Le Mans Université

Licence Mathématiques troisième année

# Courbes et intégrales

*Alexandre POPIER*

**Année : 2022–2023**

# Table des matières

# Notations

Côté analyse, $f'$ désignera toujours la dérivée d'une fonction à une variable. Elle est réservée exclusivement aux fonctions à une variable. Si la fonction dépend de plusieurs variables, il sera nécessaire de préciser par rapport à quelle variable on dérive (dérivée partielle).

Dans les exercices, on rencontrera uniquement les espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Néanmoins dans le cours, on se placera dans l'espace $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$. L'espace $\mathbb{R}^k$ est muni du repère cartésien canonique $(e_1, \ldots, e_k)$, où $e_i \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i$-ème. Les éléments de $\mathbb{R}^k$ seront représentés par les coordonnées dans ce repère $X = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. On identifiera en permanence un vecteur $V$ de $\mathbb{R}^k$ et ses coordonnées en écrivant $V = (v_1, \ldots, v_n)$. On ne distinguera pas la notation ligne ou colonne des vecteurs (attention quand il s'agit de multiplier avec des matrices...).

On rappelle que si $X$ et $X'$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$, le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle X, X' \rangle = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \ldots + x_k x_k' = \sum_{i=1}^{k} x_i x_i'.$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, il pourra être noté $\langle X, X' \rangle = X \cdot X'$. On note $\|X\|$ la norme euclidienne du vecteur $X$ :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}.$$

Soit une fonction [1]

$$\begin{array}{rccc} f : & I & \to & \mathbb{R}^k \\ & t & \mapsto & F(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)) \end{array}$$

$I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

**Définition 0.1** *On dit que $f$ est* de classe $C^N$ sur *$I$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) si et seulement si les fonctions coordonnées $x_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$ sont de classe $C^N$ sur $I$.*

Si c'est le cas, pour tout $0 \leq p \leq N$, on a : $f^{(p)}(t) = (x_1^{(p)}(t), \ldots, x_k^{(p)}(t))$. En notant $M(t)$ le point de coordonnées $(x_1(t), \ldots, x_k(t))$, et en posant $f(t) = \overrightarrow{OM(t)}$, on a aussi $f^{(p)}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M(t)}}{\mathrm{d}t^p}$, par identification de $M$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. On parle parfois de fonction vectorielle quand $k \geq 2$, pour insister sur le côté multi-dimensionnel de l'espace d'arrivée.

Pour une fonction $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}^k$ et pour $a$ et $b$ deux points de $I$, on définit l'intégrale de $f$ sur le segment $[a,b]$ comme le vecteur de dimension $k$ définie par

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \int_a^b x_2(t)dt, \dots, \int_a^b x_k(t)dt\right).$$

**Proposition 0.1** *Soient $F$ et $G$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}^k$ de classe $C^1$ sur $I$.*

1. *Alors $\langle F, G\rangle$ est définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in I,\ \langle F, G\rangle(t) = \langle F(t), G(t)\rangle$, et est de classe $C^1$ sur $I$ avec*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle F, G\rangle) = \langle \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}, G\rangle + \langle F, \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\rangle.$$

2. *Si pour tout $t \in I$, $F(t) \neq (0,0)$, alors $t \mapsto \|F(t)\|$ est de classe $C^1$ sur $I$ et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|F(t)\|) = \frac{1}{\|F(t)\|}\left\langle F(t), \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle.$$

# Chapitre 1

# Coniques

Les coniques ont été étudiées depuis l'antiquité. Ce sont, après les droites, les courbes planes les plus simples et les plus fréquemment rencontrées. D'abord apparues comme sections planes des cylindres et des cônes de révolution (d'où leur nom), elles sont maintenant surtout considérées, d'un point de vue mathématique, comme les courbes planes ayant une équation polynomiale du second degré. Elles jouissent de propriétés géométriques remarquables et interviennent dans de nombreux problèmes physiques, en particulier en cinématique (mouvement des planètes) et en optique géométrique (miroirs).

Nous étudierons ici les coniques exclusivement du point de vue de la géométrie euclidienne. Tout ce chapitre a donc pour cadre un **plan affine euclidien**, rapporté, dans la plupart des cas, à un repère orthonormal (avec une exception en ce qui concerne l'hyperbole, dont l'équation est particulièrement simple dans un repère porté par ses asymptotes).

