Le Mans Université

Licence MPC deuxième année

Mathématiques

Alexandre POPIER

Année : 2020–2021

Table des matières

Introduction

Au lycée et en première année de licence, a été vue **l'intégration** d'une fonction, notée :

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f(t)dt, \quad \int f, \quad \ldots$$

L'objet intégré f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (intervalle, segment, etc.) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Des conditions de régularité ont été ajoutées éventuellement sur f pour que son intégrale (ou sa primitive) ait un sens : continue, continue par morceaux, etc. Le symbole $\int$ (qui est un S très allongé) permet de préciser qu'on intègre cette fonction et cette opération est la transformation inverse de la dérivation, grâce à la formule fondamentale de l'analyse :

$$\int_a^b f' = \int_a^b f'(u)du = f(b) - f(a).$$

D'un point de vue physique, si f est une vitesse d'un objet, son intégrale est la position de cet objet.

Si nous vivions dans un univers à une dimension, nous pourrions nous contenter de cette formule. Mais il est fréquent en physique que les fonctions (température, pression, champ électrique, etc.) dépendent par exemple de la position de l'objet, donc de trois variables, voire de quatre si on ajoute le temps. Par ailleurs un champ magnétique ou une force ont souvent trois valeurs correspondant aux trois directions de l'espace. En clair on a toujours des fonctions f mais définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Donc **l'objectif principal** de ce cours est d'étendre la notion d'intégrale pour des dimensions autres que 1. Or en dimension supérieure ou égale à 2, les objets géométriques sont plus complexes puisqu'on augmente les degrés de liberté. Dans un plan, on a des triangles, des cercles, des ellipses, etc., dans l'espace des plans, des sphères, des cônes, des tores, etc. Donc on va intégrer mais sur des ensembles plus sophistiqués qu'un segment $[a, b]$!

En revanche aucune notion topologique fine ne sera exigée dans ce cours. De même nous supposerons toujours que les objets ont la régularité suffisante pour que les intégrales existent. Enfin nous nous limiterons aux dimensions 2 et 3. On renvoie les étudiants intéressés aux cours de "topologie" et "fonctions à plusieurs variables" du semestre 4 et de "mesure et intégration" du semestre 5. Le **but** est qu'un étudiant soit capable de mettre en place une stratégie de calcul d'une intégrale et parvienne au résultat demandé.

Plan du cours

Dans le chapitre 1, nous reprenons tout ce qui doit être su sur l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur un segment $[a, b]$. C'est la base que tout étudiant doit maitrîser.

Dans le chapitre 2, nous étendons ce qui a été vu en dimension 1 à la dimension 2. S'il n'y a pas de difficulté théorique pour augmenter d'une dimension, il faut prendre conscience de la difficulté due à la géométrie des ensembles sur lesquels on intègre. Les théorèmes de Fubini et de changement de variables sont les résultats clés sur les **intégrales doubles**.

Le chapitre 3 concerne l'intégrale curviligne. Au lieu d'intégrer sur un bout de droite (chapitre 1), on intègre sur une courbe qui se balade dans un espace à deux dimensions. Imaginons un objet mobile se déplaçant sur le sol. Sa trajectoire décrit une courbe plus ou moins compliquée. Le long de sa trajectoire certaines forces s'appliquent sur l'objet : pesanteur, frottements, etc. Si on veut calculer l'énergie dépensée pendant le trajet, on doit calculer une intégrale le long de cette trajectoire. On parle d'**intégrale curviligne**.

Les chapitres 4 et 5 reprennent ce qui a été fait en dimension 2 et passent en dimension 3 : **intégrales triples et de surface**.

On se posera aussi la question de ce que devient la formule fondamentale $\int f' = f$ quand la dimension augmente (théorèmes de Green-Riemann et de Stokes). Ces résultats joueront un rôle central en électromagnétisme ou en mécanique des fluides.

Prérequis

Dans ce cours, nous utiliserons les cours :

— Algèbre linéaire 1 et algèbre linéaire 2 : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ doit être connu !

— Outils mathématiques : les calculs de base (dérivation et intégration) serviront de façon intensive.

Insistons sur le fait que les calculs de dérivée sont considérés ici comme *parfaitement acquis* ! De même toutes les fonctions usuelles de L1 sont supposées connues sur le bout des doigts : puissance, exp, ln ou log, cos, sin, tan et leurs fonctions réciproques. Les formules de trigonométrie doivent être su.

Enfin un peu de géométrie va s'avérer très utile. Donc se replonger dans la géométrie dans l'espace de lycée est très vivement conseillé si on n'est pas sûr de soi...

Notations

Dans ce cours, un repère orthonormé de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera noté $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, ce qui signifie que tout élément V de $\mathbb{R}^n$ (**vecteur**) s'écrit de manière unique :

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

où v_i est le nombre réel $v_i = \langle V, e_i \rangle$, c'est-à-dire le produit scalaire de V avec e_i. On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs V_1 et V_2, dont les coordonnées sont respectivement $(v_1^1, \ldots, v_n^1)$ et $(v_1^2, \ldots, v_n^2)$, est défini par

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^1 v_i^2.$$

La norme (issue de ce produit scalaire) d'un vecteur V de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$ est

$$\|V\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i)^2}.$$

On identifiera en permanence un vecteur V et ses coordonnées en écrivant $V = (v_1, \ldots, v_n)$. On ne distinguera pas la notation ligne ou colonne des vecteurs (attention quand il s'agit de multiplier avec des matrices...).

Côté analyse, f' désignera toujours la dérivée d'une fonction à une variable. Elle est réservée exclusivement aux fonctions à une variable. Si la fonction dépend de plusieurs variables, il sera nécessaire de préciser par rapport à quelle variable on dérive (dérivée partielle).

Chapitre 1

Intégration sur un segment : rappels

Dans tout ce chapitre, a et b désigneront **deux nombres réels**.

1.1 Bases théoriques de l'intégration

Il ne s'agit pas ici de détailler la construction de l'intégrale de Riemann, mais d'en donner les rudiments pour avoir une base saine pour le calcul d'intégrales.

1.1.1 Fonctions en escalier

Une fonction u définie sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$ la restriction de u à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ soit une constante $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (voir Figure 1.1). La somme, le produit de deux fonctions en escalier, ainsi que la multiplication d'une fonction en escalier par un scalaire est encore une fonction en escalier.

Le nombre qui représente la somme des aires relatives entre la courbe et l'axe des abscisses,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{R}\,,$$

est appelé *intégrale de u sur le segment* $[a, b]$ et noté

$$\int_{[a,b]} u \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} u(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b u \quad \text{ou} \quad \int_a^b u(t)dt$$

qui présuppose que l'intégrale ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à u (la vérification de cette assertion est un bon exercice).

1.1.2 Intégrale au sens de Riemann

Une fonction à valeurs réelles $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et **bornée** est intégrable (au sens de Riemann, voir Figure 1.1) sur le segment $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions u et v en escalier vérifiant :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ pour tout } x \in [a, b], \text{ et } \int_{[a,b]} (v(x) - u(x))\, dx \leq \varepsilon\,.$$

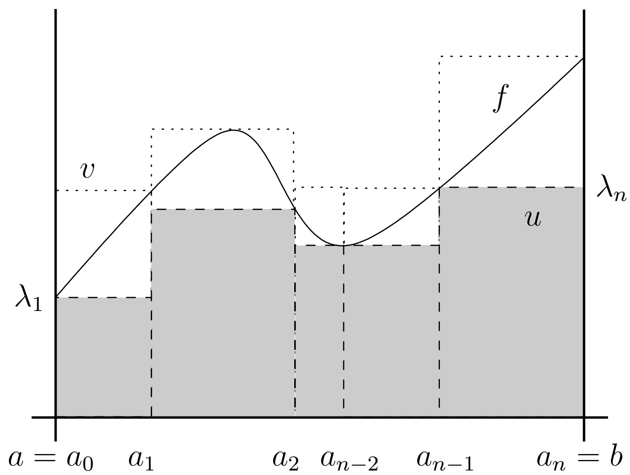

FIGURE 1.1 – Encadrement de la fonction f par des fonctions en escalier supérieure et inférieure.

Pour une subdivsion $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ adaptée à u et v, les sommes

$$\int_{[a,b]} u(x)dx\,, \quad \int_{[a,b]} v(x)dx$$

sont appelées respectivement les sommes de Darboux inférieure et supérieure. Dans le cas où la fonction est intégrable, l'intégrale de Riemann vaut

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f &= \inf\left(\int_{[a,b]} v(x)dx\,, f(x) \leq v(x), v \text{ en escalier sur } [a, b]\right) \\
&= \sup\left(\int_{[a,b]} u(x)dx\,, u(x) \leq f(x), u \text{ en escalier sur } [a, b]\right)\,.
\end{aligned}$$

On admettra les résultats suivants :

Proposition 1.1

1. *Toute fonction monotone sur un segment est intégrable au sens de Riemann,*
2. *Toute fonction continue (ou continue par morceaux) sur un segment est intégrable au sens de Riemann.*

Rappelons qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux sur* $[a,b]$ si elle est bornée et s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que, pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$ la restriction de u à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ soit continue et les limites $\lim\limits_{x\downarrow a_{i-1}} u(x)$ et $\lim\limits_{x\uparrow a_i} u(x)$ existent.

Il existe pourtant des fonctions bornées pour lesquelles ces deux bornes ne sont pas égales, ces fonctions ne sont pas intégrables au sens de Riemann. C'est le cas, par exemple de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si x est rationnel et $f(x) = 1$ si x est irrationnel.

L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann est plus vaste que l'ensemble des fonctions continues par morceaux et des fonctions monotones mais on ne peut le décrire précisément. On peut donner l'exemple d'une fonction f bornée, non monotone, non continue par morceaux, définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pour} \quad x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]\,, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

qui n'admet pas de subdivision finie pour être continue par morceaux mais qui est intégrable au sens de Riemann. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{N_\varepsilon^2} < \varepsilon$. On prend alors les fonctions en escaliers $u(x) = -\frac{1}{N}$ pour $x \in [0, \frac{1}{N}]$ et $u(x) = f(x)$ pour $x \in]\frac{1}{N}, 1]$ ainsi que $v(x) = 1/N$ pour $x \in [0, \frac{1}{N}]$ et $v(x) = f(x)$ pour $x \in]\frac{1}{N}, 1]$. On a alors

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ pour tout } x \in [0,1], \text{ et } \int_{[a,b]} (v(x) - u(x))\, dx \leq \varepsilon\,.$$

Pour une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(w_k\right),$$

le point w_k étant choisi arbitrairement dans l'intervalle $[a+(k-1)(b-a)/n, a+k(b-a)/n[$. $S_n(f)$ est appelé **somme de Riemann**. On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Une fonction f est intégrable (au sens de Riemann) si et seulement si ses sommes de Riemann convergent, c'est-à-dire si la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas cette limite est égale à $\displaystyle\int_a^b f$.

Ce résultat permet notamment de calculer numériquement une intégrale (par la méthode des rectangles).

1.1.3 Propriétés de l'intégrale

On rappelle que pour $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_{[a,b]} f(x)dx\,.$$

Donnons maintenant les propriétés de l'intégrale de Riemann :

1. La somme de deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ ainsi que le produit d'un réel avec une fonction intégrable sur $[a, b]$. Le produit de deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$. Si f_1 et f_2 sont intégrables alors les fonctions $\max(f_1, f_2)$ et $\min(f_1, f_2)$ sont intégrables. En particulier, si f est intégrable, sont intégrables les fonctions partie positive $f^+ = \max(f, 0)$, partie négative $f^- = -\min(f, 0)$ et valeur absolue $|f| = f^+ + f^-$.
2. L'application qui à toute fonction intégrable associe son intégrale est linéaire, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$
3. Si $f \leq g$ sont intégrables alors si $a < b$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ et, par conséquent,
$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b - a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$
4. *Relation de Chasles* : soient $c \in [a, b]$ et une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f\,.$$

En particulier si m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$, alors $m(b - a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$. Donc si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$. De plus si f est continue et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Enfin la construction de l'intégrale comme somme des aires de rectangles nous permet de donner une signification géométrique à $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ pour $a < b$ quand la fonction f est positive.

Proposition 1.2 *Si $f \geq 0$ (c'est-à-dire pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.*

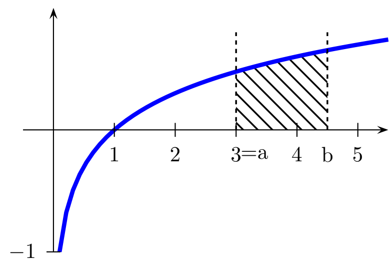

Figure 1.2 – Intégrale et aire

Sur la figure 1.2, la fonction logarithme est bien positive sur $[1,5]$ et avec $a = 3$ et $b = 4,5$, l'aire hachurée vaut $\displaystyle\int_a^b \ln x dx = 4,5\ln(4,5) - 3\ln(3) - 1,5 \approx 1,97$.

1.2 Primitives

Jusqu'à présent l'intégrale est définie sans recours à la notion de primitive. Rappelons que

Définition 1.1 f admet pour primitive F sur un intervalle I *si* F *est dérivable sur* I *et a pour dérivée la fonction* f*, c'est-à-dire pour tout* $x \in I$*,* $F'(x) = f(x)$*.*

Par ailleurs

Proposition 1.3 *Soit* F *une primitive de* f *sur* I*. Une fonction* G *est une autre primitive de* f *sur* I *si et seulement s'il existe une constante* $c \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in I$*,* $G(x) = F(x) + c$*.*

Ainsi une fonction, qui a une primitive, en admet une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante. Si on spécifie une valeur particulière en un point fixé dans $[a,b]$, alors on a unicité de la primitive. Le lien avec l'intégrale est le suivant :

Théorème 1.2 *Si* f *est continue sur* $[a,b[$ *(semi-ouvert, borné ou non), alors* f *est intégrable sur* $[a,x]$ *pour tout* $a \leq x < b$*. La fonction* $F : [a,b[\to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall a \leq x < b,\ \ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f*,* $F'(x) = f(x)$*, satisfaisant* $F(a) = 0$ *(qui s'annule en* a*).*

Notation. Une primitive quelconque de f sera notée $\int f$ ou $\int f(t)dt$ ou $x \mapsto \int^x f(t)dt$ (le t ne jouant aucun rôle particulier). Attention, cette notation ne donne aucune information sur l'intervalle $[a,b]$.

Les primitives classiques sont à connaître (voir tableau à la fin du cours). Grosso modo, il faut lire le tableau des dérivées dans l'autre sens.

À partir du théorème précédent, on considère deux nombres α et β avec $\alpha < \beta$ et f est une fonction continue (et donc bornée) sur $[\alpha, \beta]$.

Proposition 1.4 *Soient a et b tels que $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à $F(b) - F(a) = [F]_a^b$, où F est une primitive quelconque de f sur $[\alpha, \beta]$:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

Il est important de remarquer que ce nombre est bien *indépendant* du choix de la primitive F. En effet si G est une primitive de F sur $[\alpha, \beta]$, alors $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. Donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Pour une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$, on a défini la primitive F qui s'annule en a par la formule :

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Cette fonction F est dérivable avec : $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$. On peut définir alors d'autres fonctions en composant F avec les fonctions usuelles. Ainsi si u est une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $[a, b]$, alors on définit

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ G(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt = F(u(x)).$$

Si cette fonction u est dérivable, alors G est dérivable et sa dérivée est

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ G'(x) = f(u(x)) \times u'(x).$$

Exemple 1.1 *Étudier la fonction G définie sur $[0, 2]$ par*

$$\forall x \in [0, 2],\ G(x) = \int_1^{x^2} \exp(2t)dt.$$

On peut aussi s'intéresser à la fonction suivante

$$\forall x \in [a, b],\ H(x) = \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = F(b) - F(x).$$

Ainsi la dérivée de H est la fonction $-f$. Et on peut combiner le tout, en considérant deux fonctions u et v définies sur $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $[a, b]$, et en posant :

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

Si u et v sont dérivables, alors H est dérivable et

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

1.3 Procédés d'intégration

Nous allons nous intéresser maintenant au calcul effectif d'intégrale du type $\int f$ ou $\int_a^b f(x)dx$. On commencera toujours par vérifier que la fonction f satisfait toutes les conditions requises, essentiellement que f *est continue par morceaux*. L'intégrale de f sur $[a, b]$ sera alors via la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt,$$

la fonction f étant continue sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. On travaille ensuite sur chacun de ces intervalles.

1.3.1 Tableau des primitives

Pour déterminer une primitive (et par conséquent toutes les primitives) d'une fonction continue et calculer son intégrale, on lira les tableaux des dérivées en sens inverse : de la dérivée vers la fonction. On renvoie le lecteur au formulaire pour le tableau des primitives. Attention dans ce tableau on ne donne qu'une primitive (pensez à ajouter une constante si besoin).

