal à la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a. Autrement dit, la fonction dérivée n'a aucune raison d'être continue.

Exemple 6.4 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Par composition, f est continue sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0^+} (-1/x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en zéro et ainsi sur $[0, +\infty[$.

Cette fonction est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} t^2 \exp(-t) = 0$ (par comparaison des limites (voir section 7.3, théorème7.1)). Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.

Finalement f est de classe C^1 sur $[0, \infty[$, car dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0)$.

Exemple 6.5 Ce qui suit est un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Les résultats précédents montrent que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire sur $]-\infty, 0[$ $]0, +\infty[$. De plus pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Pour tout $x \neq 0$, on a $|\sin(1/x)| \leq 1$. Donc $|f(x)| \leq x^2$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

De même si $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = x \sin(1/x)$ et $|x \sin(1/x)| \leq |x|$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Ainsi la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Mais f' n'a pas de limite en 0. Autrement dit, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto 2x \sin(1/x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, alors on en déduit (limite d'une somme) :

$$\lim_{x \to 0} \cos(1/x) = \lim_{x \to 0} (2x \sin(1/x) - f'(x)) = -l.$$

Or ceci est absurde car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Chapitre 7

Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, nous allons redonner les principales propriétés de fonctions déjà connues telles que ln, exp, les fonctions puissances, les fonctions trigonométriques cos, sin et tan ainsi que leurs inverses et enfin les fonctions hyperboliques.

7.1 Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

Les fonctions polynomiales sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

où n est un entier naturel et les a_i, $i = 0, \ldots, n$ sont des nombres réels. Si tous les a_i sont nuls, cette fonction constante égale à zéro a pour degré $-\infty$; si $a_n \neq 0$, l'entier n est le degré du polynôme.

Exemple 7.1 Les fonctions $x \mapsto 1 + 2x$, $x \mapsto x^2 - 3x^5$ sont des fonctions polynomiales de degré respectif 1 et 5.

Tous les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée si $n \geq 1$:

$$x \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k,$$

et $x \mapsto 0$ si $n = 0$ ou si la fonction est nulle.

On rappelle qu'en dehors des polynômes constants, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynomiale sont $\pm\infty$, suivant la parité de n et le signe de $a_n \neq 0$.

Les fractions rationnelles sont des fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m},$$

c'est-à-dire le quotient des deux fonctions polynomiales, la fonction Q devant être non nulle. En général ces fonctions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais uniquement sur $\mathbb{R}$ privé des racines (ou des zéros) de Q, c'est-à-dire des nombres réels x tels que $Q(x) = 0$.

Exemple 7.2 – La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, car $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif).

– La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - 7x}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ privé des points 0, 2 et 3 car $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$.

Il faut parfois faire attention toutefois à ce qu'un zéro du dénominateur peut aussi être un zéro du numérateur :

Exemple 7.3 Ainsi la fraction rationnelle définie par $x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ privé de 4. En effet on a $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$ et $x^2 - 4x = x(x-4)$, d'où une simplification possible par x.

Sur leur ensemble de définition, les fractions rationnelles sont de classe C^∞. Pour déterminer leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$, il y a une indétermination qu'on lève en mettant en facteur les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur et en effectuant les simplifications adéquates pour se trouver avec une puissance de x multipliée par une fraction dont le comportement à l'infini ne pose pas de problème. Ainsi

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x(1+(1/x))}{x^2(1+(1/x)+(1/x^2))} = \frac{1}{x} \times \frac{1+(1/x)}{1+(1/x)+(1/x^2)},$$
$$\frac{2x^3-7x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^3(2-(7/x^2))}{x^3(1-(5/x)+(6/x^2))} = x^0 \times \frac{2-(7/x^2)}{1-(5/x)+(6/x^2)},$$
$$\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-4x} = \frac{x^3(1-(1/x)-(2/x^2))}{x^2(1-(4/x))} = x \times \frac{1-(1/x)-(2/x^2)}{1-(4/x)}.$$

On rappelle ensuite

Lemme 7.1

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \textit{si } n \geq 1, \\ 1 & \textit{si } n = 0, \\ 0 & \textit{si } n \leq -1. \end{cases} \qquad \textit{et} \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \textit{si } n \geq 1 \textit{ et } n \textit{ pair}, \\ -\infty & \textit{si } n \geq 1 \textit{ et } n \textit{ impair}, \\ 1 & \textit{si } n = 0, \\ 0 & \textit{si } n \leq -1. \end{cases}$$

7.2 Fonctions logarithme, puissance et exponentielle

Fonctions puissance et racine n-ième.

Vous connaissez déjà les fonctions puissances définies pour les entiers $n \in \mathbb{N}$. En effet si n est un entier positif

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

avec par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La valeur en 0 est 0 et l'on a $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. D'après le théorème 5.3, la fonction $x \mapsto x^n$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Si l'entier n est impair, la fonction $x \to x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et l'on a $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$. Dans ce cas la fonction $x \to x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.1 *La bijection réciproque d'une des bijections précédentes s'appelle la fonction* racine n-ième *et se note* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. *Si* $n = 2$, *c'est la fonction* racine carrée *que l'on note simplement* $x \mapsto \sqrt{x}$.

La fonction racine n-ième est donc définie sur $[0, +\infty[$ si n est un entier pair et elle est définie sur $\mathbb{R}$ si n est un entier impair. C'est une fonction continue et strictement croissante. De plus :

- pour tout x et y positifs ou nuls, $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.
- Si $x \in [0, 1]$, alors $x^n \leq x$ et en prenant la racine n-ième, on obtient $x \leq \sqrt[n]{x}$.
- Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^n$, donc $\sqrt[n]{x} \leq x$.
- Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire et la fonction racine n-ième aussi.

À partir de là par composition, on peut définir les fonctions puissance pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap\,]0, +\infty[$. En effet si α est un nombre rationnel strictement positif, alors il existe deux uniques entiers n et m premiers entre eux tels que $\alpha = n/m$. Alors la fonction puissance α est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \geq 0, \qquad x^\alpha = \sqrt[m]{x^n}.$$

Enfin si n est strictement négatif, alors

$$\forall x \neq 0, \qquad x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}.$$

Donc de même si $\alpha = -n/m \in \mathbb{Q} \cap\,]-\infty, 0[$ avec n et m entiers positifs premiers entre eux, alors $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ par

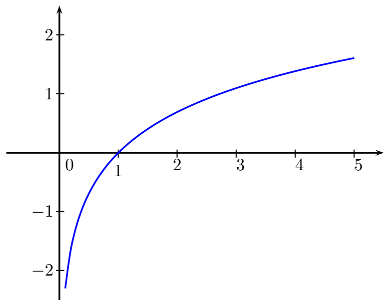
$$\forall x > 0, \qquad x^\alpha = \sqrt[m]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}.$$

Remarque 7.1 *Pour les fonctions puissance, on est certain de ne pas se tromper si on prend comme ensemble de définition l'ensemble* $]0, +\infty[$. *Dans certains cas, il est possible de l'étendre (mais il faut faire alors très attention).*

La fonction logarithme.