Dans un tel plan, sont connues les courbes décrites par une équation du type : pour trois constantes $a$, $b$ et $c$

$$ax + by + c = 0.$$

Sauf cas dégénéré, ce sont les droites de ce plan, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b, a)$, de vecteur normal $\overrightarrow{v}(a, b)$.

## 1.1 Réduction des équations du second ordre

Soit $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = 0$, avec $a$, $b$, $c$ non tous nuls, l'équation d'une telle courbe $\Gamma$ dans un certain repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et soit $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un autre repère cartésien du plan. Notons $X$ (resp. $X'$) le vecteur colonne des coordonnées $(x, y)$ (resp. $(x', y')$) d'un point $M$ dans le repère $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$), $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

$B$ le vecteur colonne de composantes $(d, e)$, $P$ la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $C$ le vecteur colonne des coordonnées de $O'$ dans le repère $\mathcal{R}$.

L'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit alors ${}^tXAX + 2\,{}^tBX + f = 0$. Mais les coordonnées de $M$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sont données par $X = PX' + C$. Il en résulte que l'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit

$$ {}^t(PX' + C)A(PX' + C) + 2\,{}^tB(PX' + C) + f = 0, $$

soit encore

$$ {}^tX'A'X' + 2\,{}^tB'X' + f' = 0, $$

où $A' = {}^tPAP$, $B' = {}^tP(B + AC)$, $f' = f + {}^tCAC + 2\,{}^tBC$. Cette équation est encore polynomiale du second degré en $x'$, $y'$.

**Conclusion :** si une courbe admet, dans un certain repère cartésien du plan (non nécessairement orthonormé) une équation du second degré, alors elle admet, dans tout repère cartésien du plan, orthonormé ou pas, une équation du second degré. Cette propriété ne dépend en fait pas du repère!

Le but de cette section est de montrer que toute courbe plane admettant une équation du second degré est une conique (éventuellement dégénérée) et de ramener son équation, par un changement de repère approprié, à une des formes dites canoniques.

On considère donc dans toute cette section une courbe plane $\Gamma$ (éventuellement vide ou réduite à un point) admettant, dans un certain repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une équation du second degré, de la forme :

$$ ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1.1} $$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ sont 6 réels quelconques, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

En utilisant de nouveau

$$ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} $$

l'équation de $\Gamma$ devient

$$ {}^tXAX + 2\,{}^tBX + f = 0. $$

La matrice $A$ étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale réelle $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda$ et $\mu$ les valeurs propres de $A$ telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$, d'où $D = {}^tPAP$. La matrice $P$ est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs colonnes de la matrice $P$.

Notons $(x', y')$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}, \vec{v})$ du point de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. L'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit donc

$$ {}^tX'DX' + 2\,{}^tB'X' + f = 0 $$

soit encore

$$ \lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0, $$

où $B' = {}^tPB$. Les matrices $A$ et $D$ étant semblables, on a

$$ ac - b^2 = \det(A) = \det(D) = \lambda\mu. $$

**Premier cas : $ac - b^2 > 0$.** Dans ce cas, $\lambda$ et $\mu$ sont de même signe ; on peut donc, quitte à multiplier l'équation par -1, les supposer tous deux positifs et poser $\lambda = \alpha^2$, $\mu = \beta^2$ pour des réels positifs $\alpha$ et $\beta$. L'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit alors

$$\alpha^2 \left(x' + \frac{d'}{\alpha^2}\right)^2 + \beta^2 \left(y' + \frac{e'}{\alpha^2}\right)^2 + f' = 0$$

avec $f' = f - \dfrac{(d')^2}{\alpha^2} - \dfrac{(e')^2}{\beta^2}$.

Soit $O'$ le point de coordonnées $\left(-\dfrac{d'}{\alpha^2}, -\dfrac{e'}{\beta^2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$ le repère $(O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(x'', y'')$ les coordonnées dans $\mathcal{R}''$ d'un point de coordonnées $(x', y')$ dans $\mathcal{R}'$ de sorte que

$$x'' = x' + \frac{d'}{\alpha^2}, \quad y'' = y' + \frac{e'}{\alpha^2}.$$

L'équation de $\Gamma$ dans $\mathcal{R}''$ s'écrit donc

$$\alpha^2 (x'')^2 + \beta^2 (y'')^2 + f' = 0.$$

Trois cas se présentent :

— Si $f' > 0$, $\Gamma$ est vide.

— Si $f' = 0$, $\Gamma$ est réduite au point $O'$.