1.3.2 Intégration par parties

La technique suivante est basée sur la formule de dérivation d'un produit :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Théorème 1.3 (Intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$. Alors :

1. $\int fg' = fg - \int f'g$;
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$

Exemple 1.2

1. La fonction $x \mapsto x\cos x$ est continue (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$. Et $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin = x\sin x + \cos x + c$, c étant une constante réelle quelconque (une primitive est toujours déterminée à constante près). Si on demande la primitive de $x \mapsto x\cos x$ qui s'annule en 0, alors il faut choisir $c = -1$.
2. La fonction $x \mapsto xe^x$ est continue (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - (e-1) = 1$.

1.3.3 Intégration par changement de variable

Théorème 1.4
Soient f et g deux fonctions définies et continues respectivement sur $[u, v]$ et sur $[\alpha, \beta]$ et telles que g est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ avec $g([\alpha, \beta]) \subset [u, v]$. Alors pour tous a et b dans $[\alpha, \beta]$, on a

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

avec $z = g(x)$ et $dz = g'(x)dx$.

Attention : les valeurs aux bornes changent !

Exemple 1.3

1. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$. D'abord la fonction $g : x \mapsto \tan x$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, de dérivée $x \mapsto 1/(\cos^2 x)$. Et la fonction $f : x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant ce qui précède on obtient
$$\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\tan 1} xdx = \frac{(\tan 1)^2}{2}.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx$. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $[1, 2]$. Donc
$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} x^2 dx = \frac{(\ln 2)^3}{3}.$$

1.4 Primitives d'une fraction rationnelle

On a vu au chapitre sur les fonctions usuelles qu'une fraction rationnelle est une fonction de la forme P/Q, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. On rappelle qu'elles ne sont pas définies en général sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. D'abord on commence par factoriser le polynôme Q :

$$Q(x) = A \prod_{i=0}^{r} (x - a_i)^{n_i} \prod_{j=0}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j},$$

avec n_i et m_j entiers supérieurs à 1, et $b_j^2 - 4c_j < 0$. Par exemple :

$$Q(x) = 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 24x + 24 = 3(x + 2)^2(x^2 + 2).$$

On admet ici le résultat suivant :

Théorème 1.5 (Décomposition en éléments simples) *Toute fraction rationnelle est la somme :*

1. *d'un polynôme R, appelé partie entière de P/Q ;*
2. *de fractions de la forme $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$, où a et α sont des nombres réels et n un entier strictement positif (a est alors une racine de Q, c'est-à-dire $Q(a)=0$) ;*
3. *de fractions du type $\dfrac{\beta X+\gamma}{(X^2+bX+c)^m}$, où β et γ, b et c sont des nombres réels tels que $b^2-4c<0$, m un entier strictement positif.*

Ainsi avec les notations précédentes pour la factorisation de Q :

$$f(x) = R(x) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\beta_{jk}x+\gamma_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k},$$

Par exemple :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}.$$

Pour calculer une primitive de P/Q, il suffit de savoir calculer les primitives des éléments simples, c'est-à-dire du type 2 ou 3.

Pour le type $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$

On remarque que c'est une fonction de la forme $\alpha u(x)^{-n}u'(x)$ avec $u(x)=x-a$. Ainsi

$$\int \frac{\alpha}{(t-a)^n}dt = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \\ \alpha \ln|x-a| & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Le résultat est donné à une constante additive près...

Pour le type $\dfrac{\beta X+\gamma}{(X^2+bX+c)^m}$

Ce cas est plus compliqué que le précédent, surtout quand m est grand. Cherchons une primitive d'abord pour $m=1$.

$$\begin{aligned} \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} &= \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \frac{\gamma-\frac{\beta b}{2}}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

Or $b^2 - 4c < 0$. On pose $\nu^2 = c - \dfrac{b^2}{4} > 0$. Ainsi

$$\frac{\beta x + \gamma}{x^2 + bx + c} = \frac{\beta}{2}\frac{2x + b}{x^2 + bx + c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\frac{1}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \nu^2}.$$

Le but de cette manipulation est d'obtenir un premier terme de la forme u'/u. En effet

$$\int \frac{\beta}{2}\frac{2t + b}{t^2 + bt + c}dt = \frac{\beta}{2}\ln(x^2 + bx + c).$$

Pour le terme restant on fait un changement de variable $t = \left(u + \dfrac{b}{2}\right)$, qui donne

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + \nu^2}dt &= \int^{x+b/2} \frac{du}{u^2 + \nu^2} = \frac{1}{\nu}\int^{x+b/2} \frac{d(r/\nu)}{1 + (r/\nu)^2} \\ &= \frac{1}{\nu}\int^{(x+b/2)/\nu} \frac{ds}{1 + s^2}\end{aligned}$$

par changement de variable $r = \nu s$. Ainsi

$$\int^x \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + \nu^2}dt = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x + (b/2)}{\nu}\right),$$

et pour conclure en une formule

$$\int \frac{\beta t + \gamma}{t^2 + bt + c}dt = \frac{\beta}{2}\ln(x^2 + bx + c) + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{x + (b/2)}{\sqrt{c - (b^2/4)}}\right).$$

Attention : il est inutile (et contre-productif) d'apprendre une telle formule! En revanche il faut savoir refaire le raisonnement en faisant attention aux changements de variable et à leur implication sur les bornes d'intégration.

Finalement il ne reste plus qu'à intégrer des termes de la forme $\dfrac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^m}$ avec $m > 1$ et $b^2 - 4c < 0$. En suivant le même cheminement que pour $m = 1$:

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^m}dx = \frac{\beta}{2}\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^m}dx + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^m}.$$

La première intégrale se calcule facilement en reconnaissant à une constante près, la dérivée de la fonction $(x^2+bx+c)^{1-m}$. Pour la seconde, on procède comme précédemment :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t^2 + bt + c)^m}dt &= \int \frac{1}{((t + b/2)^2 + c - b^2/4)^m}dt \\ &= \int^x \frac{1}{((t + b/2)^2 + \nu^2)^m}dt \\ &= \int^{x+b/2} \frac{1}{(r^2 + \nu^2)^m}dr = I_m(x + b/2).\end{aligned}$$

Ensuite commence une *récurrence*, d'autant plus longue que m est grand.

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{r^2+\nu^2-r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr \\ &= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{1}{(r^2+\nu^2)^{m-1}}dr - \frac{1}{2\nu^2}\int^{x+b/2} \frac{2r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr. \end{aligned}$$

Ensuite on intègre par parties : $u(r) = r$ et $v'(r) = \dfrac{2r}{(r^2+\nu^2)^m}$, et $u'(r) = 1$, $v(r) = \dfrac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}$. Donc

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}I_{m-1}(x) - \frac{1}{2\nu^2}\left[x\frac{(x^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m} - \int^x \frac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}dr\right] \\ &= I_{m-1}(x)\left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{(m-1)}\frac{1}{2\nu^2}\right] + \frac{1}{2\nu^2(m-1)}\frac{x}{(x^2+\nu^2)^{m-1}}. \end{aligned}$$

L'intégrale se calcule donc par récurrence sur m puisqu'on a diminué d'une unité le degré du dénominateur sous l'intégrale définissant I_m.

Ce calcul s'avère rapidement fastidieux si m est grand. Il faut donc garder à l'idée la méthode : faire apparaître un maximum de dérivées (faciles à intégrer), et avec les termes restants, intégrer par parties de façon à diminuer le degré des dénominateurs en jeu, jusqu'à aboutir à la dérivée d'Arctan.

À titre d'entraînement, on pourra vérifier

Exemple 1.4

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}.$$

1.5 Table des primitives

Les classiques à connaître par coeur

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x avec $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

Des fractions rationnelles, mais pas que... A connaître (ou à savoir retrouver).

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
$\dfrac{1}{x^2+a^2}\ (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}\ (a>0)$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$]-\infty,-a[$ ou $]-a,a[$ ou $]a,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\ (a>0)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$]-\infty,-a[$ ou $]a,+\infty[$

Les fonctions trigonométriques (encore et toujours)

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
$\mathrm{sh} x$	$\mathrm{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch} x$	$\mathrm{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th} x$	$\ln \mathrm{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan} x = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$]k\pi, \pi+k\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\vert\tan \dfrac{x}{2}\right\vert$	$]k\pi, \pi+k\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\vert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\vert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{th}^2 x$	$x - \mathrm{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{th} x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

Les inverses des fonctions trigonométriques (l'intégration par parties).

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$x \arccos(x) + \sqrt{1-x^2}$	$]-1,1[$
$\mathrm{argsh}(x)$	$x \,\mathrm{argsh}(x) - \sqrt{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argch}(x)$	$x \,\mathrm{argch}(x) - \sqrt{x^2-1}$	$[1,+\infty[$
$\mathrm{argth}(x)$	$x \,\mathrm{argth}(x) + \ln(\sqrt{1-x^2})$	$]-1,1[$

Chapitre 2

Intégrale double

La notion d'intégrale d'une fonction a été construite à partir des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$ et en calculant la somme des aires des rectangles obtenus. Le théorème 1.1 montre que cette définition est équivalente à la convergence des sommes de Riemann.

2.1 Intégrale double sur un rectangle

On suppose que f est une fonction définie et bornée sur le rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. On découpe les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$$

avec $x_i = a + i\Delta_n x$ et $y_j = c + j\Delta_m y$ où

$$\Delta_n x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta_m y = \frac{d-c}{m}.$$

Le fait que les subdivisions soient régulières est sans importance mais simplifie les notations. On désigne par $\mathcal{R}_{ij}$ le rectangle $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ et on choisit un point w_{ij} quelconque dans le rectangle $\mathcal{R}_{ij}$. On forme les sommes

$$S_{n,m}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(w_{ij}) \Delta_n x \Delta_m y = \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(w_{ij}).$$

Définition 2.1 *Si lorsque n et m tendent vers $+\infty$, la suite double $S_{n,m}(f)$ converge*[1] *vers une limite S indépendante du choix des points w_{ij} on dit que f est* **intégrable sur $\mathcal{R}$**. *Cette limite S est notée :*

$$\iint_{\mathcal{R}} f \quad ou \quad \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

1. C'est-à-dire s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N et M tels que pour tout $n \geq N$ et $m \geq M$, $|S_{n,m}(f) - L| \leq \varepsilon$.

Comme dans le cas de la dimension 1, les fonctions intégrables peuvent être définies par des sommes de Darboux. Maintenant quelles sont les fonctions intégrables sur un rectangle ?

Proposition 2.1 *Si une fonction f est continue (par morceaux) sur $\mathcal{R}$, elle est intégrable sur $\mathcal{R}$.*

Une fonction f est continue par morceaux sur $\mathcal{R}$ s'il existe une partition $(A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{avec} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{si. } i \neq j,$$

telle que f restreinte à l'ensemble A_i est continue [2] sur A_i. Là aussi la classe des fonctions intégrables est plus vaste que celles des fonctions continues, mais n'est pas explicitable.

Remarque 2.1

- *Si on choisit f constante égale à 1, l'intégrale de f sur $\mathcal{R}$ est l'aire du rectangle $\mathcal{R}$.*
- *Lorsque $f(x,y) \geq 0$ sur $\mathcal{R}$, alors l'intégrale de f sur $\mathcal{R}$ est le volume de la région de $\mathbb{R}^3$ comprise entre le graphe $\Gamma_f = \{f(x,y);\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$ de f, le plan horizontal $z = 0$ et les quatre plans $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$.*

Les propriétés de l'intégrable double seront détaillées plus tard. Néanmoins la proposition suivante va être importante pour le théorème qui suit.

Proposition 2.2 *Si f est définie sur un rectangle $\mathcal{R}$ et si $|f|$ est intégrable sur $\mathcal{R}$, alors f l'est aussi et*

$$\left| \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_{\mathcal{R}} |f(x,y)|dxdy.$$

Le théorème qui suit est très utile pour effectuer les calculs d'intégrale double.

Théorème 2.1 (de Fubini) *Si f est définie sur un rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ et si $|f|$ est intégrable, alors*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Ce théorème est vrai en particulier pour les fonctions continues sur $\mathcal{R}$. Il permet de calculer l'intégrale double en calculant deux intégrales "simples", et ceci dans l'ordre qu'on veut. En particulier si f est à variables séparées, $f(x,y) = g(x)h(y)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right).$$

2. En fait prolongeable par continuité sur l'adhérence de A_i pour éviter les soucis au bord des ensembles.

2.2 Intégrale double sur un domaine quelconque

Une difficulté en dimension 2 (par rapport à la dimension 1) vient de la géométrie. On veut définir $\iint_{\mathcal{D}} f$ pour un domaine $\mathcal{D}$ quelconque (disque, ellipse, triangle, etc.). Ces domaines en question seront toujours supposés *bornés*, c'est-à-dire ils peuvent être inclus entièrement dans un rectangle (triangle, polygône, disque, etc.). À ce titre, un demi plan ou un quart de plan ne sont pas bornés et sont donc exclu du programme de ce cours.

Définition 2.2 *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est* **intégrable sur** *$\mathcal{D}$ s'il existe un rectangle $\mathcal{R}$ contenant $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}$) tel que la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathcal{R}$ par*

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & si\ (x,y) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{D}, \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathcal{R}$.

Dans ce cas l'intégrale $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$ de f sur $\mathcal{D}$ est définie par

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{R}} \widetilde{f}(x,y)dxdy.$$

Pour que cette définition tienne la route, il faut montrer qu'elle ne dépend pas du choix du rectangle $\mathcal{R}$, ce qu'on va supposer ici. Par ailleurs même si f est continue sur $\mathcal{D}$, $\widetilde{f}$ n'est que continue par morceaux sur $\mathcal{R}$.

Propriétés des intégrales doubles. Ce sont les mêmes pour une intégrale sur un segment. Soient f, g et h trois fonctions définies et intégrables sur un domaine $\mathcal{D}$ avec $f(x,y) \leq h(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ et soient λ une constante et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux domaines de $\mathbb{R}^2$ sans point commun sauf le cas échéant sur leur frontière [3]. Alors

1. Linéarité :
$$\iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \iint_{\mathcal{D}} g.$$
2. Monotonie :
$$\iint_{\mathcal{D}} f \leq \iint_{\mathcal{D}} h.$$
3. Si $a \leq f(x,y) \leq b$ avec a et b constantes pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$,
$$a\text{Aire}(\mathcal{D}) \leq \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \leq b\text{Aire}(\mathcal{D}).$$
4. $\left| \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_{\mathcal{D}} |f(x,y)|dxdy.$

3. Plus exactement, leurs intérieurs sont disjoints. Ou encore leur intersection est de mesure nulle.

5. Additivité (relation de Chasles) :

$$\iint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iint_{\mathcal{D}_1} f + \iint_{\mathcal{D}_2} f.$$

Donc si $\mathcal{N}$ a une aire nulle, alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f = \iint_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{N}} f.$$

En particulier l'aire d'un domaine $\mathcal{D}$ est donnée par l'intégrale de la fonction 1 :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy.$$

Théorème de Fubini. À cause de la géométrie du domaine $\mathcal{D}$, il n'est pas aussi simple d'énoncer le théorème que dans le cas d'un rectangle. Nous avons besoin d'une certaine régularité géométrique.

Définition 2.3 *Le domaine $\mathcal{D}$ est* **régulier selon l'axe des** x *s'il est délimité par deux droites horizontales $y = c$ et $y = d$ et deux courbes continues $x = \phi_1(y)$ et $x = \phi_2(y)$ avec $\phi_2(y) \geq \phi_1(y)$ pour tout $y \in [c, d]$, soit*

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, \quad y \in [c, d], \ \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est **régulier selon l'axe des** y *s'il est délimité par deux droites horizontales $x = a$ et $x = b$ et deux courbes continues $y = \psi_1(x)$ et $y = \psi_2(x)$ avec $\psi_2(x) \geq \psi_1(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, soit*

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, \quad x \in [a, b], \ \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est régulier s'il est **régulier** *selon l'axe des x ou l'axe des y.*

Pour un domaine régulier, on peut appliquer le théorème de Fubini.

Théorème 2.2 *Si $|f|$ est intégrable sur $\mathcal{D}$, alors*

1. *si $\mathcal{D}$ est régulier selon l'axe des x,*

$$\iint_{\mathcal{D}} f = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy;$$

2. *si $\mathcal{D}$ est régulier selon l'axe des y,*

$$\iint_{\mathcal{D}} f = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Si le domaine n'est pas régulier, on essaie de le découper en plusieurs parties qui sont régulières et on somme les intégrales calculées sur chacune de ces parties.
Quelques exemples pour le calcul d'aire :

1. Soit $\mathcal{P} = \{(x,y),\ a \leq x \leq b,\ \alpha x + c \leq y \leq \alpha x + d\}$. C'est un parallélogramme ! Alors

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\mathcal{P}) &= \iint_{\mathcal{P}} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha x + c}^{\alpha x + d} dy \right) dx = \int_a^b ((\alpha x + d) - \alpha x + c))dx \\ &= (d-c) \int_a^b dx = (b-a)(d-c).\end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{E}$ un disque elliptique défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

C'est un domaine régulier par rapport à x et à y. En effet

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

Donc

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\mathcal{E}} dxdy = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Dans cette intégrale posons $x = a\cos(\theta)$, pour $\theta \in [0, \pi]$. Alors

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = 2b \int_{\pi}^{0} \sin(\theta)(-a\sin(\theta))d\theta = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)d\theta.$$

On linéarise : $\sin^2(\theta) = (1 - \cos(2\theta))/2$ et il ne reste qu'à primitiver le cosinus pour obtenir :

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \pi ab.$$

On retrouve l'aire du disque si $a = b$ (= rayon), soit πa^2.