Définition 7.2 *On appelle* logarithme népérien, *que l'on note* ln, *l'unique fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \textit{et } \ln(1) = 0.$$



x	0		1		$+\infty$
$\ln' x = 1/x$		$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

FIG. 7.1 – *Fonction logarithme*

On montre plus tard (voir le chapitre sur l'intégration) l'existence et l'unicité d'une telle fonction. Souvent on l'appelle simplement logarithme. Voici ces principales propriétés :

Propriétés 7.1 *C'est une fonction continue (et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$) et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus*

1. *pour tout x et y strictement positifs,*
   (a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   (b) $\ln(1/x) = -\ln(x)$
   (c) $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
   (d) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.
2. *Enfin pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.*

Rappelons également quelques limites usuelles du logarithme :

Propriétés 7.2
1. $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

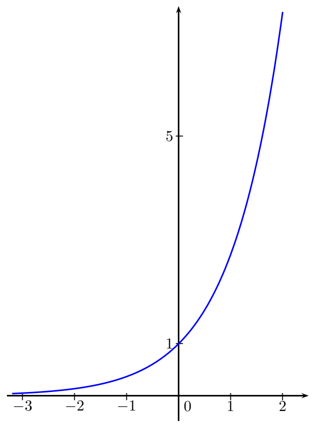
Remarque 7.2 *La fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On vérifiera que cette fonction est dérivable et a pour dérivée $1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*

Terminons ce paragraphe par le logarithme *de base a*.

Définition 7.3 *Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On appelle* logarithme de base a *l'application définie sur $]0,+\infty[$ par*

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Notons que pour tout a, $\log_a(1) = 0$ et par définition $\log_a(a) = 1$. En physique on utilise fréquemment le logarithme de base 10. Il vérifie notamment pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^n) = n$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp' x = \exp x$		$+$	1	$+$	
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

FIG. 7.2 – *Fonction exponentielle*

La fonction exponentielle.

En rassemblant les propriétés de la fonction ln et en utilisant le théorème 5.3, cette fonction est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.4 *La bijection réciproque est la* fonction exponentielle*, notée* exp*. Elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $]0, +\infty[$.

Ainsi on a

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln x) = x, \qquad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp x) = x.$$

On en déduit également les propriétés suivantes :

Propriétés 7.3 *La fonction* exp *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, dérivable avec* $\exp'(x) = \exp(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. De plus pour tout* x *et* y *dans* $\mathbb{R}$ *:*

- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$*, d'où* $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$,
- $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$,
- *pour tout* $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$.

Concernant les limites usuelles concernant cette fonction, on obtient :

Propriétés 7.4 *1.* $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

3. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$.

Notation. Le nombre réel $\exp(1)$ se note e; on a donc $\ln(e) = 1$. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, il vient $\exp(1) > \exp(0)$, donc $e > 1$.

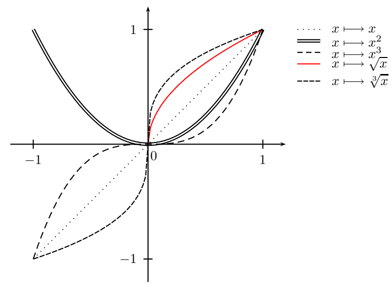


FIG. 7.3 – *Fonctions puissance*

Fonctions puissance (suite).

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n \ln a) = (\exp \ln a)^n = a^n$.
- Supposons que n est un entier positif au moins égal à 2 et posons $y = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$. On a $y^n = \exp(n(1/n) \ln a) = a$. Puisque y est strictement positif, on en déduit $y = \sqrt[n]{a}$ par définition de la racine n-ième. On a donc

$$\sqrt[n]{a} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right), \text{ pour tout } a > 0.$$

Plus généralement

Définition 7.5 *soit a un nombre strictement positif et soit $b \in \mathbb{R}$. On définit le nombre réel a^b, appelé a* puissance *b, en posant*

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

On peut donc élever un nombre **strictement positif** à une puissance réelle quelconque. Les règles de calcul sont ensuite celles dont on a l'habitude.

Proposition 7.1 *Pour tous nombres réels b et c :*

- $1^b = 1$.
- $x^{b+c} = x^b x^c$ *et* $(x^b)^c = x^{(bc)}$ *pour tout* $x > 0$;
- *si* $x > 0$ *et* $y > 0$, *alors* $(xy)^c = x^c y^c$;
- *si* $x > 0$, *alors* $x^{-c} = 1/(x^c)$.

Méthode. Pour étudier une expression de la forme a^b où b n'est pas un entier, revenez à la définition : $a^b = \exp(b \ln a)$.

Définition 7.6 *Soit α un nombre réel. La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ s'appelle la* fonction puissance d'exposant *α.*

Propriétés 7.5 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction puissance d'exposant α*

1. *est une application continue sur $]0, +\infty[$, strictement monotone (croissante si $\alpha > 0$ et décroissante si $\alpha < 0$),*

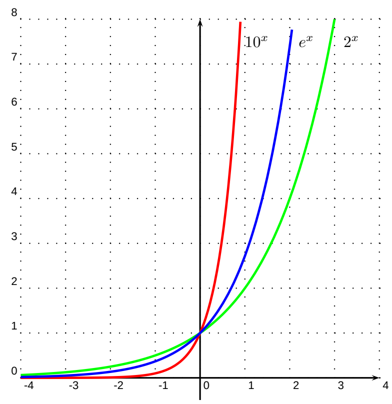


FIG. 7.4 – *Fonctions exponentielles de base a*

2. *est une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $]0, +\infty[$.
3. *Enfin elle est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *avec pour dérivée la fonction* $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Concernant les limites on a

Propriétés 7.6

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 0, \\ 1 & si\ \alpha = 0, \\ +\infty & si\ \alpha > 0. \end{cases}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha < 0, \\ 1 & si\ \alpha = 0, \\ 0 & si\ \alpha > 0. \end{cases}$

Fonction exponentielle de base a.

Définition 7.7 *Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a^x$ s'appelle la* fonction exponentielle de base a.

En voici quelques propriétés.

Propriétés 7.7 *Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Si $a > 1$ cette bijection est strictement croissante; si $a < 1$, elle est strictement décroissante. De plus elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée $x \mapsto (\ln a)a^x$.*

Remarquons que si $a = e = \exp(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$. La fonction exponentielle de base e est donc l'exponentielle ordinaire. On utilisera par la suite indifféremment les deux notations. Enfin pour tout $x > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ a^{\log_a(x)} = x.$$

Autrement dit l'exponentielle en base a est la bijection réciproque du logarithme en base a.