— Si $f' < 0$, l'équation de $\Gamma$ s'écrit, en posant $a' = \dfrac{\sqrt{-f'}}{\alpha}$ et $b' = \dfrac{\sqrt{-f'}}{\beta}$ :

$$\frac{(x'')^2}{(a')^2} + \frac{(y'')^2}{(b')^2} = 1.$$

On dit, dans tous ces cas, que $\Gamma$ est du *genre ellipse*.

**Deuxième cas : $ac - b^2 < 0$.** Les réels $\lambda$ et $\mu$ sont de signe contraire ; on peut donc, quitte à multiplier l'équation par -1, supposer $\mu = \alpha^2 > 0$ et $\lambda = -\beta^2 < 0$ pour des réels positifs $\alpha$ et $\beta$. L'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit alors

$$\alpha^2 \left(x' + \frac{d'}{\alpha^2}\right)^2 - \beta^2 \left(y' - \frac{e'}{\alpha^2}\right)^2 + f' = 0$$

avec $f' = f - \dfrac{(d')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(e')^2}{\beta^2}$.

Soit $O'$ le point de coordonnées $\left(-\dfrac{d'}{\alpha^2}, \dfrac{e'}{\beta^2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$ le repère $(O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(x'', y'')$ les coordonnées dans $\mathcal{R}''$ d'un point de coordonnées $(x', y')$ dans $\mathcal{R}'$ de sorte que

$$x'' = x' + \frac{d'}{\alpha^2}, \quad y'' = y' - \frac{e'}{\alpha^2}.$$

L'équation de $\Gamma$ dans $\mathcal{R}''$ s'écrit donc

$$\alpha^2(x'')^2 - \beta^2(y'')^2 + f' = 0.$$

Trois cas se présentent :

— Si $f' = 0$, l'équation s'écrit sous la forme $(\alpha x'' - \beta y'')(\alpha x'' + \beta y'') = 0$. $\Gamma$ est donc réunion des deux droites sécantes en $O'$.

— Si $f' < 0$, l'équation de $\Gamma$ s'écrit, en posant $a' = \dfrac{\sqrt{-f'}}{\alpha}$ et $b' = \dfrac{\sqrt{-f'}}{\beta}$ :

$$\frac{(x'')^2}{(a')^2} - \frac{(y'')^2}{(b')^2} = 1.$$

$\Gamma$ est donc une hyperbole (d'axe focal $O'x''$).

— Si $f' > 0$, l'équation de $\Gamma$ s'écrit, en posant $a' = \dfrac{\sqrt{f'}}{\alpha}$ et $b' = \dfrac{\sqrt{f'}}{\beta}$ :

$$-\frac{(x'')^2}{(a')^2} + \frac{(y'')^2}{(b')^2} = 1.$$

$\Gamma$ est donc une hyperbole (d'axe focal $O'y''$).

On dit, dans tous ces cas, que $\Gamma$ est du *genre hyperbole*.

**Troisième cas : $ac - b^2 = 0$.** On a alors $\lambda\mu = 0$, mais un seul des deux nombres $\lambda$ et $\mu$ est nul, sinon la matrice $A$ serait nulle et l'équation de $\Gamma$ ne serait plus du second degré. On peut donc supposer $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. L'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit $\mu(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0$, soit encore

$$\mu\left(y' + \frac{e'}{\mu}\right)^2 + 2d''x' + f' = 0,$$

avec $d'' = d'/\mu$ et $f' = f/\mu - (e')^2/\mu^2$. Quatre cas se présentent :

— Si $d'' = 0$ et $f' > 0$, $\Gamma$ est vide.

— Si $d'' = 0$ et $f' = 0$, l'équation s'écrit $\mu\left(y' + \dfrac{e'}{\mu}\right)^2 = 0$. $\Gamma$ est une droite double.

— Si $d'' = 0$ et $f' < 0$, $\Gamma$ est réunion des deux droites parallèles d'équations $y' + e'/\mu = \pm\sqrt{-f'}$.

— Si $d'' \neq 0$, soit $O'$ le point de coordonnées $\left(-\dfrac{f'}{2d''}, -\dfrac{e'}{\mu}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$ le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$ et $(x'', y'')$ les coordonnées dans $\mathcal{R}''$ d'un point de coordonnées $(x', y')$ dans $\mathcal{R}'$ de sorte que

$$x'' = x' + \frac{f'}{2d''}, \quad y'' = y' + \frac{e'}{\mu}.$$

L'équation de $\Gamma$ dans $\mathcal{R}''$ s'écrit donc $(y'')^2 + 2d''(x'')^2 = 0$. $\Gamma$ est donc une parabole (d'axe focal $O'x''$).