Calcul des volumes. L'intégrale double sur un rectangle d'une fonction positive a été interprétée comme le volume compris entre la surface décrite par $(x,y) \mapsto z = f(x,y)$ et le rectangle $\mathcal{R}$ du plan horizontal $z = 0$. Cela s'étend immédiatement à un domaine $\mathcal{D}$ et une fonction positive de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement si $\mathcal{S}$ est le solide (une partie bornée) de $\mathbb{R}^3$ délimité par les deux surfaces $z = f_1(x,y)$ et $z = f_2(x,y)$ avec $0 \leq f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ pour tout domaine $\mathcal{D}$ du plan sur lequel f_1 et f_2 sont définies, alors

$$\text{Volume}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy.$$

Quelques exemples pour le calcul de volume :

1. Soit $\mathcal{S}$ le tétraèdre compris entre le plan d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ et les trois plans $x=0$, $y=0$ et $z=0$. Ici a, b et c sont trois réels fixés.
   Le tétraèdre se projette sur le plan horizontal en un triangle $\mathcal{T}$:
   $$\mathcal{T}=\left\{(x,y),\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right\}.$$
   Ainsi
   $$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{S}) &= \iint_{\mathcal{T}} c\left(1-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dxdy = c\int_0^a\left(\int_0^{b(1-x/a)}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dy\right)dx\\ &= \frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{abc}{6}.\end{aligned}$$
   Formule classique du volume d'un tétraèdre : base $\times$ hauteur divisées par 6.
2. Maintenant $\mathcal{S}$ est la boule de centre 0 et de rayon R, soit
   $$\mathcal{S}=\{(x,y,z),x^2+y^2+z^2\le R^2\}.$$
   Son volume correspond à deux fois le volume de l'hémisphère nord. Or pour celui-ci, z est compris entre 0 et $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. On note $\mathcal{D}$ le disque de centre 0 et de rayon R du plan $z=0$. Ainsi
   $$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{S}) &= 2\iint_{\mathcal{D}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\\ &= 2\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\right)dy\\ &= 8\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\right)dy.\end{aligned}$$
   Or pour $s\ge 0$, en posant $x=s\cos(\theta)$
   $$\int_0^s\sqrt{s^2-x^2}dx=\int_{\pi/2}^0 s\sin(\theta)(-s\sin(\theta))d\theta=s^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta=s^2\frac{\pi}{4}.$$
   Donc
   $$\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx=(R^2-y^2)\frac{\pi}{4}$$
   et
   $$\text{Volume}(\mathcal{S}) = 2\pi\int_0^R\left(R^2-y^2\right)dy=2\pi\left[R^2y-y^3/3\right]_0^R=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

2.3 Changement de variables

La formule est sensiblement plus compliqué que pour la dimension 1, notamment parce qu'il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.4 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}^2$. Une application $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ est un* C^1**-difféomorphisme de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}$** *si Φ est une bijection de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}$ et si Φ et sa bijection réciproque sont de classe C^1 respectivement sur $\mathcal{D}'$ et sur $\mathcal{D}$.*

Ainsi pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}'$, si on pose

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

alors les fonctions $(u, v) \mapsto x(u, v)$ et $(u, v) \mapsto y(u, v)$ sont de classe C^1. La *matrice jacobienne* de Φ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Définition 2.5 *Si $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ est une fonction de classe C^1, alors on appelle* **jacobien de** Φ *le déterminant de la matrice jacobienne :*

$$J_\Phi(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v).$$

Théorème 2.3 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D} = \Phi(\mathcal{D}')$. Alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v))\, |J_\Phi(u, v)|\, dudv.$$

On fera bien attention à la valeur absolue présente autour du jacobien dans cette formule.

2.3.1 Coordonnées polaires

Si un point M est repéré dans le plan par ses deux coordonnées cartésiennes (x, y), alors on définit r comme étant la distance entre l'origine et M :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, +\infty[.$$

Alors on a

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Donc le point $(x/r, y/r)$ est sur le cercle unité et il existe θ tel que

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta).$$

(r, θ) sont les **coordonnées polaires** de M. La difficulté est que θ n'est pas unique par périodicité des fonctions cos et sin. Donc il y a un vrai problème de définition dans ce changement de variables.

Supposons qu'on soit sur un domaine $\mathcal{D}'$ tel que

$$\Phi : (r, \theta) \in \mathcal{D}' \mapsto (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)) \in \mathcal{D}$$

soit un C^1-difféomorphisme. Comme

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$$

le jacobien de Φ vaut :

$$J_\Phi(r, \theta) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r \geq 0.$$

Donc

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \iint_{\mathcal{D}'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

Cette formule aura un rôle très important à jouer dès que le domaine est facilement "paramétrable" en coordonnées polaires (disque, couronne, portion de disque, etc.).

Chapitre 3

Intégrale curviligne

Dans les exercices, on rencontrera uniquement les espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Néanmoins dans le cours, on se placera dans l'espace $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$. L'espace $\mathbb{R}^k$ est muni du repère cartésien canonique $(e_1, \ldots, e_k)$, où $e_i \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème. Les éléments de $\mathbb{R}^k$ seront représentés par les coordonnées dans ce repère $X = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. On rappelle que si X et X' sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$, le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle X, X' \rangle = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \ldots + x_k x_k' = \sum_{i=1}^{k} x_i x_i'.$$

On note $\|X\|$ la norme euclidienne du vecteur X :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}.$$

3.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^k$

Soit une fonction [1]

$$\begin{array}{rccc} F: & I & \to & \mathbb{R}^k \\ & t & \mapsto & F(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)) \end{array}$$

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 *On dit que F est* de classe C^N sur *I $(N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ si et seulement si les fonctions coordonnées $x_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$ sont de classe C^N sur I.*

Si c'est le cas, pour tout $0 \leq p \leq N$, on a : $F^{(p)}(t) = (x_1^{(p)}(t), \ldots, x_k^{(p)}(t))$. En notant $M(t)$ le point de coordonnées $(x_1(t), \ldots, x_k(t))$, et en posant $F(t) = \overrightarrow{OM(t)}$, on a aussi $F^{(p)}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{M(t)}}{\mathrm{d}t^p}$, par identification de M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. On parle parfois de fonction vectorielle quand $k \geq 2$, pour insister sur le côté multi-dimensionnel de l'espace d'arrivée.

Géométriquement,

Définition 3.2 $\Gamma = \{F(t),\ t \in I\}$ *est une* **courbe paramétrée** *de* $\mathbb{R}^k$*, dite plane si* $k = 2$ *ou gauche si* $k = 3$*. On parle aussi d'***arc paramétré** *de classe* C^N*. On dit que* (F, I) *est un* **paramétrage** *de classe* C^N *de* Γ*.*

Le vecteur $F'(t) = F^{(1)}(t)$ est le vecteur directeur de la droite tangente à la courbe Γ au point $F(t)$, appelé aussi **vecteur tangent**. C'est le vecteur vitesse à l'instant t. Tandis que $F^{(2)}$ est l'accélération, Γ étant la trajectoire.

Quelques autres notions sur les courbes.

Définition 3.3
- *Une courbe paramétrée continue* $F : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *est* C^1 **par morceaux** *s'il existe une subdivision* $a = a_0 < \ldots < a_m = b$ *telle que la restriction*[2] *de* F *à* $[a_{k-1}, a_k]$ *est de classe* C^1 *pour tout* $k = 1, \ldots, m$*.*
- *Une courbe* Γ *de paramétrage* $(I = [a, b], F)$ *est* **fermée** *si* $F(a) = F(b)$*, et qu'elle est* **simple** *si sa restriction à* $]a, b[$ *est injective :* $\forall t_1 \neq t_2, \quad F(t_1) \neq F(t_2)$*.*

Proposition 3.1 *Soient* F *et* G *deux fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}^k$ *de classe* C^1 *sur* I*.*

1. *Alors* $\langle F, G\rangle$ *est définie de* I *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall t \in I,\ \langle F, G\rangle(t) = \langle F(t), G(t)\rangle$*, et est de classe* C^1 *sur* I *avec*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle F, G\rangle) = \langle \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}, G\rangle + \langle F, \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\rangle.$$
2. *Si pour tout* $t \in I$*,* $F(t) \neq (0, 0)$*, alors* $t \mapsto \|F(t)\|$ *est de classe* C^1 *sur* I *et*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|F(t)\|) = \frac{1}{\|F(t)\|}\left\langle F(t), \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle.$$

Pour une fonction F de I dans $\mathbb{R}^k$ et pour a et b deux points de I, on définit l'intégrale de F sur le segment $[a, b]$ comme le vecteur de dimension k définie par

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \int_a^b x_2(t)dt, \ldots, \int_a^b x_k(t)dt\right).$$

3.1.1 Effet d'un changement de paramétrage

Définition 3.4 *Sot* $\phi : I \to J$*,* I *et* J *étant deux intervalles de* $\mathbb{R}$*. Soit* $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$*. On dit que* ϕ *est un* C^N-difféomorphisme *de* I *sur* J *si et seulement si* $\phi \in C^N(I)$*,* ϕ *est bijective et* $\phi^{-1} \in C^N(J)$*.*

Dans le cas où $N \geq 1$, ceci équivaut à $\phi \in C^N(I)$, $\phi(I) = J$ et $\forall t \in I,\ \phi'(t) \neq 0$. On a alors deux cas :

2. ou du moins son prolongement

— ou bien : $\forall t \in I,\ \phi'(t) > 0$ et ϕ est strictement croissante sur I,
— ou bien : $\forall t \in I,\ \phi'(t) < 0$ et ϕ est strictement décroissante sur I.

Définition 3.5 *Soit $\mathcal{C} = (F, I)$ un arc paramétré de classe C^N ($N \in \mathbb{N}^*$) et soit Γ son support. On appelle* changement de paramétrage admissible *de Γ tout C^N-difféomorphisme $\phi : J \to I$ (J intervalle de $\mathbb{R}$), et* paramétrage admissible *de Γ tout arc (G, J) où J est un intervalle réel et où G est de la forme $F \circ \phi$ avec ϕ changement de paramétrage admissible. (G, J) a pour support Γ.*

En effet

$$\Gamma = \{F(t),\ t \in I\} = \{F(\phi(u)),\ u \in J\} = \{G(u),\ u \in J\}.$$

Deux cas sont alors possibles :
— ou bien pour tout $u \in J$, $\phi'(u) > 0$. Dans ce cas on dit que le paramétrage (G, J) est positivement admissible et que les paramétrages (F, I) et (G, J) orientent Γ dans le même sens.
— Ou bien pour tout $u \in J$, $\phi'(u) < 0$. Dans ce cas on dit que le paramétrage (G, J) est négativement admissible et que les paramétrages (F, I) et (G, J) orientent Γ dans le sens contraire.

Exemple 3.1 Soient $I = [0, 2\pi]$ et $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Alors (F, I) est un paramétrage de classe C^∞ de $\Gamma = \{(x, y),\ x^2 + y^2 = 1\}$, cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1. On considère les deux paramétrages admissibles suivants :

1. $J = [0, \pi]$ et $\phi : J \to I$, avec $\phi(u) = 2u$: paramétrage positivement admissible (la vitesse est multipliée par deux) ;
2. $K = [-2\pi, 0]$ et $\psi : K \to I$, avec $\psi(v) = -v$: paramétrage négativement admissible (le sens de parcours est inversé).

De là

Proposition 3.2 *Soient $F_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ et $F_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^k$ deux courbes paramétrées. On dit que F_1 et F_2 définissent la même courbe (géométrique) orientée s'il existe un C^1-difféomorphisme ϕ croissant de $[c, d]$ dans $[a, b]$ tel que $F_2 = F_1 \circ \phi$.*

3.1.2 Abscisse curviligne et longueur d'un arc

(F, I) désigne un arc paramétré de classe C^N, $N \geq 1$, $\Gamma = \{M(t), t \in I\}$ est son support orienté par le paramétrage (F, I).

Définition 3.6 *Une* abscisse curviligne *est une application $s : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :*

$$\forall t \in I,\ s'(t) = \|F'(t)\|.$$

C'est l'extension pour les courbes de la notion d'abscisse sur une droite orientée. Ainsi pour $t_0 \in I$ fixé, les abscisses curvilignes de Γ orienté par (F, I) sont les fonctions $s : I \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|F'(u)\| du + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Soit (F, I) arc paramétré de classe C^1. Soient a et b dans I tels que $a < b$. On note A le point de paramètre a et B le point de paramètre b de Γ support de (F, I). La longueur de l'arc AB de Γ est L_{AB} définie par

$$L_{AB} = \int_{a}^{b} \|F'(t)\| dt.$$

On a donc pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $L_{AB} = s(b) - s(a)$.

Exemple 3.2 L'astroïde est la courbe plane paramétrée par : $x = a\cos^3(t)$ et $y = a\sin^3(t)$ avec $a > 0$. Sa longueur totale est $6a$. En effet en remarquant que x et y sont des fonctions 2π-périodiques, paire pour x et impaire pour y, que $(x(t+\pi), y(t+\pi)) = -(x(t), y(t))$ et que $(x(\pi/2 - t), y(\pi/2 - t)) = (y(t), x(t))$, on obtient que l'astroïde est une courbe fermée, simple, admettant les axes des abscisses et des ordonnées ainsi que la première bissectrice comme axe de symétrie (voir figure 3.1). Sur l'intervalle $[0, \pi/4]$,

$$x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t), \quad y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t),$$

donc $\|F'(t)\| = 3a\cos(t)\sin(t) = (3a/2)\sin(2t)$ et

$$\int_{0}^{\pi/4} \|F'(t)\| dt = (3a/2) \int_{0}^{\pi/4} \sin(2t) dt = (3a/4).$$

C'est la longueur d'un huitième de la courbe ! D'où le résultat annoncé.

En dehors du calcul de la longueur de courbes, l'abscisse curviligne peut être utilisée pour reparamétrer une courbe (on parle de paramétrage normal), avec l'avantage que le nouveau paramètre s ne dépend que de la géométrie de la courbe et non de tel ou tel système de coordonnées. Le repère est alors lié à la courbe (repère de Frénet).

3.2 Intégrale curviligne d'une fonction

Cette notion sera utilisée en physique pour calculer le centre d'inertie d'un fil ou les moments d'inertie d'une courbe par rapport à un axe.

Définition 3.7 *Soient Γ une courbe de classe C^1 avec un paramétrage $(F, I = [a, b])$ et $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue*[3]*, la région $\mathcal{D}$ contenant Γ. Alors* **l'intégrale curviligne de f le long de Γ** *est définie par*

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma} f ds = \int_{a}^{b} f(F(t)) \|F'(t)\| dt.$$

3. La régularité de Γ et de f peut être supprimée dans le cadre plus général de l'intégrale de Stieltjes.

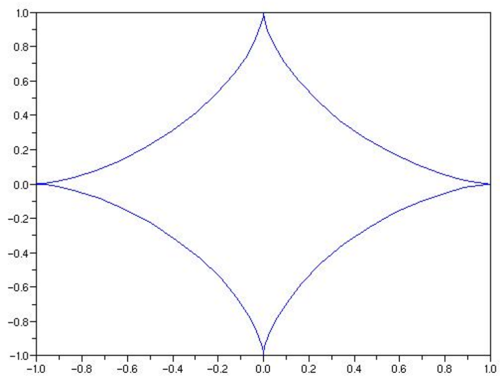

FIGURE 3.1 – Astroïde (avec $a = 1$ pour le dessin)

Si f est constante égale à 1, alors l'intégrale est égale à la longueur de la courbe L_Γ. Si la courbe Γ est fermée, on utilise parfois la notation particulière $\oint_\Gamma f$. Si la courbe est uniquement C^1 par morceaux, on utilise la relation de Chasles pour définir l'intégrale curviligne. Une propriété importante est la suivante :

Proposition 3.3 *La définition de l'intégrale curviligne ne dépend pas du choix du paramétrage.*

Preuve. Supposons que $(F, I = [a, b])$ et $(G, J = [c, d])$ soient deux paramétrages admissibles de Γ et notons ϕ le C^1 difféomorphisme reliant les deux. Si ϕ est croissant, en faisant le changement de variable $t = \phi(s)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_a^b f(F(t))\|F'(t)\|dt \\
&= \int_c^d f((F\circ\phi)(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds = \int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\phi'(s)\|ds \\
&= \int_c^d f(G(s))\|G'(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Si ϕ est décroissant, alors

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_a^b f(F(t))\|F'(t)\|dt \\
&= \int_d^c f((F\circ\phi)(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds = -\int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds \\
&= \int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\||\phi'(s)|ds = \int_c^d f(G(s))\|G'(s)\|ds.
\end{aligned}$$

L'intégrale ne dépend donc pas du paramétrage. □

Les autres propriétés de l'intégrale curviligne sont semblables à celles de l'intégrale standard.