7.3 Relations de comparaison

Il est important de s'en rappeler et de savoir les utiliser.

Théorème 7.1 (Croissances comparées)

1. *Si α et β sont deux nombres réels et si $\alpha < \beta$, alors*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = +\infty.$$

2. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

3. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, au voisinage de $+\infty$,*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta \exp(-\alpha x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\beta \exp(\alpha x) = +\infty.$$

4. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

7.4 Fonctions trigonométriques

Dans un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan, on note $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$. $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique, de centre O et de rayon 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv t[2\pi]$ (l'angle entre les vecteurs vaut t).

Définition 7.8 *On appelle* cosinus de t*, noté* $\cos(t)$*, l'abscisse de M et* sinus de t*, noté* $\sin(t)$*, l'ordonnée de M.*

On note N le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente en I au cercle $\mathcal{C}$ (droite verticale passant par I).

Définition 7.9 *On appelle* tangente de t*, noté* $\tan t$*, l'ordonnée de N.*

En appliquant le théorème de Thalès, on a : $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ pour $t \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$. En effet, les angles pour lesquels le cosinus s'annule sont $\pi/2$ et $-\pi/2$, auxquels cas les droites (OM) et la tangente n'ont pas d'intersection.

Cosinus et sinus

Les fonctions cos et sin sont définies, continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$. Ce sont des fonctions 2π- périodiques, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \; \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Quelques propriétés pour étudier ces fonctions :

– L'étude sur un intervalle de longueur 2π est donc suffisante. On complète ensuite par des translations de vecteurs $n2\pi \overrightarrow{i}$

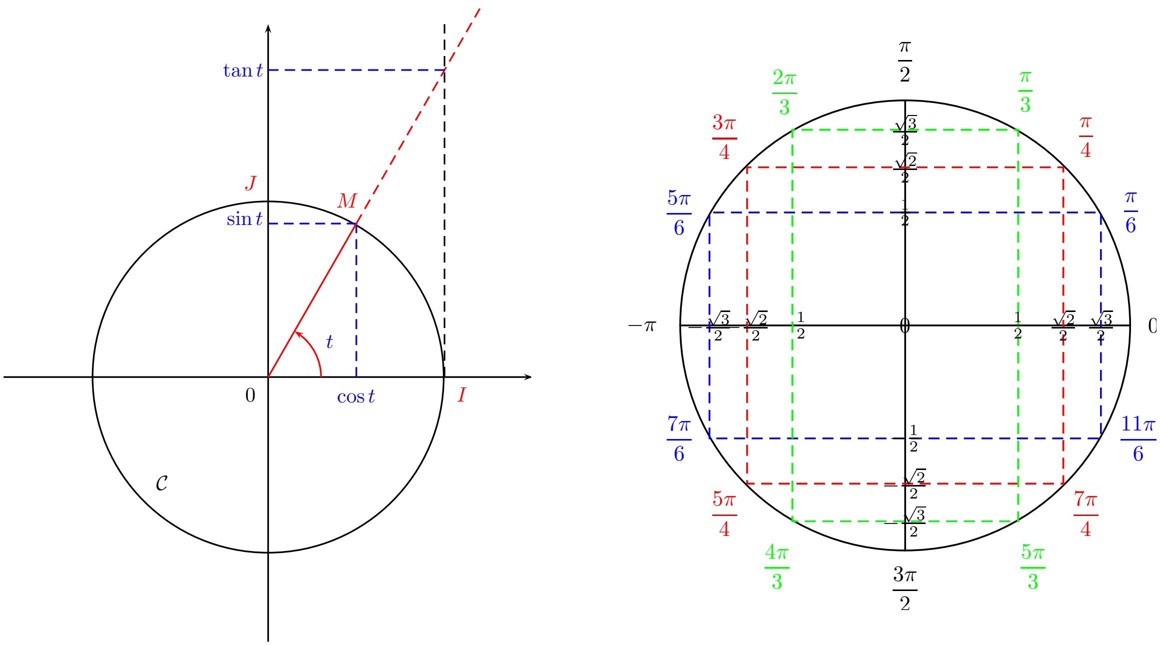
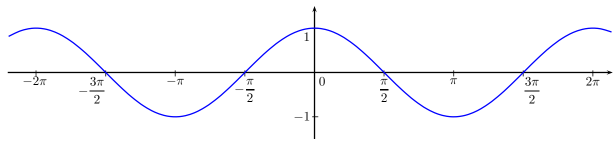


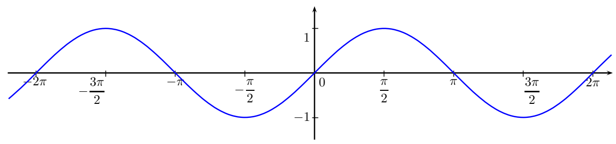
FIG. 7.5 – *Cercle trigonométrique et valeurs remarquables*

FIG. 7.6 – *Illustration des propriétés de cosinus et sinus*



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

FIG. 7.7 – *Graphe et tableau de variation de cosinus*



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

FIG. 7.8 – *Graphe et tableau de variation de sinus*

- cos est paire, sin impaire (voir figure 7.6), on peut donc encore réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. La courbe de cos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $(\pi/2, 0)$ et celle de sin est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$ et compléter par symétrie.

Propriétés 7.8 *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

La fonction cos *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$*;* sin *est strictement croissante sur* $[0, \pi/2]$.

Pour terminer remarquons que comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$, la courbe de sinus est image de celle de cosinus par la translation de vecteur $(\pi/2)\overrightarrow{i}$.

Tangente

Comme quotient de fonctions continues et dérivables,

Propriétés 7.9 *La fonction tangente est continue et dérivable sur son ensemble de définition D, où D est la réunion des intervalles $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus pour tout $x \in D$,*

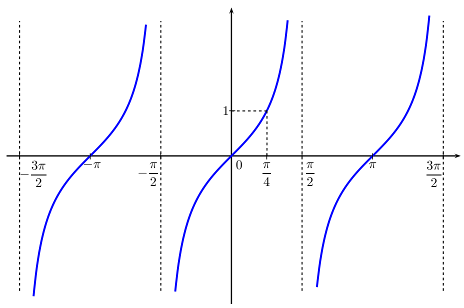
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

De plus cette fonction est π-périodique et impaire.

On a donc les relations suivantes :
- $\tan(-x) = -\tan x$ (*imparité*).
- $\tan(x + \pi) = \tan x$ (π-*périodicité*).