On dit, dans tous ces cas, que $\Gamma$ est du *genre parabole*.

En résumé, on voit que toute courbe admettant une équation polynomiale du second degré est soit une conique (ellipse ou cercle, hyperbole ou parabole), soit vide ou réduite à un point, soit réunion de deux droites, éventuellement confondues. Dans ce dernier cas, l'équation de $\Gamma$ se décompose en produit de deux équations du premier degré : on dit que la conique est *dégénérée*.

## 1.2 Équations réduites et paramétrage des coniques

De l'équation (1.1), on est parvenu aux équations dites réduites ou canoniques des coniques :

— Parabole : $y^2 = 2px$.

— Ellipse :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

— Hyperbole :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ceci permet de les paramétrer aisément.

**Parabole.** La parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique : pour $t \in \mathbb{R}$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{t^2}{2p}, \\ y & = & t. \end{array} \right.$$

**Ellipse.** L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique : pour $t \in [0, 2\pi[$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\cos(t), \\ y & = & b\sin(t). \end{array} \right.$$

**Hyperbole.** L'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique : pour $t \in \mathbb{R}$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \pm a \ \mathrm{ch}(t), \\ y & = & b \ \mathrm{sh}(t). \end{array} \right.$$

chaque choix de signe correspondant à la représentation paramétrique de l'une des deux branches.

Elle admet également la représentation paramétrique rationnelle : pour $u > 0$ ou $u < 0$

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right) \\ y &= \dfrac{b}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right) \end{cases}$$

chacun des intervalles de son domaine de définition correspondant à une branche.

On en déduit que l'hyperbole d'équation admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. En effet, en utilisant par exemple la représentation paramétrique $x = a\mathrm{ch}t$, $y = b\mathrm{sh}t$ de la branche de droite de l'hyperbole, on voit que, pour tout point $(x, y)$ de l'hyperbole, $y - \frac{b}{a}x = b(\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t) = -be^{-t}$ tend vers 0, quand $t$ tend vers $+\infty$ et $y + \frac{b}{a}x = b(\mathrm{sh}t + \mathrm{ch}t) = be^{t}$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $-\infty$.

## 1.3 Définition par foyer et directrice

Les équations du second ordre est une extension naturelle des droites. Néanmoins ce n'est pas ainsi que les coniques sont apparues, notamment en mécanique au XVII ème siècle. Nous allons maintenant les définir de façon plus "géométrique".

**Définition 1.1** *Soit $D$ une droite, $F$ un point n'appartenant pas à $D$, et $e > 0$ un réel. On appelle* **conique de directrice $D$, de foyer $F$ et d'excentricité** *$e$ l'ensemble des points $M$ du plan dont le rapport des distances à $F$ et à $D$ est égal à $e$, i.e. qui vérifient*

$$\frac{MF}{MH} = e,$$

*où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $D$. Si $e < 1$, la conique est appelée* **ellipse***, si $e = 1$* **parabole***, et si $e > 1$* **hyperbole**.

**Proposition 1.1** *La perpendiculaire $\Delta$ à la directrice $D$ menée par le foyer $F$ est axe de symétrie de la conique. Cette droite est appelée* **axe focal de la conique** *(focal = qui porte le foyer).*

**Preuve.** Soit $M$ un point de la conique, $s$ la symétrie orthogonale d'axe $\Delta$, $M' = s(M)$. Le point $F$ est fixe par $s$ et la droite $D$ globalement invariante par $s$. Une symétrie orthogonale conserve les distances et l'orthogonalité. Il en résulte que le projeté orthogonal de $M'$ sur D est l'image $H' = s(H)$ du projeté orthogonal $H$ de $M$ sur $D$ et que $M'F = MF$, $M'H' = MH$. Le point $M'$ appartient donc à la conique. $\square$

### 1.3.1 Équations réduites

Nous allons chercher dans ce paragraphe un repère dans lequel l'équation de la conique soit la plus simple possible. Une telle équation sera appelée **équation réduite de la conique**, et on va retrouver les équations vues précédemment.