1. Linéarité : pour tout $a \in \mathbb{R}$ et f et g continues,
$$\int_\Gamma (af+g) = a\int_\Gamma f + \int_\Gamma g.$$
2. Positivité : si $a \leq f(X) \leq b$ sur la courbe Γ, alors
$$aL_\Gamma \leq \int_\Gamma f \leq bL_\Gamma.$$
3. Relation de Chasles : si Γ_1 et Γ_2 sont deux courbes de classe C^1 par morceaux, sans point commun sauf éventuellement un nombre fini de points, alors
$$\int_{\Gamma_1 \vee \Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$
$\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ étant la juxtaposition des deux courbes.

3.3 Dérivées partielles, différentielle, 1-forme

Maintenant la fonction F dépend, non pas d'un nombre réel t, mais d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$, on parle de **champ vectoriel** (scalaire si $k = 1$). Alors
$$F(X) = F(x_1, \dots, x_d) = (F_1(x_1, \dots, x_d), \dots, F_k(x_1, \dots, x_d))$$
et le champ vectoriel F de dimension k est équivalent à la donnée de k champs scalaires F_j, $j = 1, \dots, k$.

Pour un champ scalaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $A = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ est :
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_d) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(A + hE_i) - f(A)}{h}.\end{aligned}$$
Une fonction f est de classe C^1 (dans une région $\mathcal{D}$) si elle possède d dérivées partielles premières et que ces dérivées sont continues sur $\mathcal{D}$. Ensuite on peut définir un champ scalaire de classe C^N, $N \geq 2$, par récurrence. Le *théorème de Schwarz* implique que si f est de classe C^2, alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

De plus si les coordonnées de f dépendent elles même d'une variable t, et si on note

$$z(t) = f(x_1(t), \dots, x_d(t))$$

alors

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_d(t))x_i'(t). \tag{3.1}$$

3.3.1 Différentielle d'une fonction

Passons maintenant à la notion de différentielle. Pour bien comprendre cette notion, revenons au cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que f soit dérivable sur I. La dérivée permet de rendre linéaire (au moins localement) une fonction dérivable f aussi compliqué soit-elle. En effet en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si } x \neq x_0, \qquad \text{et } \varepsilon(x_0) = 0,$$

alors ε est continue et pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas les deux membres sont égaux à $f(x_0)$. C'est le **développement limité de f à l'ordre 1** en x_0. Cette relation montre que pour x proche de x_0, f est en effet une application linéaire (une droite donc) :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = ah + b.$$

Cette application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ est la différentielle de f en x_0.

Cette notion se généralise en dimension plus grande. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est **différentiable** en $A = (a_1, \dots, a_d)$ s'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f(A)$ et appelée **différentielle de** f en A, telle que pour tout $H = (h_1, \dots, h_d)$

$$\lim_{H \to 0} \frac{1}{\|H\|} \left(f(A + H) - f(A) - \mathrm{d}f(A)(H)\right) = 0.$$

La notion peut être perturbante, mais pour A fixé, $\mathrm{d}f(A)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{d}f(A)(H) \in \mathbb{R}$. Comme elle est linéaire, nécessairement

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle,$$

où $\nabla f(A) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur, appelé **gradient de** f en A. Ce vecteur a pour coordonnées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, $i = 1, \dots, d$. Ainsi si $H = (h_1, \dots, h_d)$

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)h_i.$$

Si on considère H comme un accroissement infinitésimal de A, avec la notation $h_i = \mathrm{d}a_i$ et $H = \mathrm{d}A$, on obtient :

$$f(A + \mathrm{d}A) \approx f(A) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,\mathrm{d}a_i.$$

3.3.2 Forme différentielle (d'ordre 1)

L'écriture précédente de la différentielle d'une fonction motive les définitions suivantes.

Définition 3.8 *On considère une application linéaire* $\mathrm{d}x_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\mathrm{d}x_1(e_1) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}x_1(e_2) = \ldots = \mathrm{d}x_1(e_n) = 0.$$

$\mathrm{d}x_1$ *est appelée une* **forme différentielle**. *De même, on définit les formes différentielles* $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, *...* , $\mathrm{d}x_d$.

La famille $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_d)$ est une base de l'ensemble des applications linéaires (appelées ici formes) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.9 *Soit $\mathcal{D}$ une région*[4] *de $\mathbb{R}^d$. On appelle* **forme différentielle d'ordre 1** *(ou* **1-forme différentielle**, *ou* **1-forme***) de classe C^N une application ω de classe C^N de $\mathcal{D}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$. Cela signifie qu'il existe des applications $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de classe C^N de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $X \in \mathcal{D}$:*

$$\omega(X) = \alpha_1(X)\,\mathrm{d}x_1 + \alpha_2(X)\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + \alpha_d(X)\,\mathrm{d}x_d.$$

Ainsi pour un vecteur $H \in \mathbb{R}^d$,

$$\omega(X)(H) = \alpha_1(X)\,\mathrm{d}x_1(H) + \alpha_2(X)\,\mathrm{d}x_2(H) + \ldots + \alpha_d(X)\,\mathrm{d}x_d(H).$$

Pour une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la forme $\mathrm{d}f$ est définie par

$$\mathrm{d}f(X) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\,\mathrm{d}x_i.$$

Si f est de classe C^N, la différentielle de $\mathrm{d}f$ est une 1-forme de classe C^{N-1}.

Définition 3.10 *Une forme différentielle ω est dite* **exacte** *(ou totale) s'il existe une fonction f différentiable telle que $\omega = \mathrm{d}f$. La fonction f est alors une primitive de ω.*

La 1-forme $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ est la différentielle de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ces notions ont des applications directes en thermodynamique notamment (énergie interne, entropie). Il est en général difficile de déterminer si une forme est exacte ou non. Nous reviendrons sur ce point plus tard (voir notamment le théorème de Poincaré 3.1).

4. Un ouvert pour être précis et correct.

3.4 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Cette notion (différente de celle d'une fonction vue précédemment) va avoir son utilité pour calculer le travail d'une force le long d'une trajectoire. Soit Γ une courbe paramétrée de paramétrage $(F, I = [a, b])$.

3.4.1 Définition et propriétés

Définition 3.11 *Soit ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^d$. Alors on définit l'intégrale de ω le long de Γ par*

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt.$$

Si on note $\omega = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \, \mathrm{d}x_i$ et $F(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$, cela donne

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{d} \int_a^b \alpha_i(F(t))x_i'(t)dt.$$

Si Γ est C^1 par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \ldots < a_m = b$ adaptée et on pose

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \omega(F(t))(F'(t))dt.$$

La proposition suivante montre qu'une intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage mais seulement du sens de parcours :

Proposition 3.4 *Soit Γ' une courbe de paramétrage $(G, J = [c, d])$ et soit ϕ un C^1-difféomorphisme de $[c, d]$ dans $[a, b]$ et $G = F \circ \phi$. Alors on a*

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_\Gamma \omega$$

si ϕ est croissant et

$$\int_{\Gamma'} \omega = -\int_\Gamma \omega$$

si ϕ est décroissant.

Géométriquement, Γ et Γ' sont la même courbe.

Remarque 3.1 *Attention contrairement à l'intégrale curviligne d'une fonction, l'intégrale d'une forme différentielle dépend de l'orientation de la courbe.*

Preuve. On effectue le changement de variables $t = \phi(s)$. Si ϕ est croissant on obtient

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt = \int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s)))\phi'(s)ds.$$

Par linéarité de l'application ω on obtient

$$\begin{aligned}\int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s)))\phi'(s)ds &= \int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s))\phi'(s))ds \\ &= \int_c^d \omega(\phi(s))((F\circ\phi)'(s))ds = \int_{\Gamma'} \omega.\end{aligned}$$

□

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation. Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Autrement dit, l'intégrale de la dérivée de f sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de f sur les bords du segment. Ce résultat se généralise à une intégrale curviligne :

Proposition 3.5 *On suppose que ω est une forme exacte sur $\mathcal{D}$, et on considère une primitive f de ω (soit f est C^1 sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{d}f = \omega$). Si Γ est une courbe de paramétrage $([a,b],F)$ C^1 par morceaux alors on a*

$$\int_\Gamma \omega = f(F(b)) - f(F(a)).$$

Preuve. En effet si ω est de classe C^1, en utilisant la formule (3.1)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt = \int_a^b \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(F(t))\,\mathrm{d}x_i(F'(t))dt \\ &= \int_a^b (f\circ F)'(t)dt = (f\circ F)(b) - (f\circ F)(a).\end{aligned}$$

□

Cette proposition simplifie grandement le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exactes. On observe en outre que l'intégrale dépend des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin Γ parcouru entre les deux. De cette proposition on déduit

Corollaire 3.1 *Si ω est une forme différentielle exacte sur $\mathcal{D}$ et Γ est une courbe fermée de classe C^1 par morceaux, alors*

$$\int_\Gamma \omega = 0.$$

Terminons par un exemple. On considère sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle :

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Soit $\Gamma = \mathcal{C}$ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Un paramétrage de Γ est $I = [0, 2\pi]$ avec $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\cos'(t) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\sin'(t)\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Si on choisit comme paramétrage $I = [0, \pi]$ et $F(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, on retrouve la même valeur (l'intégrale ne dépend pas du paramétrage choisi). Si on parcourt la courbe Γ dans le sens contraire, via le paramétrage $I = [0, 2\pi]$ et $F(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin(-t)}{\cos^2(-t)+\sin^2(-t)}\cos'(-t) - \frac{\cos(-t)}{\cos^2(-t)+\sin^2(-t)}\sin'(-t)\right] dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi.\end{aligned}$$

Enfin le cercle étant une courbe fermée, comme $\int_\Gamma \omega \neq 0$, on en déduit que ω n'est pas une forme exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3.4.2 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs dans le plan

Il existe une dualité naturelle entre les champs de vecteurs et les formes différentielles. Si $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs :

$$F(x,y) = P(x,y)e_1 + Q(x,y)e_2$$

alors on peut définir la forme différentielle $\omega = \omega_F$ par

$$\omega_F = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

On définit alors **l'intégrale curviligne de** F le long d'une courbe Γ régulière par

$$\int_\Gamma F \bullet ds = \int_\Gamma \omega_F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt,$$

où $(\gamma, [a,b])$ est un paramétrage de Γ. En physique on parle de **circulation du champ de vecteurs** F. Si F est un champ de force, sa circulation est le travail du champ de force. S'il dérive d'un gradient, c'est-à-dire $F = \nabla(f)$ alors $\displaystyle\int_\Gamma F \bullet ds = f(B) - f(A)$, les points A et B correspondant aux extrémités de la courbe Γ. La travail ne dépend donc pas du trajet suivi pour aller de A vers B.

3.5 Théorèmes de Poincaré et de Green-Riemann

Nous présentons ici deux résultats importants. Le premier du à Poincaré donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme différentielle ω soit exacte, le second généralise la formule suivante : si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Pour les comprendre commençons par la dimension 2. Supposons que $\omega = \mathrm{d}f$ soit exacte. Alors

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = X(x,y)\,\mathrm{d}x + Y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Donc par le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Cette condition

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3.2}$$

est nécessaire.

Définition 3.12 (Forme fermée) *Une forme différentielle est* **fermée** *si l'égalité* (3.2) *est vérifiée.*

Ainsi toute forme différentielle exacte est fermée. Néanmoins cette condition n'est pas suffisante en général ! Pour cela il faut que le domaine $\mathcal{D}$ sur lequel ω est définie soit *simplement connexe* [5], intuitivement que $\mathcal{D}$ n'ait pas de trou.

Théorème 3.1 (Poincaré) *Une forme différentielle $\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire si*

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

5. Toute courbe contenue dans $\mathcal{D}$ est homotope à un point.

Soit maintenant un domaine $\mathcal{D}$ borné $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.13 *On dit que $\mathcal{D}$ a* **un bord C^1 par morceaux** *si sa frontière $\partial\mathcal{D}$ est la réunion finie de supports de courbes Γ_i pour tout $i = 1, \ldots, N$ avec $N \in \mathbb{N}$, fermées, simples, et C^1 par morceaux.*

On dit que $\partial\mathcal{D}$ est **orienté de sorte que $\mathcal{D}$ soit à sa gauche** *si pour tout $i = 1, \ldots, N$ et lorsque t croit, le point $\Gamma_i(t)$ se déplace en laissant $\mathcal{D}$ à sa gauche. Cela signifie qu'en tout point $\Gamma_i(t)$, la base $(\overrightarrow{v}, \Gamma_i'(t))$ est directe, où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal sortant au point $\Gamma_i(t)$.*

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ (la réunion de $\mathcal{D}$ et de sa frontière $\partial\mathcal{D}$) et si ω est une 1-forme continue sur $\mathcal{U}$, on note alors

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} \omega.$$

Théorème 3.2 (Green-Riemann) *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ orienté de sorte que $\mathcal{D}$ soit à sa gauche et ω une 1-forme de classe C^1 sur un ouvert contenant $\mathcal{D}$. Alors on a*

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\omega = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy.$$

Cette formule implique donc que si ω est fermée (sans être forcément exacte), alors $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = 0.$

La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens. Selon le problème considéré, on peut vouloir ramener un calcul d'intégrale double au calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse. Elle peut par exemple servir à calculer l'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ via l'une des égalités suivantes. En effet si on considère la forme

$$\omega = x\,\mathrm{d}y = Y\,\mathrm{d}y,$$

alors

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\mathcal{D}} dxdy = \mathrm{Aire}(\mathcal{D})$$

et le théorème précédent donne

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \int_{\partial\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}y.$$

De même

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{D}) = -\int_{\partial\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{D}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

À titre d'exemple, calculons l'aire délimitée par une astroïde donnée par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (voir Figure 3.1). Pour des raison de symétrie, ce domaine $\mathcal{D}$ a pour aire quatre fois celle du domaine $\mathcal{D}^+$ se trouvant dans le premier quadrant. On note Γ_1 le segment $\{(x,0),\ x \in [0,1]\}$, Γ_2 la courbe définie par $\{(x,y) = (\cos^3(t), \sin^3(t)),\ t \in [0,\pi/2]\}$ et $\Gamma_3 = \{(0,y),\ y \in [0,1]\}$. Le bord de $\mathcal{D}^+$ est $\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \Gamma_3$. Sur le segment Γ_1, la forme différentielle $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ est nulle car $y = 0$, donc $\mathrm{d}y = 0$. De même $\displaystyle\int_{\Gamma_3} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(\mathcal{D}^+) &= 2\int_{\Gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[\cos^3(t)(3\cos(t)\sin^2(t)) - \sin^3(t)(-3\sin(t)\cos^2(t))\right] dt \\
&= 6\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^2(t)dt = \frac{6}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2t)dt \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(4t))dt = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Pour un champ de vecteurs. En utilisant la dualité vue dans la partie 3.4.2, si F est un champ de vecteurs

$$F = X(x,y)e_1 + Y(x,y)e_2$$

alors le théorème de Green-Riemann devient

$$\int_{\Gamma^+} F \bullet ds = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{rot}(F)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$

Γ^+ étant la courbe Γ orientée de façon qu'un mobile la parcourant laisse toujours le domaine $\mathcal{D}$ à sa gauche.

En dimension supérieure ? Ces résultats sont valables mais prennent une forme plus compliquée. Ainsi en dimension 3, si ω est la forme différentielle

$$\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$$

et si nous la supposons exacte $\omega = \mathrm{d}f$, alors toujours avec le théorème de Schwarz, on obtient le théorème de Poincaré en dimension 3.

Théorème 3.3 (Poincaré en dimension 3) *Une forme différentielle $\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, est exacte si et seulement si*

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Ainsi il y a trois relations à vérifier. L'extension du théorème de Green-Riemann sera vue dans le dernier chapitre.

Chapitre 4

Intégrale triple

La notion d'intégrale d'une fonction a été construite à partir des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$ en dimension 1 et sur un rectangle en dimension 2. L'extension en dimension 3 se fait exactement de la même façon. Nous répétons ici les définitions et propriétés.