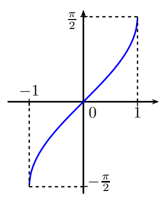
Quelques valeurs particulières :

$$\tan 0 = 0, \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIG. 7.9 – *Graphe et tableau de variation de tangente*



x	-1		0		$+1$
$\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

FIG. 7.10 – *Graphes et tableau de variation de Arc sinus*

Formules trigonométriques

On renvoie le lecteur à la fin de ce cours pour les formules de trigonométrie classiques.

7.5 Fonctions trigonométriques réciproques

La fonction Arc sinus.

La fonction sinus est continue et dérivable et si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons $\sin'(x) = \cos x > 0$. La fonction sinus est donc strictement croissante sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. Donc elle définit une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 7.10 *La bijection réciproque s'appelle la fonction* Arc sinus *et se note* Arcsin.

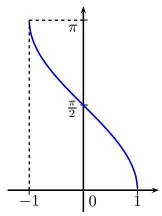
Ainsi par définition

$$\forall x \in [-1,1],\ \sin(\mathrm{Arcsin} x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2],\ \mathrm{Arcsin}(\sin x) = x.$$

Attention : la dernière égalité n'est vraie que sur $[-\pi/2, \pi/2]$, même si la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 7.10 *La fonction* Arcsin *est continue, strictement croissante et impaire. De plus elle est dérivable sur* $]-1, 1[$ *:*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



x	-1		0		$+1$
$\arccos' x = -1/\sqrt{1-x^2}$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	$-\infty$
$\arccos x$	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

FIG. 7.11 – *Graphes et tableau de variation de Arc cosinus*

La fonction Arc cosinus.

La fonction cosinus est continue et dérivable et si $x \in]0, \pi[$, nous avons $\cos'(x) = -\sin x > 0$. La fonction cosinus est donc strictement croissante sur le segment $[0, \pi]$ et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Donc elle définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 7.11 *La bijection réciproque s'appelle la fonction* Arc cosinus *et se note* Arccos.

Ainsi par définition

$$\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\mathrm{Arccos} x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0, \pi],\ \mathrm{Arccos}(\cos x) = x.$$

Attention : la dernière égalité n'est vraie que sur $[0, \pi]$, même si la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 7.11 *La fonction* Arccos *est continue, strictement décroissante et paire. De plus elle est dérivable sur* $]-1, 1[$ *:*

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Propriétés 7.12 *Pour tout* $x \in [-1, 1]$,

$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

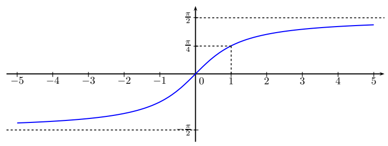
La fonction Arc tangente.

La fonction tangente est continue et dérivable et si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. La fonction tangente est donc strictement croissante sur le segment $]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) =]-\infty, \infty[$. Donc elle définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.12 *La bijection réciproque s'appelle la fonction* Arc tangente *et se note* Arctan.

Ainsi par définition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\mathrm{Arctan} x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \mathrm{Arctan}(\tan x) = x.$$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan' x = 1/(1+x^2)$		$+$	1	$+$	
$\arctan x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

FIG. 7.12 – *Graphes et tableau de variation de Arc tangente*

Attention : la dernière égalité n'est vraie que sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Propriétés 7.13 *La fonction* Arctan *est continue, strictement croissante et impaire. De plus elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Voici d'autres propriétés liant les fonctions trigonométriques.

Propriétés 7.14 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\cos(\mathrm{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\mathrm{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

1. *si* $x > 0$, $\mathrm{Arctan} x + \mathrm{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$,
2. *si* $x < 0$, $\mathrm{Arctan} x + \mathrm{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

7.6 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Ces fonctions appelées trigonométriques hyperboliques ou plus simplement hyperboliques, interviennent naturellement dans de nombreuses applications (par exemple le problème de la chainette en physique) et ont de nombreuses analogies avec les fonctions trigonométriques «usuelles».

Définition 7.13 *On appelle* sinus, cosinus *et* tangente hyperbolique, *que l'on note* sh, ch *et* th, *les fonctions réelles définies sur* $\mathbb{R}$ *comme suit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Voici leurs principales propriétés :

Propriétés 7.15
- *Ces fonctions sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction* ch *est paire, tandis que les deux autres sont impaires.*
- *La fonction* ch *est minorée sur* $\mathbb{R}$ *par 1. La fonction* th *est bornée :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; |\mathrm{th}(x)| \leq 1.$$

– *Les fonctions* sh *et* th *sont strictement croissantes sur* $\mathbb{R}$, *la fonction* ch *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.
– *Enfin pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

En ce qui concerne la dérivabilité,

Propriétés 7.16 *toutes ces fonctions sont dérivables (et de classe* C^∞*) sur* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Enfin

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1.$$

Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

Ces fonctions admettent toutes les trois des réciproques. On prendra garde simplement à la fonction cosinus hyperbolique qui n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

La fonction Argch**.**

La fonction ch est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. C'est donc une bijection qui admet une application réciproque notée Argch définie de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad y = \mathrm{ch}(x) \iff x = \mathrm{Argch}(y).$$

Propriétés 7.17 *La fonction* Argch *est continue et strictement croissante sur* $[1, +\infty[$ *avec* $\mathrm{Argch}(0) = 1$. *Elle est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *avec*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Enfin $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argch}(x) = +\infty$.

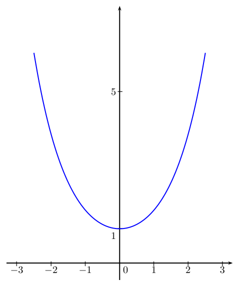
La fonction Argsh**.**

La fonction sh est elle continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc il existe une fonction notée Argsh et définie sur $\mathbb{R}$ telle que

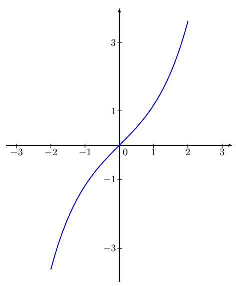
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{sh}(x) \iff x = \mathrm{Argsh}(y).$$

Propriétés 7.18 *La fonction* Argsh *est continue, impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec*

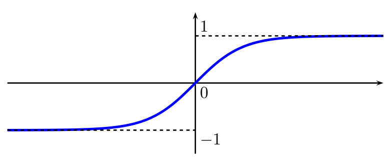
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}\ x$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}\ x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'x = \mathrm{ch}\ x$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{sh}\ x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'x = 1/(\mathrm{ch}^2 x)$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{th}\ x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

FIG. 7.13 – *Graphe et tableau de variation des fonctions hyperboliques*

La fonction Argth**.**

La fonction th est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$. Donc il existe une fonction notée Argth et définie sur $]-1,1[$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{th}(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{Argth}(y).$$

Propriétés 7.19 *La fonction* Argth *est continue, impaire et strictement croissante sur* $]-1,1[$*. Elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Enfin $\lim_{x \to 1^-} \mathrm{Argth}(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to (-1)^+} \mathrm{Argth}(x) = -\infty$.