La proposition précédente nous amène à travailler dans un repère orthonormal dont l'axe des $x$ est l'axe focal. Soit donc $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un tel repère, $(x_F, 0)$ les coordonnées de $F$ , $x = x_D$ l'équation de $D$ dans ce repère. L'équation $\dfrac{MF}{MH} = e$ équivaut à $MF^2 = e^2MH^2$, soit encore :

$$(x - x_F)^2 + y^2 = e^2(x - x_D)^2.$$

Si $e = 1$, cette équation s'écrit encore :

$$2(x_F - x_D)\left(x - \frac{x_D + x_F}{2}\right) = y^2,$$

ce qui amène à poser $x_F = p/2$, $x_D = -x_F$. L'équation s'écrit alors $y^2 = 2px$. Le réel $p > 0$ est appelé **paramètre de la parabole** (c'est la distance du foyer à la directrice), l'origine $O$ sommet de la parabole (c'est le seul point de la parabole situé sur l'axe focal).

Si $e \neq 1$, l'équation s'écrit :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2x(x_F - e^2x_D) + x_F^2 - e^2x_D^2 = 0.$$

On est alors amené à choisir l'origine $O$ du repère de faÃ§on à avoir $x_F - e^2x_D = 0$, ce qui revient à dire que $O$ est barycentre du système de points pondérés $[(F, 1), (K, -e^2)]$, où $K$ est le point d'intersection de la directrice et de l'axe focal. Le point $O$ est aussi le milieu du segment $AA'$, où $A$ et $A'$ sont les deux points de la conique situés sur l'axe focal. Si on appelle $a$ et $-a$ les abscisses de ces points, de sorte que $x_D = \dfrac{a}{e}$, $x_F = ae$, l'équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

On constate alors que l'axe $Oy$ est axe de symétrie et le point $O$ centre de symétrie de la conique. L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi appelées **coniques à centre**, ce qui les distingue de la parabole, qui ne possède pas de centre de symétrie. Une symétrie centrale étant une isométrie, on en déduit (démonstration analogue à celle de la proposition) pour ces coniques l'existence d'un second couple foyer-directrice $(F', D')$, symétrique du premier par rapport au point $O$ (ou par rapport à l'axe $Oy$).

On est ensuite amené à séparer les cas $e < 1$ et $e > 1$.

— Si $e < 1$ (cas de l'ellipse), l'axe $Oy$ coupe la conique en deux points $B$ et $B'$, d'ordonnées $\pm a\sqrt{1 - e^2}$. On pose $b = a\sqrt{1 - e^2}$, de sorte que $0 < b < a$. L'équation de l'ellipse s'écrit alors :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le foyer $F$ a pour coordonnées $(c, 0)$, où on a posé $c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ de sorte que $a^2 = b^2 + c^2$, et la directrice $D$ pour équation $x = a^2/c$. Le foyer $F'$ a pour coordonnées $(-c, 0)$ et la directrice associée $D'$ pour équation $x = -a^2/c$. Les paramètres $a$, $b$, $c$ représentent respectivement la moitié de la longueur $AA'$ du

grand axe, la moitié de la longueur $BB'$ du petit axe et la demi-distance focale (distance $FF'$ entre les deux foyers).
L'ellipse est une courbe bornée : elle est tout entière contenue dans le rectangle de sommets de coordonnées $(\pm a, \pm b)$ et est en particulier comprise entre ses deux directrices.

— Si $e > 1$ (cas de l'hyperbole), l'axe $Oy$ ne coupe pas la conique. On pose $b = a\sqrt{e^2-1}$. L'équation de l'hyperbole s'écrit alors :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
On pose $c = ae = \sqrt{a^2+b^2}$, de sorte que $c^2 = a^2 + b^2$. Le foyer $F$ (resp. $F'$) a alors pour coordonnées $(c, 0)$ (resp. $(-c, 0)$) et la directrice associée $D$ (resp. $D'$) pour équation $x = a^2/c$ (resp. $x = -a^2/c$). L'hyperbole possède deux branches, situées respectivement dans les demi-plans définis par les inéquations $x \geq a$ et $x \leq -a$. Ses directrices sont situées dans la bande séparant ces deux demi-plans.

Une parabole ou une ellipse sépare le plan en deux régions, définies par les inégalités $MF > eMH$ et $MF < eMH$. Une hyperbole sépare le plan en trois régions, dont deux correspondent à l'inégalité $MF < eMH$ et une (celle située entre les deux branches) à l'inégalité $MF > eMH$.