4.1 Intégrale triple sur un pavé

On suppose que f est une fonction définie et bornée sur le pavé $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^3$. On découpe les intervalles $[a, b]$, $[c, d]$ et $[r, s]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$$

et

$$r = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = s,$$

avec $x_i = a + i\Delta_n x$, $y_j = c + j\Delta_m y$ et $z_k = r + k\Delta_p z$ où

$$\Delta_n x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta_m y = \frac{d-c}{m}, \quad \Delta_p z = \frac{s-r}{p}.$$

Ici aussi le fait que les subdivisions soient régulières est sans importance mais simplifie les notations. On désigne par $\mathcal{P}_{ijk}$ le pavé $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, dont le volume est

$$\Delta V = \Delta_n x \Delta_m y \Delta_p z = \frac{(b-a)(d-c)(s-r)}{nmp}.$$

On choisit un point w_{ijk} quelconque dans le pavé $\mathcal{P}_{ijk}$. On forme les sommes

$$S_{n,m,p}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(w_{ijk}) \Delta_n x \Delta_m y \Delta_p z = \frac{(b-a)(d-c)(s-r)}{nmp} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(w_{ijk}).$$

Définition 4.1 *Si lorsque n, m et p tendent vers $+\infty$, la suite triple $S_{n,m,p}(f)$ converge vers une limite S indépendante du choix des points w_{ijk} on dit que f est* **intégrable sur** $\mathcal{P}$. *Cette limite S est notée :*

$$\iiint_{\mathcal{P}} f \quad ou \quad \iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)dxdydz.$$

Comme dans le cas de la dimension 1, les fonctions intégrables peuvent être définies par des sommes de Darboux. Maintenant quelles sont les fonctions intégrables sur un rectangle ?

Proposition 4.1 *Si une fonction f est continue (par morceaux) sur $\mathcal{P}$, elle est intégrable sur $\mathcal{P}$.*

Remarque 4.1

- *Si on choisit f constante égale à 1, l'intégrale de f sur $\mathcal{P}$ est l'aire du rectangle $\mathcal{P}$.*
- *Lorsque f est positive, l'intégrale de f s'interpréte comme une aire en dimension 1, un volume en dimension 2. Ici l'intégrale de f sur $\mathcal{P}$ serait un "hypervolume" d'un objet dans un espace à quatre dimensions.*

Comme en dimension 1 ou 2, on a

Proposition 4.2 *Si f est définie sur un rectangle $\mathcal{P}$ et si $|f|$ est intégrable sur $\mathcal{P}$, alors f l'est aussi et*

$$\left|\iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_{\mathcal{P}} |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Le théorème qui suit est très utile pour effectuer les calculs d'intégrale triple.

Théorème 4.1 (de Fubini) *Si f est définie sur un rectangle $\mathcal{P} = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ et si $|f|$ est intégrable, alors*

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)dxdydz,$$

la dernière intégrale signifiant qu'on peut intégrer dans l'ordre qu'on veut.

4.2 Intégrale triple sur un domaine quelconque

Comme en dimension 2, une difficulté vient de la géométrie du domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ sur lequel on veut définir $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} f$. Ces domaines seront toujours supposés *bornés*, c'est-à-dire ils peuvent être inclus entièrement dans un pavé. La définition qui suit est la même que la définition 2.2 donnée en dimension 2.

Définition 4.2 *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est* **intégrable sur** *$\mathcal{D}$ s'il existe un pavé $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}$) tel que la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathcal{P}$ par*

$$\widetilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}, \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathcal{P}$.

Dans ce cas l'intégrale $\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz$ de f sur $\mathcal{D}$ est définie par

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathcal{P}} \widetilde{f}(x,y,z)dxdydz.$$

Propriétés des intégrales triples. Ce sont les mêmes pour une intégrale sur un segment ou un domaine de dimension 2. Soient f, g et h trois fonctions définies et intégrables sur un domaine $\mathcal{D}$ avec $f(x,y,z) \leq h(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ et soient λ une constante et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux domaines de $\mathbb{R}^3$ sans point commun sauf le cas échéant sur leur frontière [1]. Alors

1. Linéarité :
$$\iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \iiint_{\mathcal{D}} g.$$
2. Monotonie :
$$\iiint_{\mathcal{D}} f \leq \iiint_{\mathcal{D}} h.$$
3. Si $a \leq f(x,y,z) \leq b$ avec a et b constantes pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{D}$,
$$a\text{Volume}(\mathcal{D}) \leq \iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz \leq b\text{Volume}(\mathcal{D}).$$
4. $\left| \iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz \right| \leq \iiint_{\mathcal{D}} |f(x,y,z)|dxdydz.$
5. Additivité (relation de Chasles) :
$$\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f.$$
   Donc si $\mathcal{N}$ a un volume nul, alors
$$\iiint_{\mathcal{D}} f = \iiint_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{N}} f.$$

En particulier le volume d'un domaine $\mathcal{D}$ est donnée par l'intégrale de la fonction 1 :

$$\text{Volume}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dxdydz.$$

1. Plus exactement, leurs intérieurs sont disjoints. Ou encore leur intersection est de mesure nulle.

Théorème de Fubini. Comme pour les intégrales doubles, les intégrales triples sont plus facilement évaluées si le domaine d'intégration a une forme géométrique simple.

Définition 4.3 *Le domaine $\mathcal{E}$ est* **régulier selon l'axe des** x *s'il est compris entre les graphes de deux fonctions continues ϕ_1 et ϕ_2 de y et z :*

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (y, z) \in \mathcal{D},\ \phi_1(y, z) \leq x \leq \phi_2(y, z)\}.$$

$\mathcal{D}$ est la projection orthogonale du domaine $\mathcal{E}$ sur le plan yOz.

Le domaine $\mathcal{E}$ est **régulier selon l'axe des** y *s'il est compris entre les graphes de deux fonctions continues ψ_1 et ψ_2 de x et z :*

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, z) \in \mathcal{D},\ \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\}.$$

$\mathcal{D}$ est la projection orthogonale du domaine $\mathcal{E}$ sur le plan xOz.

Le domaine $\mathcal{E}$ est **régulier selon l'axe des** z *s'il est compris entre les graphes de deux fonctions continues ζ_1 et ζ_2 de x et y :*

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \mathcal{D},\ \zeta_1(x, y) \leq z \leq \zeta_2(x, y)\}.$$

$\mathcal{D}$ est la projection orthogonale du domaine $\mathcal{E}$ sur le plan xOy.

Le domaine $\mathcal{E}$ est régulier s'il est **régulier** *selon l'axe des x, l'axe des y ou l'axe des z.*

Lorsque le domaine $\mathcal{E}$ est régulier selon l'axe des z, une droite parallèle à l'axe des z rencontre au plus un seul point sur le graphe $z = \zeta_1(x, y)$ et un seul sur celui de $z = \zeta_2(x, y)$. Pour un domaine régulier, on peut appliquer le théorème de Fubini. Il permet de trouver la valeur d'une intégrale triple en calculant une intégrale simple suivie d'une intégrale double : on parle parfois de **découpage en piles**.

Théorème 4.2 *Si $|f|$ est intégrable sur $\mathcal{E}$, alors*

1. *si $\mathcal{E}$ est régulier selon l'axe des x,*
$$\iiint_{\mathcal{E}} f = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dydz;$$
2. *si $\mathcal{E}$ est régulier selon l'axe des y,*
$$\iiint_{\mathcal{E}} f = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dxdz;$$
3. *si $\mathcal{E}$ est régulier selon l'axe des z,*
$$\iiint_{\mathcal{E}} f = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\zeta_1(x,y)}^{\zeta_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

Si le domaine n'est pas régulier, on essaie de le découper en plusieurs parties qui sont régulières et on somme les intégrales calculées sur chacune de ces parties.
Exemple : calculer l'intégrale triple

$$I = \iiint_{\mathcal{E}} (x+y+z)dxdydz$$

où $\mathcal{E}$ est le tétraèdre défini par

$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}.$$

Le tétraèdre est régulier selon l'axe z avec $\zeta_1(x,y) = 0$ et $\zeta_2(x,y) = 1-x-y$ et la projection de $\mathcal{E}$ sur le plan horizontal xOy est

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz \right) dxdy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left[\left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^{1-x-y} dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(-x^2 - 2xy - y^2 + 1 \right) dxdy. \end{aligned}$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est régulier par rapport à x d'où :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-x^2 - 2xy - y^2 + 1 \right) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Découpage en tranches. Ici la valeur d'une intégrale triple se calcule en une intégrale double suivie d'une intégrale simple. Le domaine est découpé en tranches minces parallèles à l'un des trois plans de coordonnées.

Pour fixer les idées, on suppose qu'il existe deux réels z_0 et z_1 tels que le domaine $\mathcal{E}$ est compris entre les deux plans $z = z_0$ et $z = z_1$ et que pour tout $z \in [z_0, z_1]$, le plan horizontal Π_z passant par z coupe le domaine $\mathcal{E}$ en une tranche non vide $\mathcal{E}_z = \Pi_z \cap \mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}(z)$ est la projection orthogonale de $\mathcal{E}_z$ sur le plan xOy, alors

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\iint_{\mathcal{E}(z)} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$

On a des formules similaires en faisant des projections sur les plans xOz ou yOz :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\iint_{\mathcal{E}(x)} f(x,y,z)dydz \right) dx \\ &= \int_{y_0}^{y_1} \left(\iint_{\mathcal{E}(y)} f(x,y,z)dxdz \right) dy. \end{aligned}$$

Exemple : reprenons le calcul de l'intégrale triple $I = \iiint_{\mathcal{E}}(x+y+z)dxdydz$ de l'exemple précédent. Pour z fixé dans $[0,1]$, la projection orthogonale $\mathcal{E}(z)$ de $\mathcal{E}$ est

$$\mathcal{E}(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1-z\}.$$

Donc

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{\mathcal{E}(z)} (x+y+z)dxdy \right) dz.$$

Comme $\mathcal{E}(z)$ est régulier selon x (et y) on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}(z)} (x+y+z)dxdy &= \int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-x-z} (x+y+z)dy \right) dx \\ &= \int_0^{1-z} \left(-\frac{x^2}{2} - xz - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$I = \int_0^1 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \right) dz = \frac{1}{8}.$$

Calcul des volumes. Pour un domaine $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\text{Volume}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dxdydz = \int_{z_0}^{z_1} \text{Aire}(\mathcal{E}(z))dz.$$

Quelques exemples pour le calcul de volume :

1. Segment (ou tranche) sphérique : portion de la sphère comprise entre deux plans parallèles. On peut choisir les plans $z=0$ et $z=\rho \in [0,R]$ pour la sphère centrée à l'origine de rayon $R>0$. La projection du disque S_z sur le plan horizontal xOy est le disque centré à l'origine de rayon $\sqrt{R^2-z^2}$. Donc son aire vaut $\pi(R^2-z^2)$. Ainsi
$$\text{Volume}(\mathcal{E}) = \int_0^{\rho} \pi(R^2-z^2)dz = \pi\left(R^2\rho - \frac{\rho^3}{3}\right).$$
Si $\rho = R$, on retrouve le volume d'une demie sphère : $2\pi R^3/3$.
2. Considérons le solide $\mathcal{P}$ de l'espace compris entre le paraboloïde d'équation $z = x^2+y^2$ et les trois plans $x=0$, $y=0$ et $z=\alpha>0$. La projection de la tranche $\mathcal{P}_z$ sur le plan horizontal xOy est le quart de disque
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 \leq z,\ 0 \leq x \leq \sqrt{z},\ 0 \leq y \leq \sqrt{z}\}.$$
Donc son aire vaut $\pi(\sqrt{z})^2/4$ et ainsi
$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \int_0^{\alpha} \frac{\pi}{4} z dz = \frac{\pi\alpha^2}{8}.$$

4.3 Changement de variables

Les notions sont similaires à celles de la dimension 2. (définitions 2.4 et 2.5, théorème 2.3). La définition 2.4 ne change pas. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux domaines de $\mathbb{R}^3$, une application $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ est un **C^1-difféomorphisme de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}$** si Φ est une bijection de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}$ et si Φ et sa bijection réciproque sont de classe C^1 respectivement sur $\mathcal{D}'$ et sur $\mathcal{D}$. Ainsi pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{D}'$, si on pose

$$\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

alors les fonctions $(u, v, w) \mapsto x(u, v, w)$, $(u, v, w) \mapsto y(u, v, w)$ et $(u, v, w) \mapsto z(u, v, w)$ sont de classe C^1. La *matrice jacobienne* de Φ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}.$$

La défintion 2.5 devient :

Définition 4.4 *Si $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ est une fonction de classe C^1, alors on appelle* **jacobien de** Φ *le déterminant de la matrice jacobienne :*

$$J_\Phi(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix}.$$

On ne rappelle pas ici les techniques de calcul de déterminant [2].

Théorème 4.3 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}^3$ et $\Phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D} = \Phi(\mathcal{D}')$. Alors*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathcal{D}'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|J_\Phi(u,v,w)\right| dudvdw.$$

Encore une fois bien prendre garde à la valeur absolue présente dans cette formule.

2. Pour les afficionados, la règle de Sarrus fonctionne ici.

4.3.1 Coordonnées cylindriques

C'est l'extension des coordonnées polaires (voir section 2.3.1) à la dimension 3 :

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z,$$

avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$. Ici

$$J_\Phi(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Donc

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathcal{D}'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)rdrd\theta dz.$$

L'élément de volume dV, qui s'est écrit en coordonnées cartésiennes $dxdydz$, devient $dV = rdrd\theta dz$. Cette formule aura un rôle très important à jouer dès que le domaine est facilement "paramétrable" en coordonnées cylindriques.

4.3.2 Coordonnées sphériques

Le point $M(x,y,z)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est representé par un triplet (r,θ,ϕ) où $r = OM$ est la distance de l'origine au point M, ϕ est l'angle entre l'axe des z et la demi-droite (OM) et θ est l'angle polaire de la projection M' de M sur le plan horizontal. L'angle $\pi/2 - \phi$ est la latitude et θ est la longitude. On prendra $\phi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors on a

$$\begin{cases} x &= r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\phi) \end{cases}$$

Le jacobien vaut

$$J_\Phi(r,\theta,\phi) = r^2\sin(\phi)$$

et comme $\sin(\phi) \geq 0$ on obtient

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathcal{D}'} f(r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))r^2\sin(\phi)drd\theta d\phi.$$

Ici l'élément de volume dV vaut

$$dV = r^2\sin(\phi)drd\theta d\phi.$$

Chapitre 5

Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes est la généralisation du théorème 3.2 de Green-Riemann en dimension supérieure. Nous allons détailler le résultat pour la dimension 3. Mais donnons l'énoncé de ce théorème sous sa forme générale[1] :

Théorème 5.1 (de Stokes (version générale)) *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ à bord, compacte, orientée, de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (et de classe C^2). On munit le bord ∂M de l'orientation induite par l'orientation de M. Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$ et de classe C^1 dans un voisinage de M. Alors on a*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega. \tag{5.1}$$

Il ne s'agit pas ici de comprendre dans le détail ce théorème, mais de comprendre ce qu'il signifie dans des cas précis. D'abord si $n = 1$, on considère un segment $M = [a, b]$ de dimension $p = 1$ et de bord $\partial M = \{a, b\}$. Une forme ω de degré $p - 1 = 0$ est une fonction et on retrouve le théoréme fondamental :

$$\omega(b) - \omega(a) = \int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega = \int_a^b \omega'(x)dx.$$

Si maintenant $n = 2$, alors on a deux possibilités. Soit $M = \Gamma$ est une courbe de dimension $p = 1$, d'extrémité A_0 et A_1 et ω est une “fonction liée à la paramétrisation” de la courbe[2]. Alors on trouve

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\omega = \omega(A_1) - \omega(A_0) \tag{5.2}$$

qui ressemble au cas précédent si Γ est un segment (attention aux problèmes de paramétrisation cachés derrière). Soit $M = \mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$ et on retrouve le théorème 3.2 de Green-Riemann pour une forme différentielle ω de degré 1.

Dans toute la suite nous allons nous focaliser sur le cas de $\mathbb{R}^3$.

1. C'est pour votre culture mathématique et la beauté succinte de la formule ! Gare aux grosses difficultés techniques cachées derrière...
2. Il y a une condition de cohérence à respecter. Auquel cas on peut définir $\mathrm{d}\omega$ comme une 1-forme sur Γ.

5.1 Surfaces

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, schématiquement, nous pouvons rencontrer deux types d'objets (sous-variétés) : les courbes de dimension 1 vues au chapitre 3.1, pour lesquelles on retrouvera encore une formule type (5.2), et les surfaces de dimension 2.

Parmi ces dernières, nous avons les graphes de fonctions à deux variables, soit des ensembles de la forme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x, y)\}$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Néanmoins ce type de surface est trop restrictif en pratique. Donc nous allons définir les surfaces paramétrées (analogue bidimensionnel des courbes paramétrées).