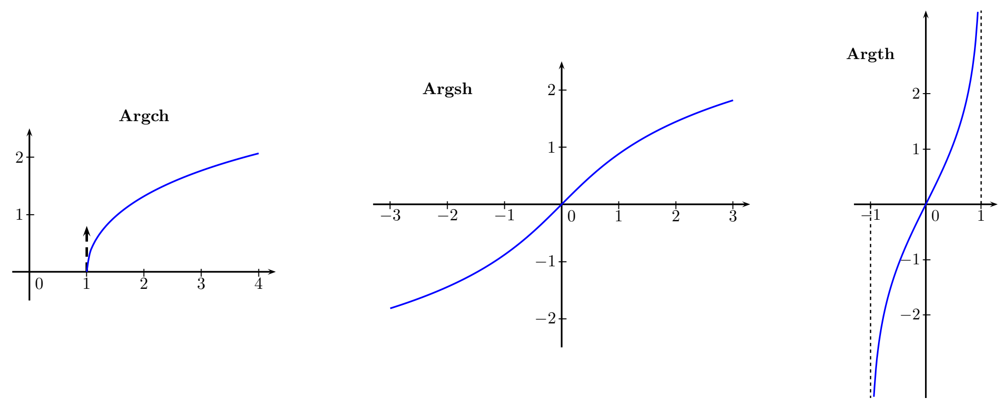


FIG. 7.14 – *Graphe et tableau de variation des fonctions hyperboliques réciproques*

Formules

Les trois fonctions hyperboliques réciproques ont une expression logarithmique.

Proposition 7.2

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, &\quad \operatorname{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2});\\
\forall x \in [1,+\infty[, &\quad \operatorname{Argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1});\\
\forall x \in]-1,1[, &\quad \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Enfin comme pour les fonctions trigonométriques, on renvoie au formulaire à la fin de ce cours pour les formules de trigonométrie hyperbolique.

Chapitre 8

Équations différentielles

On va se limiter ici aux équations différentielles dites *linéaires du premier ou du deuxième ordre à coefficients constants* avec un second membre de la forme $P(x)e^{dx}$ où P est une fonction polynomiale et $d \in \mathbb{R}$.

Ce sont des équations dont les solutions sont des fonctions et qui font intervenir les dérivées et/ou les dérivées secondes de ces fonctions. Donc elles sont de la forme :

$$ay' + by = P(x)e^{dx}, \quad \text{équation du premier ordre,} \tag{8.1}$$

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{dx}, \quad \text{équation du deuxième ordre,} \tag{8.2}$$

avec a, b et c des nombres réels, $a \neq 0$. L'inconnue est donc la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le terme *linéaire* vient du fait que les dérivées de y sont liées entre elles par une relation linéaire.

8.1 Structure de l'ensemble des solutions

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions des équations (8.1) ou (8.2), c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables dans le cas (8.1) ou deux fois dérivables dans le cas (8.2) qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ af'(x) + bf(x) = P(x)e^{dx}, \quad \text{équation (8.1),}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = P(x)e^{dx}, \quad \text{équation (8.2.}$$

Définition 8.1 *On appelle* équation différentielle homogène *une équation différentielle du type (8.1) ou (8.2) où P est le polynôme nul.*

Autrement dit ces équations sont

$$ay' + by = 0, \quad \text{équation du premier ordre,} \tag{8.3}$$

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{équation du deuxième ordre.} \tag{8.4}$$

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions des équations (8.3) ou (8.4). On a alors

Théorème 8.1 *Pour toute fonction f_0 appartenant à $\mathcal{S}$,*

$$\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_h = \{f_0 + g,\ g \in \mathcal{S}_h\}.$$

Ceci signifie que **pour résoudre (8.1) ou (8.2), il suffit de résoudre (8.3) ou (8.4), puis de déterminer une solution « particulière ».**

8.2 Cas du premier ordre

Théorème 8.2 *Posons $r_0 = -b/a$. Les solutions de (8.3) sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{r_0 x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.*

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ est donc un espace vectoriel de dimension 1 (voir le cours d'algèbre). Pour trouver une solution particulière on a

Proposition 8.1
- *Si $d \neq r_0$, alors (8.1) admet une solution particulière de la forme $y_0 = Q(x)e^{dx}$ avec Q fonction polynomiale de même degré que P.*
- *Si $d = r_0$, alors (8.1) admet une solution particulière de la forme $y_0 = Q(x)e^{dx}$ avec Q fonction polynomiale de degré celui de P plus un et $Q(0) = 0$.*

Exemple 8.1
- Résoudre $y' + y = xe^x$. On obtient $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^x + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
- Résoudre $y' + 2y = (x^2+1)e^{-2x}$. $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{x^3}{3} + x + \lambda \right) e^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
- Résoudre $y' + y = x\mathrm{sh}(x)$. $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \right) e^x + \left(\lambda - \frac{x^2}{4} \right) e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

8.3 Cas du second ordre

8.3.1 Résolution de (8.4)

Pour cela on résout l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ dans } \mathbb{C}. \tag{8.5}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 8.3 *Trois cas sont à distinguer suivant Δ.*
- *Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $r_0 = -b/(2a)$. Alors*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec α et β dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x) \right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dans tous les cas, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel de dimension deux.

Exemple 8.2

- $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega > 0$: $\mathcal{S}_h = \{x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. On a aussi $\mathcal{S}_h = \{x \mapsto A \cos(\omega x + \phi),\ A \in \mathbb{R}_+,\ \phi \in]-\pi, \pi]\}$.
- $y'' + 2ky' + (k^2 + \omega^2) y = 0$ (oscillateur avec amortissement), avec $k > 0$ et $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h &= \left\{x \mapsto e^{-kx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x \mapsto A e^{-kx} \cos(\omega x + \phi),\ A \in \mathbb{R}_+,\ \phi \in]-\pi, \pi]\right\}. \end{aligned}$$

Remarque 8.1 *Dans le cas où $\Delta > 0$, comme $r_1 = \alpha + \beta$ et $r_2 = \alpha - \beta$ avec α et β dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_h$ peut être mis sous la forme*

$$\mathcal{S}_h = \left\{x \mapsto e^{\alpha x} \left(\lambda \mathrm{ch}(\beta x) + \mu \mathrm{sh}(\beta x)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

8.3.2 Résolution de (8.2)

Théorème 8.4 *L'équation différentielle (8.2) admet une solution particulière de la forme $y_0 = Q(x) e^{dx}$ avec :*

- *P et Q de même degré si d n'est pas racine de l'équation caractéristique (8.5);*
- *degré Q égal au degré de P plus un, si d est racine simple de (8.5);*
- *degré Q égal au degré de P plus deux, si d est racine double de (8.5).*

Et dans tous les cas, $\mathcal{S} = y_0 + \mathcal{S}_h$.