Définition 5.1 *Une* **surface paramétrée (de classe C^k)** *($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) est une fonction vectorielle $S : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie et de classe C^k sur le domaine $\mathcal{D}$. Ainsi*

$$S(u, v) = x(u, v)e_1 + y(u, v)e_2 + z(u, v)e_3,$$

(e_1, e_2, e_3) étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $\Sigma = \{M \in \mathbb{R}^3,\ M = S(u, v),\ (u, v) \in \mathcal{D}\}$ est le **support géométrique** *de la surface paramétrée S et S est* **un paramétrage** *de Σ. Ou bien Σ a comme équations paramétriques :*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Ainsi le cas du graphe d'une fonction correspond au cas $x = x(u, v) = u$, $y = y(u, v) = v$ et $z = z(u, v) = f(u, v)$.

Exemple 5.1

1. Si A est un point de l'espace, $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{q}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, la fonction qui à $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associe le point

   $$S(u, v) = A + u\overrightarrow{p} + v\overrightarrow{q}$$

   est une surface de classe C^∞ dont le support est le plan dirigé par les deux vecteurs $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{q}$ et passant par A.

2. Soit $\mathcal{D} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et

   $$S(u, v) = R\sin(u)\cos(v)e_1 + R\sin(u)\sin(v)e_2 + R\cos(u)e_3.$$

   C'est une surface paramétrée de classe C^∞ dont le support est la sphère centrée à l'origine et de rayon R (paramétrisation de la sphère via la longitude et la latitude).

5.1.1 Courbes coordonnées et vecteurs tangents

Si S est une surface paramétrée de classe C^k, alors en fixant une des deux variables u ou v, on obtient deux courbes paramétrées

$$u \mapsto S(u, v_0), \qquad v \mapsto S(u_0, v),$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Ces courbes sont tracées sur la surface. Chacune de ces courbes admettent un vecteur tangent au point (u_0, v_0) :

$$\frac{d}{du}S(u, v_0)\Big|_{u=u_0} = \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0), \qquad \frac{d}{dv}S(u_0, v)\Big|_{v=v_0} = \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Si ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc si le produit vectoriel

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0)$$

n'est pas nul, alors la surface est **régulière** en (u_0, v_0). Le plan engendré par ces deux vecteurs et passant par le point $S(u_0, v_0)$ est appelé **plan tangent** à la surface Σ.

Définition 5.2 *Un paramétrage $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ d'une surface Σ est* **régulier** *si pour tout point $(u, v) \in \mathcal{D}$, la surface est régulière en (u, v) ou encore si pour tout (u, v), $\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \neq 0$.*

Dans ce cas la surface Σ est dite **régulière**.

L'équation du plan tangent au point $M_0 = S(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ est donnée par la relation :

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \mathfrak{n} \rangle = 0,$$

où $\mathfrak{n}$ est le vecteur

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u_0, v_0) = \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0).$$

C'est un **vecteur normal** à la surface Σ au point M_0.

Reprenons l'exemple 5.1.

1. Pour le plan, on a
$$\frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) = \overrightarrow{p}, \quad \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) = \overrightarrow{q},$$
donc $\mathfrak{n} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q}$ est non nul et constant. Et le plan tangent au plan est le plan lui-même. Ce paramétrage est régulier.
2. Pour la sphère, on a
$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) &= R\cos(u_0)\cos(v_0)e_1 + R\cos(u_0)\sin(v_0)e_2 - R\sin(u_0)e_3 \\ \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) &= -R\sin(u_0)\sin(v_0)e_1 + R\sin(u_0)\cos(v_0)e_2, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}(u_0, v_0) &= R^2 \sin^2(u_0)\cos(v_0)e_1 + R^2\sin^2(u_0)\sin(v_0)e_2 + R^2\cos(u_0)\sin(u_0)e_3 \\ &= R\sin(u_0)S(u_0, v_0).\end{aligned}$$

Un vecteur normal est un multiple du vecteur $\overrightarrow{OM_0}$. De là

$$\|\mathfrak{n}(u_0, v_0)\| = R^2\sin(u_0).$$

Ce paramétrage est régulier sauf aux pôles ($u = 0$ ou $u = \pi$).
Voyons deux autres exemples de surfaces.

Exemple 5.2

1. Le cylindre de révolution d'axe z et de rayon R est une surface paramétrée d'équation
$$S(u, v) = R\cos(v)e_1 + R\sin(v)e_2 + ue_3$$
avec $v \in [0, 2\pi]$ et $u \in \mathbb{R}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) &= e_3, \quad \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) = -R\sin(v_0)e_1 + R\cos(v_0)e_2, \\ \mathfrak{n}(u_0, v_0) &= -R\cos(v_0)e_1 + R\sin(v_0)e_2\end{aligned}$$
et ainsi $\|\mathfrak{n}(u_0, v_0)\| = R \neq 0$. Donc la surface est régulière.
2. Si la surface Σ est le graphe d'une fonction,
$$S(u, v) = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3,$$
alors
$$\mathfrak{n}(u_0, v_0) = -\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)e_1 - \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)e_2 + e_3 \neq 0,$$
donc la surface est régulière.

5.1.2 Changement de paramétrage d'une surface

C'est complètement analogue au cas des courbes paramétrées (voir la définition 3.5).

Définition 5.3 *Soit $(S, \mathcal{D})$ une surface paramétrée de classe C^k et soit Σ son support. On appelle* **changement de paramétrage admissible** *de Σ tout C^k-difféomorphisme $\phi : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}'$ sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$), et* **paramétrage admissible** *de Σ toute surface $(\mathfrak{S}, \mathcal{D}')$ où $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$ et où $\mathfrak{S}$ est de la forme $S \circ \phi$ avec ϕ changement de paramétrage admissible. $(\mathfrak{S}, \mathcal{D}')$ a pour support Σ.*

Le support Σ est donc identique. Un reparamétrage d'une surface régulière est régulier et le plan tangent ne dépend pas du paramétrage.

Exemple 5.3 Considérons l'hémisphère nord (sans l'équateur)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\}.$$

Il est possible de prendre comme paramétrage

$$S(u, v) = ue_1 + ve_2 + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\ e_3$$

avec $\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u^2 + v^2 < 1\}$ le disque unité. C'est un paramétrage régulier de l'hémisphère (voir exemple 5.2, cas 2).

On peut reparamétrer l'hémisphère en utilisant la latitude et la longitude :

$$\mathfrak{S}(x, y) = \cos(x)\cos(y)e_1 + \sin(x)\cos(y)e_2 + \sin(y)e_3$$

avec $\mathcal{D}' = [0, 2\pi]\times]0, \pi/2]$. Quel est le changement de paramètres ? On veut que $\mathfrak{S} = S \circ \phi$, donc $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ sera donné par

$$\phi_1(x, y) = \cos(x)\cos(y), \quad \phi_2(x, y) = \sin(x)\cos(y).$$

La bijection réciproque $\psi = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$ pour $(u, v) \in \mathcal{D}$ sera donnée par

$$\psi_2(u, v) = \arcsin(\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad \psi_1(u, v) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) & \text{si } v > 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) & \text{si } v < 0, \\ 0 & \text{si } v = 0,\ u \geq 0, \\ \pi & \text{si } v = 0,\ u < 0. \end{cases}$$

5.1.3 Surface de révolution

Le cylindre étudié dans l'exemple 5.2 constitue un cas particulier d'une large famille de surfaces paramétrées obtenues par révolution (ou rotation), à la manière du potier utilisant un tour.

Définition 5.4 *Une surface Σ est appelée* **surface de révolution** *s'il existe une droite Δ, un plan Π contenant cette droite et une courbe plane Γ contenue dans Π tels que Σ soit l'ensemble des points obtenus par rotation de Γ autour de Δ.*

L'axe Δ est **l'axe de révolution** *de la surface Σ et la courbe Γ est appelée une (demie)* **méridienne** *de Σ.*

Quitte à changer le repère, on peut toujours se ramener à la situation suivante que Π soit le plan xOz, que Δ soit l'axe Oz des z et que $F : I \to \mathbb{R}^2$ soit une courbe paramétrée du plan xOz, donc $F(u) = x(u)e_1 + z(u)e_3$ avec $u \in I$. Dire que M est obtenue à partir de $F(u)$ par rotation d'un angle v autour de l'axe $\Delta = Oz$ signifie que M a pour coordonnées :

$$M = x(u)\cos(v)e_1 + x(u)\sin(v)e_2 + z(u)e_3,$$

avec $(u,v) \in I \times [0,2\pi]$. Ceci donne un paramétrage S de la surface Σ. Elle a pour vecteurs tangents et vecteur normal :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial u}(u,v) &= x'(u)\cos(v)e_1 + x'(u)\sin(v)e_2 + z'(u)e_3 \\
\frac{\partial S}{\partial v}(u,v) &= -x(u)\sin(v)e_1 + x(u)\cos(v)e_2, \\
\mathfrak{n}(u,v) &= -x(u)z'(u)\cos(v)e_1 - x(u)z'(u)\sin(v)e_2 + x(u)x'(u)e_3.
\end{aligned}$$

La norme de $\mathfrak{n}$ vaut :

$$\|\mathfrak{n}(u,v)\|^2 = x(u)^2((x'(u))^2 + (z'(u))^2).$$

Donc la surface est régulière si $x(u) \neq 0$ (la courbe Γ ne coupe pas l'axe des z) et si $(x'(u))^2 + (z'(u))^2 \neq 0$ (la courbe Γ est régulière).

Exemple 5.4

1. On a déjà évoqué le cylindre pour lequel Γ est la droite verticale $F(u) = Re_1 + ue_3$.
2. La sphère est aussi une surface de révolution, Γ étant le demi cercle centré à l'origine et de rayon R :

$$F(u) = R\cos(u)e_1 + R\sin(u)e_3.$$

3. Cône de révolution : il a pour courbe Γ un segment de droite $F(u) = ue_1 + \alpha(1 - \frac{u}{R})e_3$ avec $u \in [0,R]$.
4. Tore (chambre à air). Γ est le cercle de rayon r et centré en un point C de l'axe des abscisses situé à une distance $R > r > 0$ de l'axe Oz[3]. Donc pour $u \in [0,2\pi]$

$$F(u) = (R + r\cos(u))e_1 + r\sin(u)e_3.$$

   Alors

$$S(u,v) = (R + r\cos(u))\cos(v)e_1 + (R + r\cos(u))\sin(v)e_2 + r\sin(u)e_3.$$

   On vérifie que $\|\mathfrak{n}(u,v)\| = r(R + r\cos(u))$ ne s'annule jamais.
5. Paraboloïde de révolution (antenne satellite). On fait tourner la demi-parabole

$$F(u) = ue_1 + \frac{u^2}{2p}e_3$$

   avec $p > 0$ fixé et $u \geq 0$. À noter que c'est aussi le graphe d'une fonction puisque $z = (x^2 + y^2)/(2p)$.

3. On peut en fait choisir une courbe Γ fermée et qui ne croise pas l'axe Oz.

5.2 Aire d'une surface paramétrée

Dans le chapitre 2, on a vu que l'aire d'un domaine plan $\mathcal{D}$ pouvait s'obtenir via une intégrale double et que la longueur d'une courbe via une intégrale curviligne dans le chapitre 3. Il s'agit maintenant d'étendre cela aux surfaces (ou portions de surface).

Considérons une surface S paramétrée définie et régulière sur $\mathcal{D}$. Supposons aussi que la surface est bornée, c'est-à-dire que Σ est contenue dans un pavé. Soit (u_0, v_0) un point de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}$ un rectangle de dimensions δu et δv inclus dans $\mathcal{D}$ dont (u_0, v_0) serait le coin inférieur gauche. L'image $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ par S est un "quadrilatère curviligne" dessiné sur la surface Σ. Si δu et δv sont petits, l'aire de $\mathcal{R}'$ est presque égale celle à celle du parallélogramme $M_0M_1M_2M_3$ de côtés adjacents dirigés par les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_3}$. M_0 est le point $S(u_0, v_0)$, tandis que $M_1 = S(u_0+\delta u, v_0)$ et $M_3 = S(u_0, v_0+\delta v)$. Or l'aire de ce parallélogramme vaut :

$$\|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_3}\|.$$

Donc

$$\|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_3}\| \approx \mathrm{Aire}(\mathcal{R}').$$

Or

$$\overrightarrow{M_0M_1} = S(u_0+\delta u, v_0) - S(u_0, v_0) \approx \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u$$

et

$$\overrightarrow{M_0M_3} = S(u_0, v_0+\delta v) - S(u_0, v_0) \approx \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v,$$

d'où

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{R}') \approx \|\frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0)\|\delta u\delta v = \|\mathfrak{n}(u_0, v_0)\|\delta u\delta v.$$

Si $\mathcal{D}$ est un rectangle, alors on le découpe en petits rectangles et on somme les aires pour obtenir

$$\mathrm{Aire}(\Sigma) \approx \sum_{i,j} \mathrm{Aire}(\mathcal{R}'_{ij}) \approx \sum_{i,j} \|\mathfrak{n}(u_i, v_j)\|\delta u_i\delta v_j.$$

Or d'après ce qu'on a fait dans le chapitre 2, ceci est une intégrale double. D'où la définition suivante [4].

Définition 5.5 *Soit Σ une surface paramétrée régulière définie par un paramétrage $(S, \mathcal{D})$. Alors l'aire $\mathcal{A}(\Sigma)$ de Σ est définie par l'intégrale double :*

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

À mettre en parallèle avec la notion de longueur d'une courbe définie après la définition 3.6. À noter également que cette définition de l'aire ne dépend pas du paramétrage $(S, \mathcal{D})$ choisi.

4. La justification propre demande un peu de travail...

En pratique on rencontre des surfaces Σ qui sont régulières seulement par morceaux, c'est-à-dire que Σ est la réunion de surfaces paramétrées $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, régulières sauf peut-être sur leur bord, et que les seuls points communs entre les Σ_i sont justement sur leurs frontières. Dans ce cas,

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_1) + \ldots + \mathcal{A}(\Sigma_n).$$

Exemple 5.5

1. Dans l'exemple 5.2, on a vu que le cylindre Σ de révolution d'axe z et de rayon R est une surface paramétrée régulière avec $\|\mathfrak{n}(u,v)\| = R$ et $v \in [0, 2\pi]$. Si le cylindre est tronqué pour avoir une hauteur H, alors $u \in [0, H]$. Ainsi

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u,v) \right\| dudv = R \int_0^{2\pi} \int_0^H dudv = 2\pi RH.$$

2. Pour la sphère Σ de l'exemple 5.1, $\mathcal{D} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et $\|\mathfrak{n}(u,v)\| = R^2 \sin(u)$. Le paramétrage n'est pas régulier aux pôles, donc uniquement en deux points, qu'on peut négliger dans une intégrale. Donc

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} R^2 \sin(u) dudv = 4\pi R^2.$$

Si le cylindre est circonscrit à la sphère (donc de hauteur $2R$), alors il a la même aire que la sphère ! Remarque qu'Archimède a faite il y a plus de 2200 ans (sans calcul intégral).

5.3 Intégrale de surface

Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale double vue pour un domaine $\mathcal{D}$ plan (inclus dans $\mathbb{R}^2$) à une surface. C'est l'analogue du passage de l'intégrale sur un segment à l'intégrale curviligne.

5.3.1 Intégrales de surface d'une fonction scalaire

Soit S un paramétrage d'une surface régulière Σ :

$$S(u,v) = x(u,v)e_1 + y(u,v)e_2 + z(u,v)e_3,$$

avec $(u,v) \in \mathcal{D}$. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant la surface Σ et à valeurs réelles.

Pour simplifier supposons que $\mathcal{D}$ soit un rectangle et couvrons ce domaine par des petits rectangles $\mathcal{R}_{jk}$ dans lesquelles on choisit un point (u_j, v_k). On note par $\mathcal{R}'_{jk}$ l'image de $\mathcal{R}_{jk}$ dans Σ par le parametrage S ($\mathcal{R}'_{jk}$ est donc inclus dans la surface Σ). Considérons les sommes doubles de Riemann

$$I_n = \sum_j \sum_k f(S(u_j, v_k))\text{Aire}(\mathcal{R}'_{jk}).$$

Nous avons vu que ces sommes ont une valeur proche de :

$$\sum_j \sum_k f(S(u_j, v_k)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u_j, v_k) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u_j, v_k) \right\| \delta u_j \delta v_k.$$

Moyennant un peu de régularité de la fonction f (continue suffit), lorsque qu'on réduit la taille des rectangles $\mathcal{R}_{jk}$, ces sommes devraient converger vers

$$\iint_{\mathcal{D}} f(S(u, v)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

On prouve que cette intégrale double limite ne dépend pas du paramétrage de Σ et on obtient :

Définition 5.6 *Soient Σ une surface paramétrée régulière et f une fonction continue*[5] *sur une partie $\mathcal{E}$ contenant Σ. Alors* **l'intégrale de surface** *de f sur Σ est définie par l'intégrale double :*

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} f(S(u, v)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

où S est n'importe quel paramétrage régulier de Σ.

Remarque 5.1

1. *Cette définition doit être rapprochée de la définition 3.7, définissant l'intégrale curviligne d'une fonction à partir d'une intégrale simple.*
2. *Si Σ est une surface plane, on peut la paramétrer par $S(u, v) = ue_1 + ve_2$ (quitte à changer de repère) avec $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| = 1$ et*

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} f(u, v) dudv.$$

Il s'agit donc bien d'une extension de l'intégrale double.