Exemple 8.3

1. $y'' - 3y' + 2y = (x+1) e^{2x}$: $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right) e^{2x} + \mu e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
2. $y'' + y' + y = x e^{-x}$:

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto e^{-x/2} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right] + (x+1) e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Chapitre 9

Formule de Taylor

On rappelle que si f est une fonction de classe C^n, $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f $(1 \leq k \leq n)$.

9.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 9.1 *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point). Alors pour tout $a \in I$,*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit pour tout $x \in I$, $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, en posant

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \quad et \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarquons que

Corollaire 9.1 *si f est une fonction polynôme, de degré inférieur ou égal à n, alors $f^{(n+1)} = 0$, soit*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = S_n(x).$$

Exemple 9.1 À titre d'application, on peut montrer que pour tout $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

9.2 Formule de Taylor

Théorème 9.2 *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Soit a et b des éléments de I tels que $a \neq b$. Alors il existe un nombre θ strictement compris entre a et b tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

Attention : le nombre θ dépend de a, de b et de n.

9.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

On va maintenant borner le reste intégral pour obtenir cette inégalité.

Théorème 9.3 *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. On suppose que $f^{(n+1)}$ est une fonction bornée sur I. Soit $M_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in I,\ |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}$. Alors*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans ce théorème, on peut choisir $M_{n+1} = \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$. De plus si I est un segment $[\alpha, \beta]$, alors la continuité de $f^{(n+1)}$ implique l'existence de la constante M_{n+1} (voir proposition 5.2).

Remarque 9.1 *Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.*

Exemple 9.2 Montrer que pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

puis étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Chapitre 10

Développements limités

10.1 Généralités

10.1.1 Définitions

Définition 10.1
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant x_0, $I \neq \{x_0\}$, et $f : D = I$ ou $I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ (f peut ne pas être définie en x_0). Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 *(un $DL_n(x_0)$) s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels et $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in D,\ f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Ceci est équivaut à l'existence d'une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

On dit que $f - P(. - x_0)$ est négligeable devant $(. - x_0)^n$ au voisinage de x_0 et on note alors

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x - x_0) + o[(x - x_0)^n]$$

(lire « petit o »).

Définition 10.2 *Sous les conditions précédentes, $P(x - x_0)$ (ou $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$) est la* partie régulière *du $DL_n(x_0)$ et $o[(x - x_0)^n]$ (ou $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$) est le* terme complémentaire.

Exemple 10.1 1. On a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc au voisinage de 0, $\frac{\sin x}{x} = 1 + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$. Donc la fonction sin admet un $DL_1(0)$ donné par $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

2. Pour tout x, $1-\cos(x) = 2\sin^2(x/2)$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2} = 1$. Ainsi la fonction cos admet un $DL_2(0)$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = -1/2$.
3. La fonction $f : x \mapsto 1/(1-x)$ est défini sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in D$, $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Donc $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Soit $\varepsilon :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(x) = x/(1-x)$. On a
$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Donc f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 10.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$) avec $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ *(resp. $-\infty$), noté $DL_n(+\infty)$ (resp. $DL_n(-\infty)$), s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que*
$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$$
avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$).

Ceci équivaut à l'existence d'une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n tel que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Remarque 10.1 *Le changement de variable $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + h$ si $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $t = 1/x$ en $+\infty$ ou $-\infty$ permet de ramener x en 0.*

f admet un $DL_n(x_0)$ donné par :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$
si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0+h)$ admet un $DL_n(0)$ donné par
$$g(h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h).$$

De même f admet un $DL_n(+\infty)$ (resp. un $DL_n(-\infty)$) donné par
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$$
si et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(1/t)$ admet un $DL_n(0)$ à droite (resp. à gauche) donné par
$$g(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + t^n \varepsilon(1/t).$$

10.1.2 Propriétés

Théorème 10.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D = I$ ou $D = I \setminus \{0\}$ avec I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un $DL_n(0)$, celui-ci est unique (les coefficients de la partie régulière sont uniques).*

Conséquence : si f est une fonction paire (resp. impaire) et si elle admet un $DL_n(0)$, alors la partie régulière de ce $DL_n(0)$ est un polynôme dont tous les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Théorème 10.2 (Troncature) *Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, alors pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, elle admet un $DL_p(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$.*

Proposition 10.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.*

1. *Si f est continue en x_0, alors f admet un $DL_0(x_0)$ donné par $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*
2. *Si f est dérivable en x_0, alors f admet un $DL_1(x_0)$ donné par $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

la réciproque est également vraie :

Proposition 10.2

1. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ ($D = I$ ou $D = I \setminus \{x_0\}$) admet un $DL_0(x_0)$, alors f est continue ou prolongeable par continuité en x_0.*
2. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ ($D = I$ ou $D = I \setminus \{x_0\}$) admet un $DL_1(x_0)$, alors f ou son prolongement par continuité est dérivable en x_0.*

Attention : si f admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 2$, f n'est pas forcément n fois dérivable en x_0.

Exemple 10.2 Ainsi la fonction $f : 1 - 2x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un $DL_2(0)$ donné par $f(x) = 1 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 10.3 *On suppose que f admet un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Si la partie régulière de ce $DL_n(0)$ n'est pas nulle, on pose $p = \min\{k \in \{0, \ldots, n\}$ t.q. $a_k \neq 0\}$. Alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{a_p x^p} = 1$.*

Le terme $a_p x^p$ est appelé partie principale du *$DL_n(0)$.*

Avec ces notations, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$.

10.2 Existence des développements limités, formule de Taylor-Young

Théorème 10.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I intervalle. Soit $x_0 \in I$. Alors il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour $x_0 = 0$ on parle de formule de MacLaurin, sinon de formule de Taylor-Young. Elle repose sur la formule de Taylor avec reste intégral.

10.3 Exemples classiques

10.3.1 Fonction polynomiale

Une fonction polynomiale f est de classe C^∞, donc admet un $DL_n(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$. De plus si f est de degré n, on a une formule « exacte » :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

10.3.2 Fonction exponentielle

Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc admet un développement limité en tout point et à tout ordre. Pour $x_0 = 0$, sachant que $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).}$$

10.3.3 Fonctions sin et cos

Ce sont deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc pour $k \in \mathbb{N}$,

- si k est impair, $\cos^{(k)}(0) = 0$ et si k est pair, $k = 2p$, $\cos^{(k)}(0) = (-1)^p$;
- si k est pair, $\sin^{(k)}(0) = 0$ et si k est impair, $k = 2p + 1$, $\sin^{(k)}(0) = (-1)^p$.