Comme généralisation de l'intégrale double, elle en vérifie les mêmes propriétés.

1. Linéarité :

$$\iint_{\Sigma} (\lambda f + g) d\sigma = \lambda \iint_{\Sigma} f d\sigma + \iint_{\Sigma} g d\sigma.$$

5. Continue par morceaux est suffisant.

2. Monotonie : si $f \leq h$ sur Σ, alors
$$\iint_\Sigma f d\sigma \leq \iint_\Sigma h d\sigma.$$
3. Si $a \leq f(x,y,z) \leq b$ avec a et b constantes pour tout $(x,y,z) \in \Sigma$,
$$a\mathrm{Aire}(\Sigma) \leq \iint_\Sigma f d\sigma \leq b\mathrm{Aire}(\Sigma).$$
4. $\left|\iint_\Sigma f d\sigma\right| \leq \iint_\Sigma |f| d\sigma.$
5. Additivité (relation de Chasles) : si Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces sans point commun sauf sur leurs frontières
$$\iint_{\Sigma_1 \vee \Sigma_2} f = \iint_{\Sigma_1} f d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f d\sigma.$$

Les centres et moments d'inertie d'une surface Σ de densité ρ sont définis comme dans le chapitre 6.2 et ont les mêmes propriétés.

Exemple 5.6 Considérons un segment sphérique Σ, c'est-à-dire la portion d'une sphère comprise entre deux plans parallèles situés à une distance H l'un de l'autre. Comme dans l'exemple 5.1, cette surface peut être paramétrée par
$$S(u,v) = R\sin(u)\cos(v)e_1 + R\sin(u)\sin(v)e_2 + R\cos(u)e_3$$
avec $(u,v) \in \mathcal{D} = [\alpha,\beta] \times [0,2\pi] \subset [0,\pi] \times [0,2\pi]$. Alors si Σ est homogène, il a pour masse
$$\begin{aligned} M &= \iint_\Sigma \rho(x,y,z) d\sigma = \rho \iint_\Sigma d\sigma = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_\alpha^\beta R^2 \sin(u) du\right) dv \\ &= 2\pi\rho R^2(\cos(\alpha) - \cos(\beta)). \end{aligned}$$
Un peu de géométrie du triangle (trigonométrie élémentaire, faites un dessin pour vous convaincre) montre que
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = \frac{H}{R}.$$
Donc
$$M = 2\pi\rho R H.$$
Par symétrie le centre d'inertie G sera situé sur l'axe des z et la coordonnée correspondante est
$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M} \iint_\Sigma z\rho(x,y,z) d\sigma = \frac{\rho}{M} \iint_\Sigma z d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi R H} \int_0^{2\pi} \left(\int_\alpha^\beta R\cos(u) R^2 \sin(u) du\right) dv \\ &= \frac{R^2}{H} \left[\frac{1}{2}\sin^2(u)\right]_\alpha^\beta = \frac{R^2}{2H}\left[\sin^2(\beta) - \sin^2(\alpha)\right]. \end{aligned}$$

Si a et b désignent les rayons des cercles d'intersection des plans avec la sphère, on a

$$\sin^2(\beta) - \sin^2(\alpha) = \frac{b^2}{R^2} - \frac{a^2}{R^2},$$

et ainsi

$$z_G = \frac{b^2 - a^2}{2H}.$$

Ainsi pour un hémisphère homogène, le centre d'inertie a pour coordonnées $(0, 0, R/2)$ $(a = 0$ et $b = H = R)$.

5.3.2 Calcul des aires et volumes des surfaces et solides de révolution

On considère Σ une surface de révolution paramétrée par

$$S(u, v) = x(u)\cos(v)e_1 + x(u)\sin(v)e_2 + z(u)e_3,$$

avec $(u, v) \in I \times [0, 2\pi]$. On a vu qu'alors $\|\mathfrak{n}(u, v)\| = |x(u)|\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}$. Donc l'aire de Σ est donnée par

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_a^b |x(u)|\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}\,du\,dv = 2\pi\int_a^b |x(u)|\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}\,du.$$

Or cette dernière intégrale est en fait l'intégrale curviligne et :

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi\int_\Gamma |x|ds.$$

Si Γ est donnée par le graphe d'une fonction f $(z = f(x))$, alors

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Si la demi–méridienne Γ de Σ est dans le demi plan $y = 0$, $x \geq 0$, alors

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi\int_\Gamma x ds = 2\pi\ell(\Gamma)x_G$$

où $\ell(\Gamma)$ est la longueur de la courbe et x_G est la distance qui sépare le centre d'inertie G de la courbe Γ de l'axe de révolution.

Théorème 5.2 (de Guldin) *L'aire d'une surface de révolution satisfaisant les conditions précédentes est égale au produit de la longueur de la demi–méridienne par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie.*

Si la demi–méridienne ne tourne que d'un angle θ, alors $\text{Aire}(\Sigma) = \theta\ell(\Gamma)x_G$.

Maintenant soit $\mathcal{D}$ un domaine contenu dans le demi plan Π de bord Δ et soit $\partial\mathcal{D}$ le bord de $\mathcal{D}$. Ainsi on peut supposer que pour tout point M dans $\mathcal{D}$, les coordonnées de M sont $(x, 0, z)$ avec $x \geq 0$. On appelle **solide de révolution** $\mathcal{S}$ engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de Δ la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée de points obtenus à partir de $\mathcal{D}$ par une rotation d'axe Δ.

Supposons que $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0, x \geq 0\}$, que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0, x = 0\}$ et

$$\mathcal{D} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2;\ z \in [a, b],\ f(z) \leq x \leq g(z)\}$$

pour deux fonctions f et g continues sur $[a, b]$. Le solide $\mathcal{S}$ peut être décrit facilement en coordonnées cylindriques :

$$\mathcal{S} = \{(r, \theta, z)\ z \in [a, b],\ f(z) \leq r \leq g(z),\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Donc le volume de $\mathcal{S}$ vaut :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{S}) &= \iiint_{\mathcal{S}} dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \left(\int_{f(z)}^{g(z)} rdr \right) dz \right) d\theta \\ &= \pi \int_a^b (g(z)^2 - f(z)^2) dz.\end{aligned}$$

Mais le centre d'inertie G du domaine $\mathcal{D}$ considéré comme homogène a pour première coordonnée :

$$x_G = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} xdxdz = \frac{1}{2\text{Aire}(\mathcal{D})} \int_a^b (g(z)^2 - f(z)^2) dz.$$

Autrement dit

$$\text{Volume}(\mathcal{S}) = 2\pi x_G \text{Aire}(\mathcal{D}).$$

Théorème 5.3 (de Guldin, numéro 2) *Le volume d'un solide de révolution engendré par la rotation d'un domaine plan autour d'un axe situé dans son plan et ne le coupant pas, est égal au produit de l'aire du domaine par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie.*

Par exemple, si $\mathcal{S}$ est la sphère, elle est obtenue par la rotation d'un demi disque $\mathcal{D}$, d'aire $\pi R^2/2$, et dont le centre d'inertie est sur l'axe de symétrie à une distance :

$$x_G = \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} xd\sigma = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^R r \sin(\theta) r dr d\theta \right) = \frac{4}{3\pi} R.$$

Donc on retrouve le volume de la sphère :

$$\text{Volume}(\mathcal{S}) = 2\pi \frac{4}{3\pi} R \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Si on considère le tore (voir exemple 5.4), il est obtenu par la rotation du disque $\mathcal{D}$ de rayon r, donc d'aire πr^2 et dont $x_G = R$. Ainsi il a pour volume $2\pi^2 r^2 R$ et pour aire $4\pi^2 rR$.

5.3.3 Intégrales de surface d'un champ de vecteurs

C'est l'analogue de l'intégrale vue dans la section 3.4.2. Ces intégrales curvilignes bi-dimensionnelles dépendent de l'orientation de la courbe. Pour passer à la dimension 3, il faut commencer par définir l'orientation d'une surface.

Soit S un paramétrage d'une surface régulière Σ :

$$S(u,v) = x(u,v)e_1 + y(u,v)e_2 + z(u,v)e_3,$$

avec $(u,v) \in \mathcal{D}$. Il existe donc en tout point $M = S(u,v) \in \Sigma$ un plan tangent Π et un vecteur $\mathfrak{n}(u,v) \neq$ normal à ce plan, donc à la surface Σ. Nous notons

$$\mathfrak{N}(u,v) = \frac{1}{\|\mathfrak{n}(u,v)\|}\mathfrak{n}(u,v) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial S}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u,v)\right\|}\left(\frac{\partial S}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u,v)\right)$$

un vecteur normal unitaire à la surface Σ au point $M = S(u,v)$. On montre que

Définition 5.7 (Surface orientable) *Si $(u,v) \mapsto \mathfrak{N}(u,v)$ est continue, alors les seuls vecteurs unitaires normaux à la surface sont $\mathfrak{N}$ et $-\mathfrak{N}$. Dans ce cas, la surface est* **orientable**.

De plus si on choisit l'un ou l'autre de ces champs de vecteurs on dit qu'on a **orienté** *la surface, qui est alors une surface* **orientée** *ou bien qu'elle possède deux faces : une intérieure et une extérieure.*

Par convention si la surface est fermée (frontière ou bord d'un solide $\mathcal{S}$ de l'espace), elle est **positivement orientée** si le champ des normales unitaires $\mathfrak{N}$ est dirigé vers l'extérieur du solide.

Si la surface n'est pas fermée et si elle s'appuie sur une courbe fermée Γ, on doit avoir une compatibilité entre l'orientation de la surface et celle de la courbe. La règle [6] peut s'énoncer comme suit : un observateur parcourant la courbe dans le sens de son orientation positive en regardant dans la direction de la normale $\mathfrak{N}$ doit avoir constamment la surface sur sa gauche.

La définition fait sens puisqu'il existe des surfaces non orientables, dont le célèbre ruban de Möbius paramétré par

$$S(u,v) = \left(3 - v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)e_1 + \left(3 - v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)e_2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)e_3$$

avec $(u,v) \in [0,2\pi] \times [-1,1]$. La surface est engendrée par un segment de longueur 2, pivotant dont le centre décrit un cercle de rayon 1 centré à l'origine. Le problème vient

6. Très empirique...

du fait que le segment fait un demi-tour quand son centre a fait le tour complet du cercle et qu'ainsi le bord du ruban qui correspond à $v = 1$ ou $v = -1$ est en fait une seule courbe.

En revanche la sphère, le cylindre ou le tore sont orientables.

À partir de là on définit l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs comme suit.

Définition 5.8 *Soit Σ une surface de paramétrage $(S, \mathcal{D})$, orientée par un champ de vecteurs $\mathfrak{n}$ et soit F un champ de vecteurs défini sur un ensemble contenant Σ. Alors* **l'intégrale de surface du champ F sur** Σ*, noté $\int_\Sigma V \bullet d\sigma$, est défini par*

$$\int_\Sigma V \bullet d\sigma = \iint_\mathcal{D} \langle V(F(u,v)), \mathfrak{n}(u,v)\rangle du dv.$$

Autrement dit c'est l'intégrale de surface de la fonction scalaire $\langle V(F), \mathfrak{n}(u,v)\rangle$.

5.4 Formules d'intégration

Nous avons maintenant tous les éléments pour comprendre le théorème 5.1 dans les cas particuliers voulus.

Commençons par la formule de Stokes (appelée aussi formule du rotationnel) pour un champ de vecteurs.

Théorème 5.4 (Formule de Stokes) *Soit Γ une courbe fermée et Σ une surface quelconque ayant Γ comme bord ($\partial\Sigma = \Gamma$). Si Σ et Γ sont orientés de façon compatible, alors pour tout champ de vecteurs F de classe C^1 dans un domaine $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Sigma \subset \mathcal{E}$, on a*

$$\int_\Gamma F \bullet ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot}(F) \bullet d\sigma.$$

La circulation d'un champ de vecteurs F le long de la courbe fermée Γ est égale au flux du rotationnel de F à travers toute surface s'appuyant sur Γ. Avec la dualité forme différentielle-champ de vecteurs, cette formule est un cas particulier de (5.1) : $F \rightsquigarrow \omega_F$ (1-forme différentielle), $\operatorname{rot}(F) \rightsquigarrow \mathrm{d}\omega_F$ et $M = \Sigma$ une sous-variété de dimension $p = 2$.

La formule de Green-Ostrogradsky est aussi un cas particulier de (5.1).

Théorème 5.5 (Formule de Green-Ostrogradsky) *Si F est un champ de vecteurs dans une partie $\mathcal{E}$ contenant une surface Σ fermée et orientable qui elle-même délimite un solide $\mathcal{S}$, alors*

$$\iint_{\partial\mathcal{S}} V \bullet d\sigma = \iiint_\mathcal{S} \operatorname{div}(F) dx dy dz.$$

Le flux d'un champ de vecteurs F sortant d'une surface fermée Σ est égal à l'intégrale triple de la divergence de ce champ étendu au solide délimité par cette surface. La théorème de Gauss de l'électromagnétisme se déduit de cette formule.

De plus on déduit aussi la formule de la divergence pour le plan.

Proposition 5.1 *Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan dont la frontière Γ est régulière. On note $\mathfrak{N}$ la normale unitaire à Γ (ce qui sous-entend qu'on oriente Γ !). Si F est un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{D}$:*

$$F(u, v) = X(u, v)e_1 + Y(u, v)e_2,$$

alors

$$\int_\Gamma \langle F, \mathfrak{N}\rangle ds = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}(F) dxdy$$

avec $\mathrm{div}(F) = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}$.

Chapitre 6

Annexe : à lire seul !

6.1 Quelques rappels de géométrie

6.1.1 Repérage dans le plan

On note P l'ensemble des points du plan et $\overrightarrow{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On suppose connus les éléments suivants :

— construction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des points A et B ;

— construction du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ où O est un point de P et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

On suppose enfin le plan orienté avec comme sens direct le sens trigonométrique.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\overrightarrow{P}$. Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de $\overrightarrow{P}$, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que : $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Définition 6.1 On dit alors que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une **base** de $\overrightarrow{P}$ et que $\overrightarrow{t}$ a pour **coordonnées cartésiennes** (x, y) dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soient A un point de P, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\overrightarrow{P}$. Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Définition 6.2 $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère cartésien** du plan $\overrightarrow{P}$ et M a pour **coordonnées cartésiennes** (x, y) dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 6.3 $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère orthonormal** du plan lorsque $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vérifie :

1. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$,
2. l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égal à $\pm\pi/2$ (modulo 2π).

Il est **direct** si l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égal à $\pi/2$ (modulo 2π).

On considère le plan P muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les points sont donnés par leurs coordonnées dans ce repère et les vecteurs par leurs coordonnées dans la base

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Par exemple le point A ou le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1,2,3)$ se notent $A(1,2,3)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,3)$.

Propriétés 6.1
- *Soient $A(a,b)$ et $A'(a',b')$. Alors $\overrightarrow{AA'}(a'-a, b'-b)$.*
- *Soient $\overrightarrow{u}(u_1,u_2), \overrightarrow{v}(v_1,v_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(u_1+v_1, u_2+v_2)$ et $(\lambda\overrightarrow{u})(\lambda u_1, \lambda u_2)$.*

Soient M, A, B des points de P :

Propriétés 6.2
- *Si $M(x,y)$, alors $OM = \sqrt{x^2+y^2}$.*
- *Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, alors $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.*
- *Si $\overrightarrow{u}(x,y)$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.*

6.1.2 Produit scalaire dans le plan

Définition 6.4 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{P}$. Alors on appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *nombre* noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ avec
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls ;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, sinon.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et O un point du plan. Soient A et B définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$. H désigne la projection orthonormale de B sur (OA). Alors

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.}$$

Proposition 6.1 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{P}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.}$$

Proposition 6.2 *Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$. Alors*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'.}$$

On peut utiliser les nombres complexes. Si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $x+iy = u$ et si $\overrightarrow{v}$ a pour affixe $x'+iy' = v$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \Re(uv)$.

Propriétés 6.3 *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{P}$. Alors*
- *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (le produit scalaire est symétrique) ;*
- *$\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})$;*
- *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.*

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$. Alors $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j})$.

Droites et distance. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal, $\overrightarrow{n}$ un vecteur et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

- $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées (a, b).
- De plus si $M(x_0, y_0)$ est un point du plan, alors la distance de M à $\mathcal{D}$ vaut

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} + c|}{\|\overrightarrow{n}\|^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .}$$

Si Ω est un point de la droite, alors

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\ .}$$

6.1.3 Dans l'espace

On note E l'ensemble des points de l'espace et $\overrightarrow{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. Comme pour le plan, on suppose connus les éléments suivants :

- construction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des points A et B ;
- construction du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ où O est un point de P et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés et appelons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors l'ensemble des points M de E pour lesquels il existe un couple de réels (x, y) tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$

forme un plan P. Par ailleurs $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère de P, (x, y) sont les coordonnées de M dans ce repère.