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \cos(x) & \underset{x \to 0}{=} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \\ \sin(x) & \underset{x \to 0}{=} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). \end{array}}$$

10.3.4 Fonctions puissance

On considère les fonctions $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Elles sont de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$. Donc elles admettent un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Donc on en déduit

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Cas particuliers :

– Si α est un entier positif ou nul, on retrouve les coefficients binomiaux

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k.$$

– Si $\alpha = -1$, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k$. Donc

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).}$$

On en déduit également que

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).}$$

10.4 Intégration des développements limités

Théorème 10.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I avec $0 \in I$. On suppose que f admet un $DL_n(0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ donné par :*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_n(0)$ donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple 10.3 La fonction $F : I =]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui à $x \in I$ associe $F(x) = \ln(1+x)$ est une primitive sur I de la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x)$. La fonction f est continue sur I et admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Donc F admet pour $DL_n(0)$:

$$F(x) = \boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).}$$

Et de même pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).}$$

10.4.1 Application aux fonctions trigonométriques réciproques

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive la fonction Arctan. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n+2} + x^{2n+2}\varepsilon(x^2) \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\left((-1)^{n+1} x + x\varepsilon(x^2)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).}$$

De même la fonction Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, donc admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0. De plus c'est la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On prouve alors que

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{(2k)}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).}$$

10.5 Opérations sur les développements limités

10.5.1 Somme

Proposition 10.4 *Soient f et g deux fonctions définies sur I, admettant des $DL_n(0)$ donnés par*

$$\begin{cases} f(x) & = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \\ & = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0, \\ g(x) & = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + o(x^n) \\ & = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0. \end{cases}$$

Alors $f+g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $R(x) = P(x) + Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$.

10.5.2 Multiplication par scalaire

Proposition 10.5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors λf admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k$.*

Appliquons ces deux résultats aux fonctions ch et sh. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).}$$

10.5.3 Produit

Proposition 10.6 *Soient f et g deux fonctions définies sur I et $n \in \mathbb{N}$, admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P(x)$ et $Q(x)$. Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme $R(x)$ obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le développement du produit $P(x)Q(x)$.*

Exemple 10.4 Le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x \cos(x)$ est

$$e^x \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^4 + o(x^4).$$

10.5.4 Composition

Théorème 10.5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que $f(0) = 0$ (d'où $0 \in I$ et $0 \in J$). On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ ($a_0 = 0$). Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme $R(x)$ obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le développement du polynôme $Q((P(x)) = b_0 + \sum_{k=0}^{n} b_k (a_1 x + \ldots + a_n x^n)^k$.*

Exemple 10.5 Le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ est

$$\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5).$$

10.5.5 Quotient

Théorème 10.6 *Soient f et g définies sur I avec $0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et si $g(0) \neq 0$, alors f/g admet un $DL_n(0)$.*

Exemple 10.6 Le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$ est

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).}$$

10.6 Applications des développements limités

10.6.1 À la recherche des limites

Exemple 10.7 *Déterminer la limite en 0 de f :* $\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin(x) = x + o(x^2).$$

Donc

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2))}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Exemple 10.8 *Déterminer la limite en $+\infty$ de f :* $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x-2}$.

On pose pour $x > 0$, $t = 1/x$ avec $t > 0$. On a

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} - \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} - 2} = \frac{1}{t}(1+t+t^2)^{1/2} - \frac{1}{t}(1+t^2-2t^3)^{1/3}$$

Or au voisinage de 0,

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u), \quad (1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u).$$

Donc

$$(1+t+t^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t), \quad (1+t^2-2t^3)^{1/3} = 1 + o(t).$$

Ainsi

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}t + o(t) - 1 - o(t)\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t + o(t)\right) = \frac{1}{2} + o(1),$$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$.

Exemple 10.9 *Suite de l'exemple 10.8 : trouver un équivalent de $f(x) - 1/2$ en $+\infty$.*

On pousse les développements limités utilisés :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2), \quad (1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2).$$

Alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}(t+t^2) - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) - 1 - \frac{1}{3}t^2 - o(t^2)\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right)t^2 + o(t^2)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}t + o(t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{24x}.$$

Remarque 10.2 *On en déduit que la droite $y = 1/2$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f et au voisinage de $+\infty$, $f(x) - 1/2$ a le même signe que $1/(24x)$. Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de son asymptote.*

Remarque 10.3 *On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.*

En effet

$$\sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}, \quad \sqrt[3]{x^3+x-2} = x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}.$$

Quand on fait tendre x vers $-\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée.

10.6.2 À l'étude des branches infinies

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f (dans un repère du plan). Différents cas de figure se présentent :

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$, alors la droite $\Delta : x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ en x_0 (et idem à gauche ou à droite en x_0).
2. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors la droite $\Delta : y = l$ est asymptote horizontale en $\pm\infty$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ est donné par le signe de $f(x) - l$ au voisinage de $\pm\infty$.
3. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie la limite éventuelle de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$.
   (a) Premier cas : $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: alors il n'y a pas d'asymptote, mais $\mathcal{C}$ présente en $\pm\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

(b) Deuxième cas : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: il n'y a pas d'asymptote, mais $\mathcal{C}$ présente en $\pm\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

(c) Troisième cas : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, avec $a \in \mathbb{R}^*$: on étudie la limite éventuelle en $\pm\infty$ de $x \mapsto f(x) - ax$.

- Si cette limite n'existe pas, la droite $\Delta : y = ax$ est direction asymptotique.
- Si cette limite vaut $\pm\infty$, alors $\mathcal{C}$ a une branche parabolique de direction $\Delta : y = ax$.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$.

Définition 10.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire $[\alpha, +\infty[\subset I$ (resp. $]-\infty, \alpha] \subset I$). On dit que f admet* un développement limité généralisé à la précision $1/x^n$ en $\pm\infty$ *($n \in \mathbb{N}$) si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_m$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$) et $b_0, \ldots, b_n$ tels que :*

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 10.7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Supposons que f admet un développement limité généralisé en $\pm\infty$ ($n \in \mathbb{N}$) de la forme :*

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

avec a, b, c dans $\mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$, courbe de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$). De plus au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), $f(x) - ax - b$ est du signe de c/x^p, ce qui donne la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

Exemple 10.10 *Étudier les branches infinies en $\pm\infty$ de $f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.*

On pose $t = 1/x$ pour se ramener en zéro. Quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), t tend vers 0^+ (resp. 0^-). Pour tout t dans un voisinage de zéro :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t}\exp\left(\frac{2/t}{(1/t^2) - 1}\right) = \frac{1}{t}\exp\left(\frac{2t}{1 - t^2}\right) \\
&= \frac{1}{t}\exp\left(2t(1 + t^2 + o(t^2))\right) = \frac{1}{t}\exp\left(2t + 2t^3 + o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{t}\exp\left(2t + o(t^2)\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t}\left(1 + 2t + 2t^2 + o(t^2)\right)
\end{aligned}$$

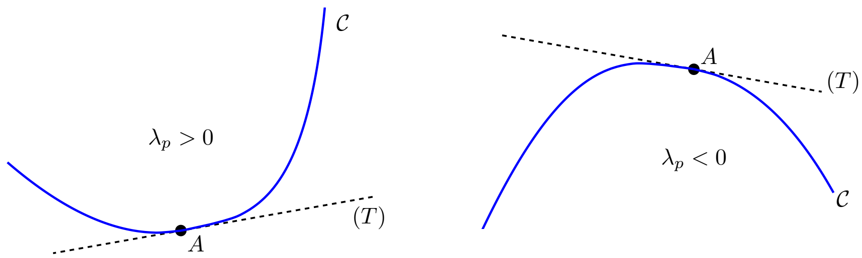


FIG. 10.1 – *p pair : $\mathcal{C}$ ne traverse pas (T)*

Donc

$$f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) = x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}).$$

La droite $\Delta : y = x+2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$. De plus $f(x)-(x+2) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2}{x}$, donc au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, $f(x)-(x+2)$ est du signe de $2/x$. Ainsi $\mathcal{C}$ est au dessous de Δ en $-\infty$, au dessus en $+\infty$.

10.6.3 Étude locale au voisinage d'un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité en a de la forme

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec $p \geq 2$, $\lambda_p \neq 0$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda_0$. Donc f est définie et continue en a ou prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = \lambda_0$. On suppose désormais $a \in I$ et $f(a) = \lambda_0$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan et $A = (a, f(a))$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

Au voisinage de a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda_1 + \lambda_p(x-a)^{p-1} + o((x-a)^{p-1}) = \lambda_1 + o(1).$$

Donc f est dérivable en a avec $f'(a) = \lambda_1$. La tangente (T) en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, soit $y = \lambda_0 + \lambda_1(x-a)$. Et comme $\lambda_p \neq 0$,

$$f(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a)) \underset{a}{\sim} \lambda_p(x-a)^p.$$

Ainsi au voisinage de a, $f(x)-(\lambda_0+\lambda_1(x-a))$ est du signe de $\lambda_p(x-a)^p$ ce qui donne la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T) au voisinage de a^+ et a^-.
Deux cas de figure se présentent :

1. Si p est pair : $\mathcal{C}$ reste du même côté de (T).
2. Si p est impair : $\mathcal{C}$ traverse (T) et on dit que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

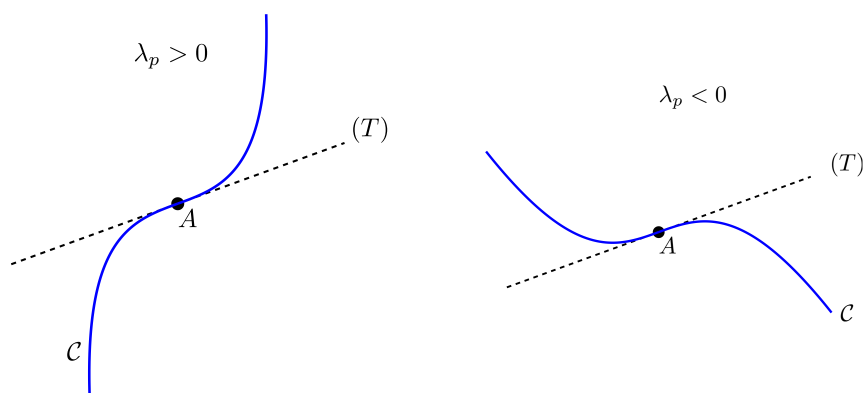


FIG. 10.2 – p *impair :* $\mathcal{C}$ *traverse* (T)

Formulaire

Trigonométrie

Formules de trigonométrie.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b$
- $\sin(a+b) = \cos a\, \sin b + \cos b\, \sin a$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2\cos x\, \sin x$

Transformation de produit en somme.

- $2\, \cos a\, \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
- $2\, \sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $2\, \sin a\, \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Transformation de somme en produit.

- $\cos p + \cos q = 2\, \cos \dfrac{p+q}{2}\, \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\, \sin \dfrac{p+q}{2}\, \sin \dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\, \sin \dfrac{p+q}{2}\, \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\, \sin \dfrac{p-q}{2}\, \cos \dfrac{p+q}{2}$

Quart de tour et demi-tour.

On peut «lire» sur le cercle trigonométrique les formules suivantes.

- $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$
- $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
- $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

Fonction tangente.

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\ \tan b},\ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\ \tan b},\ \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$$

Angle moitié.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $t = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2}$. Alors, on a:

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}.}$$

Trigonométrie hyperbolique

Formules de trigonométrie.

- $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
- $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$
- $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{sh}b + \mathrm{ch}b\,\mathrm{sh}a$
- $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$
- $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}x$

Transformation de produit en somme.

- $2\,\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b = \mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)$
- $2\,\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b = \mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)$
- $2\,\mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b = \mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)$

Transformation de somme en produit.

- $\mathrm{ch}p + \mathrm{ch}q = 2\,\mathrm{ch}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{p-q}{2}$
- $\mathrm{ch}p - \mathrm{ch}q = 2\,\mathrm{sh}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\dfrac{p-q}{2}$
- $\mathrm{sh}p + \mathrm{sh}q = 2\,\mathrm{sh}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{p-q}{2}$
- $\mathrm{sh}p - \mathrm{sh}q = 2\,\mathrm{sh}\dfrac{p-q}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{p+q}{2}$

Dérivées

Les résultats de cette page sont **à connaître par cœur.**

Fonction.	Dérivée.	Intervalle de validité.
x^α avec $\alpha \neq 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$)
$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
a^x avec $a > 0$, $a \neq 1$	$(\ln a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$	$\mathbb{R}$

Ceux de cette page peuvent être appris; dans tous les cas il faut savoir les retrouver rapidement.

Fonction.	Dérivée.	Intervalle de validité.
Arccos	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
Arcsin	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
Arctan	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
Argch	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$
Argsh	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
Argth	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$

Primitives

Les résultats suivants doivent être connus (programme terminale S).

Fonction.	Primitive.	Intervalle de validité.
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
a^x avec $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

Les résultats suivants doivent pouvoir être retrouvés en lisant le tableau des dérivées à l'envers.

Fonction	Primitive	Intervalle de validité.
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}x$	$\ln \mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$]-a,a[$

Alphabet grec

Lettre minuscule	Lettre majuscule	Français	Valeur
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	é
ζ	Z	zéta	z
η	H	éta	e
θ	Θ	théta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p

Lettre minuscule	Lettre majuscule	Français	Valeur
ρ	P	rho	r,rh
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	u
ϕ	Φ	phi	f
χ	X	khi	kh
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	omega	o