Définition 6.5 Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ... de $\overrightarrow{E}$ sont dits **coplanaires** si pour un point O quelconque de E et si pour les points A, B, C, ... définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$, ... , alors les points O, A, B, C, ... sont dans un même plan (ou coplanaires).

Donc deux vecteurs sont toujours coplanaires. Ainsi on peut définir **l'angle** de deux vecteurs de l'espace comme l'angle qu'ils forment dans un plan.

Définition 6.6 On appelle **base** de $\overrightarrow{E}$ tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires et **repère** cartésien de E tout quadruplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où A est un point de E appelé origine du repère et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.

Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ étant donné, pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$. (x, y, z) sont les coordonnées de $\overrightarrow{t}$.

De même un repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ étant fixé, tout point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) telles que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.

Définition 6.7 $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un **repère orthonormal** de l'espace lorsque $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ vérifie :

1. $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$,
2. les angles entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont égaux à $\pm\pi/2$ (modulo 2π).

Soit $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un **repère orthonormal** de l'espace. Un observateur se tient debout dans l'axe $(A, \overrightarrow{k})$, les pieds en A et regardant le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{i}$. On note J le point de E tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{j}$.

Définition 6.8 Le repère est dit **direct** si l'observateur a le point J à sa gauche. Il est **indirect** dans le cas contraire.

6.1.4 Produit scalaire

La définition et les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, car deux vecteurs sont toujours coplanaires !

Définition 6.9 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors on appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *nombre* noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ avec
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls ;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, sinon.

Proposition 6.3 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.}$$

Propriétés 6.4 *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ *(le produit scalaire est symétrique) ;*
- $\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})$ *;*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

Proposition 6.4 *Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$. Alors*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.}$$

De plus $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ a pour coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{k})$.

Plan et distance. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal, $\overrightarrow{n}$ un vecteur et $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

— $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées (a, b, c).

— De plus si $M(x_0, y_0, z_0)$ est un point de l'espace, alors la distance de M à $\mathcal{P}$ vaut

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} + d|}{\|\overrightarrow{n}\|^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + +cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .}$$

Si Ω est un point du plan, alors

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\ .}$$

6.1.5 Produit vectoriel

On suppose ici l'espace orienté par un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormal direct.

Définition 6.10 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On appelle **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *vecteur* noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

— $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ;

— et lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :

  — $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (ce qui donne la direction du vecteur),

  — $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe (ce qui donne le sens du vecteur),

  — $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (ce qui donne la norme du vecteur). Ici $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ représente une mesure de l'angle non orienté (donc un élément de $[0, \pi]$).

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$ et α un réel. Alors

Propriétés 6.5

— $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *(antisymétrie) ;*

— $(\alpha \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ *;*

— $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

— $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

— *Si* $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ *et* $\overrightarrow{v}(x', y', z')$, *alors*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} : (yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y).$$

Soient A, B et C trois points non alignés de E. Alors l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

6.1.6 Déterminant ou produit mixte

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$.

Définition 6.11 On appelle **déterminant (ou produit mixte)** des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, le *nombre réel* noté $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Proposition 6.5 *$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Soient $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal direct, $\overrightarrow{u}(x, y, z)$, $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ et $\overrightarrow{w}(x'', y'', z'')$. Alors

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \;=\; x(y'z'' - z'y'') - x'(yz'' - zy'') + x''(yz' - zy').$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors

Propriétés 6.6
- *Si on échange la place de deux vecteurs alors le déterminant est changé en son opposé. Ainsi*

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$

- *Si α est un réel,*

$$\mathrm{Det}(\alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha\overrightarrow{w}) = \alpha\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

- *Si $\overrightarrow{t}$ est un autre vecteur,* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base directe de $\overrightarrow{E}$ si et seulement si* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, qui vaut six fois le volume du tétraèdre formé par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

6.2 Centre et moment d'inertie, théorème de Huyghens-Steiner

Ce chapitre assez court donne quelques utilisations classiques des intégrales (doubles, triples, curvilignes, de surface) en physique.

6.2.1 Centre d'inertie

Si on considère n points $A_1, \ldots, A_n$ de masse respective $m_1, \ldots, m_n$, on appelle **centre d'inertie** de ce système de points, l'unique point G vérifiant l'égalité vectorielle : pour tout point B,

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{BA_j},$$

M étant la masse totale du système donnée par $M = \sum_{j=1}^{n} m_j$. Cette égalité vectorielle est équivalente à :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{GA_j}.$$

Si on choisit comme point B l'origine O d'un repère, alors on obtient directement les coordonnées du point G dans ce repère. À noter que cette notion mathématique apparaîtra aussi en géométrie (barycentre), dans l'analyse de données (régression ou classification) ou en probabilités (espérance d'une distribution).

Si on a une distribution continue de masse répartie dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan, avec une *densité de masse* $\rho(x, y)$ en tout point $P = (x, y) \in \mathcal{D}$, alors on définit son *centre d'inertie* comme l'unique point G donné pour tout $A \in \mathbb{R}^2$ par

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dxdy} \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) \overrightarrow{AP} dxdy.$$

La quantité

$$M = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dxdy$$

est la *masse* du domaine $\mathcal{D}$. Si on choisit A comme étant l'origine O, alors on obtient les coordonnées de G :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) x dxdy \\ y_G &= \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) y dxdy. \end{aligned}$$

Si on considère un solide $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$, de densité massique ρ, alors la masse du solide $\mathcal{S}$ est

$$M = \iiint_{\mathcal{S}} \rho = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) dxdydz.$$

Le centre d'inertie G du solide a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) x dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) y dxdydz, \\ z_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) z dxdydz. \end{aligned}$$

De même si ρ est la densité linéaire (de masse ou de charge) d'un fil mince qui a la forme de la courbe Γ, alors l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \rho$ est la masse totale (ou la charge totale) M du fil et

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho(x, y) ds, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho(x, y) ds,$$

sont les coordonnées du centre d'inertie du fil.

Dans tous les cas les centres d'inertie vérifient les propriétés suivantes :

1. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plaques minces (ou deux solides ou deux fils) de masse M_1 et M_2 et de centre d'inertie G_1 et G_2, alors la réunion $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ a comme centre d'inertie le point G tel que
$$x_G = \frac{M_1}{M_1 + M_2} x_{G_1} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} x_{G_2}, \quad y_G = \frac{M_1}{M_1 + M_2} y_{G_1} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} y_{G_2}$$
(avec une éventuelle dimension de plus pour un solide).
2. Si l'objet $\mathcal{P}$ homogène a un centre de symétrie, alors son centre d'inertie est ce centre de symétrie.
3. Si l'objet $\mathcal{P}$ a un axe de symétrie (droite ou plan), alors son centre d'inertie est sur cet axe.

6.2.2 Moment d'inertie

Là aussi commençons avec un nombre fini de points $A_1, \ldots, A_n$ de masse respective $m_1, \ldots, m_n$. On appelle **moment d'inertie** de ce système par rapport à l'axe Δ ou le point Ω la quantité :
$$I_\Delta = \sum_{j=1}^n m_j d_j^2, \qquad I_\Omega = \sum_{j=1}^n m_j d_j^2,$$
où d_j est la distance entre le point A_j et l'axe Δ ou le point Ω.

Ici encore le cas fini se décline entre différents cas suivant la dimension et la forme du système. Ainsi pour une plaque mince $\mathcal{D}$ de densité de masse ρ, si maintenant Δ désigne une droite, alors le *moment d'inertie* du domaine $\mathcal{D}$ par rapport à Δ est
$$I_\Delta = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) d^2(P, \Delta) dx dy,$$
où $d(P, \Delta)$ est la distance du point P à l'axe Δ. Si Δ est la droite des abscisses (resp. celle des ordonnées), alors le moment d'inertie I_y (resp. I_x) est
$$I_y = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) y^2 dx dy \quad \text{(resp.} \quad I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) x^2 dx dy).$$
Enfin remarquons que si Δ_1 et Δ_2 sont deux axes perpendiculaires qui se coupent un point Ω, alors
$$I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} = I_\Omega.$$
Toutes ces définitions ont leur équivalent si $\mathcal{D}$ est remplace par un fil mince, l'intégrale double devenant l'intégrale curviligne.

À noter qu'en probabilités, cette notion sera liée au moment d'ordre deux et à la variance. En analyse de données les moments d'inertie joueront un rôle clé pour la classification.

Pour un solide $\mathcal{S}$, on ajoute comme définition le **produit d'inertie** de $\mathcal{S}$ par rapport à deux plans orthogonaux Π_1 et Π_2 par

$$I_{\Pi_1\Pi_2} = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(P)d_1(P)d_2(P)dV(P)$$

ρ étant la densité volumique de masse, d_1 et d_2 les distances du point P au plan Π_1 et Π_2.

Si on fixe un repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3), alors les distances d'un point $P(x, y, z)$ aux plans de coordonnées yOz, xOz et xOy sont respectivement x, y et z et ainsi on calcule les moments d'inertie par rapport aux trois axes de coordonnées

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \iiint_{\mathcal{S}} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\ dxdydz, I_{Oy} = \iiint_{\mathcal{S}} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\ dxdydz, \\ I_{Oz} &= \iiint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\ dxdydz, \end{aligned}$$

les produits d'inertie par rapport aux plans de coordonnées :

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yOz,xOz} &= \iiint_{\mathcal{S}} xy\rho(x,y,z)\ dxdydz, I_{yz} = I_{xOz,xOy} = \iiint_{\mathcal{S}} yz\rho(x,y,z)\ dxdydz, \\ I_{xz} = I_{yOz,xOy} &= \iiint_{\mathcal{S}} xz\rho(x,y,z)\ dxdydz. \end{aligned}$$

La **matrice d'inertie** du solide est alors

$$I_{O,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Oy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Oz} \end{pmatrix}.$$

Si $O = G$ est le centre d'inertie, elle s'appelle **matrice centrale d'inertie** et si Δ est une droite passant par O dont les coordonnées du vecteur directeur sont $u = (a, b, c)$, alors

$$I_\Delta = \langle u, I_{O,\mathcal{S}}u\rangle.$$

Le théorème suivant est valable en toute dimension (pour nous 2 ou 3).

Théorème 6.1 (de Huyghens-Steiner) *Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à l'axe Δ_G parrallèle à Δ et passant par le centre d'inertie G et du produit Md^2, M étant la masse totale de l'objet et d la distance entre les deux axes :*

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2.$$

Si Ω est un point, le moment d'inertie I_Ω est égal à la somme du moment d'inertie I_G par rapport au centre d'inertie G et du produit Md^2, d létant la distance entre Ω et G.

6.3 Opérateurs différentiels

On a déjà évoqué quelques notions dans le chapitre 3 : dérivée partielle, différentielle d'une fonction (définition 3.9), gradient. Ainsi le gradient est un opérateur qui associe à un champ scalaire f (fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$) un champ vectoriel ∇f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\nabla(f)(x) = \nabla(f)(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right).$$

Notons que pour le gradient on a

Théorème 6.2 *Le gradient $\nabla(f)(M)$ d'un champ scalaire f en un point M de l'espace $\mathbb{R}^d$ dépend unniquement du point M et de f et pas du système de coordonnées.*

Notons que la différentielle df se calcule via la formule condensée :

$$\mathrm{d}f = \nabla(f).\,\mathrm{d}x = \langle \nabla(f), \mathrm{d}x\rangle,$$

dx étant le vecteur $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_d)$. Ainsi si v est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, alors

$$\nabla(f)(M).v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(M)v_d$$

est la **dérivée de f en M dans la direction** v.

Nous allons voir maintenant deux autres opérateurs différentiels importants pour la suite. De façon générale rappelons que

Définition 6.12 *Soit E un espace vectoriel de fonctions. Un* **opérateur** *(linéaire) sur E est une application A définie sur E et telle que :*

1. *$A(\lambda u) = \lambda A(u)$ pour tout $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$;*
2. *$A(u + v) = A(u) + A(v)$ pour tout u et tout v dans E.*

Ainsi ∇ est un opérateur qui agit sur E, l'ensemble des champs scalaires différentiables.

6.3.1 Divergence d'un champ de vecteurs

Cet opérateur associe à un champ de vecteurs F un champ scalaire très important en physique.

Définition 6.13 *Si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs de coordonnées $F_1, \ldots, F_d$ alors la* **divergence** *du champ F est le champ scalaire défini pour $x \in \mathbb{R}^d$ par :*

$$\mathrm{div}(F)(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial F_d}{\partial x_d}(x).$$

Comme pour le gradient cette définition est indépendante du choix du système de coordonnées.

Supposons que $F(x, y, z)$ soit le champ des vitesses d'un fluide en un point (x, y, z) de l'espace. Alors la divergence $\mathrm{div}(F)$ s'interprête comme la mesure du flux sortant du fluide en tout point. Ainsi si $\mathrm{div}(F) > 0$, le bilan est positif et correspond à une source. Au contraire $\mathrm{div}(F) < 0$ est un puits, tandis que $\mathrm{div}(F) = 0$ est un bilan équilibré sans source ni puits.

Enfin remarquons que

$$\mathrm{div}(\nabla(f)) = \Delta f$$

est le laplacien du champ scalaire f.

6.3.2 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Définition 6.14 *Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de composantes P, Q et R, alors le* **rotationnel** *du champ F est le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$\mathrm{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3.$$

Lorsque le champ de vecteurs F est le champ des vitesses d'un fluide, $\mathrm{rot}(F)$ s'appelle la *vorticité*.

Pour se souvenir de l'expression du rotationnel, si on pose $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3$, alors

$$\mathrm{rot}(F) = \nabla \wedge F$$

$\wedge$ étant le produit vectoriel des vecteurs. Là aussi la définition de $\mathrm{rot}(F)$ ne dépend pas du choix de coordonnées.

Remarque 6.1 *Si F est un champ de dimension 2, $F(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$, alors le rotationnel désigne soit le champ scalaire*

$$\mathrm{rot}(F) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

soit le champ vectoriel

$$\mathrm{rot}(F) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3.$$

Terminons en remarquant [1] que pour tout champ scalaire

$$\mathrm{rot}(\nabla(f)) = 0$$

et pour tout champ vectoriel

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0.$$

1. Faites le calcul une fois pour vérifier !

Les champs de vecteurs peuvent se décomposer en deux parties. D'abord il y a les champs de vecteurs *conservatifs* ou *dérivant d'un potentiel*. Un champ F est conservatif s'il existe un champ scalaire f tel que $F = \nabla(f)$. Le champ f est une fonction primitive de F. Ainsi un champ conservatif vérifie $\mathrm{rot}(F) = 0$, c'est-à-dire que F est *irrotationnel*. La réciproque est presque vraie.

Proposition 6.6 *Un champ de vecteurs F défini sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ simplement connexe et irrotationnel est conservatif. En dimension 2, il faut simplement vérifier* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Un champ F est *solénoïdal* ou *incompressible* ou *à flux conservatif* dans un domaine $\mathcal{D}$ si sa divergence est nulle. La terme solénoïdal vient de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell montrant que le champ magnétique est solénoïdal.

Proposition 6.7 *Si $\mathcal{D}$ est un domaine simplement connexe, et si F est un champ solénoïdal défini sur $\mathcal{D}$, alors il existe un champ de vecteurs G défini dans $\mathcal{D}$ tel que $F = \mathrm{rot}(G)$. Le champ G est le potentiel vecteur de F.*

Comme pour les primitives, G n'est pas unique puisque $H = G + \nabla(f)$ vérifie aussi $\mathrm{rot}(H) = F$.

Théorème 6.3 (Décomposition de Helmholtz-Hodge) *Soit F un champ de vecteurs (de classe C^1) sur un domaine $\mathcal{D}$ (compact, connexe à bord régulier ou $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$). Alors il existe un champ vectoriel G et un champ scalaire f tels que*

$$F = \mathrm{rot}(G) + \nabla(f).$$

Si on change les conditions sur $\mathcal{D}$ ou sur le comportement des champs à l'infini, il faut généralement ajouter un champ harmonique dans la décomposition. Cette décomposition est appliquée en mécanique des fluides notamment.

Analogie avec les formes différentielles. Si F est un champ de vecteurs de composantes P, Q et R, on peut associer une forme différentielle ω_F définie par $\omega_F = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. Et réciproquement à une forme différentielle on associe un champ de vecteurs $F = F_\omega$. Il est alors facile de voir que :

Proposition 6.8

1. *Le champ de vecteurs est conservatif sur $\mathcal{D}$ si et seulement si ω_F est exacte sur $\mathcal{D}$.*
2. *Si $\mathcal{D}$ est simplement connexe, une forme différentielle est exacte si et seulement si le champ de vecteurs associé F_ω est irrotationnel, c'est-à-dire* $\mathrm{rot}(F_\omega) = 0$.