**Remarque 1.1** *On peut considérer le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, de centre $O$ et de rayon $a$, comme un cas limite d'ellipse, pour lequel $e = 0$, $b = a$, $c = 0$, les directrices étant repoussées à l'infini et les deux foyers confondus. Il n'est néanmoins pas possible de donner une définition du cercle par foyer et directrice dans le cadre du plan affine euclidien.*

## Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

L'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ admet comme asymptotes les droites d'équations $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Son équation s'écrit encore
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$
soit, en posant $X = \frac{x}{a} - \dfrac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ :
$$XY = 1.$$
Mais les relations
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
et ainsi
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

montrent que $X$ et $Y$ sont les coordonnées dans le repère (non orthonormé)

$$\mathcal{R}' = (O, \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}, \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j})$$

du point de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$. L'équation $XY = 1$ est donc celle de l'hyperbole dans ce repère $\mathcal{R}'$ porté par les asymptotes.

**Proposition 1.2** *Pour toute hyperbole $\mathcal{H}$, il existe un repère cartésien porté par les asymptotes de $\mathcal{H}$ dans lequel l'équation de $\mathcal{H}$ est $XY = 1$.*

Un tel repère n'est en général pas orthogonal. Il l'est si et seulement si l'hyperbole est équilatère.

**Définition 1.2** *Une hyperbole est dite* **équilatère** *si ses asymptotes sont perpendiculaires.*

**Proposition 1.3** *Une hyperbole est équilatère si et seulement si son excentricité est $\sqrt{2}$.*

**Preuve.** Les asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal admettent comme vecteurs directeurs les vecteurs $(a, -b)$ et $(a, b)$. Ces vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $a^2 = b^2$, ou encore $c^2 = 2a^2$, puisque la demi-distance focale $c$ vérifie $c^2 = a^2 + b^2$. Mais l'excentricité $e$ est égale à $c/a$. □

### 1.3.2 Définition bifocale des coniques à centre

L'existence de deux couples foyer-directrice pour les coniques à centre permet d'en obtenir une autre caractérisation. Si on appelle en effet $F$ et $F'$ les foyers, $D$ et $D'$ les directrices correspondantes, $H$ et $H'$ les projetés d'un point $M$ de la conique sur $D$ et $D'$, on a les relations $MF = eMH$, $MF' = eMH'$.

**Cas de l'ellipse.** L'ellipse est entièrement incluse dans la bande verticale délimitée par ses deux directrices ; il en résulte que tout point $M$ de l'ellipse appartient au segment $HH'$, d'où

$$MF + MF' = e(MH + MH') = eHH' = e2\frac{a}{e} = 2a.$$

L'ellipse est donc incluse dans l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $MF + MF = 2a$.

Réciproquement, si un point $M$ du plan de coordonnées $(x, y)$ vérifie $MF + MF' = 2a$, on déduit de la relation

$$(MF - MF')(MF + MF') = MF^2 - (MF')^2 = [(x-c)^2 + y^2] - [(x+c)^2 + y^2] = -4cx$$

que $MF - MF' = -2ex$, puis que $e = c/a$, d'où $MF = a - ex$, et $MF^2 = (x-c)^2 + y^2 = (a-ex)^2$, soit $x^2(1-e^2) + y^2 = b^2$ puisque $ea = c$ et $a^2 - b^2 = c^2$, ou encore, en divisant par $b^2$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ce qui montre que l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est inclus dans l'ellipse. L'ellipse est donc égale à cet ensemble.

**Cas de l'hyperbole.** L'hyperbole se compose au contraire de deux branches extérieures à la bande verticale délimitée par ses deux directrices. Il en résulte que pour tout point $M$ de l'hyperbole, on a

$$|MF - MF'| = e|MH - MH'| = 2a.$$

L'une des branches de l'hyperbole est donc incluse dans l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $MF - MF' = 2a$ et l'autre dans l'ensemble des points $M$ vérifiant $MF' - MF = 2a$. Un calcul identique à celui opéré dans le cas de l'ellipse permet ici encore de vérifier que l'hyperbole est exactement l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$.

En résumé :

**Proposition 1.4** *Soient $F$ et $F'$ deux points distincts du plan et $c = FF'/2$ la demi-distance entre ces deux points.*

1. *Pour tout réel $a > c$, l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est l'ellipse de foyers $F$ et $F'$ et de grand axe $2a$.*
2. *Pour tout réel positif $a < c$, l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers $F$ et $F'$ et de grand axe $2a$.*

Le cercle peut apparaÃ®tre ici encore comme un cas particulier d'ellipse pour laquelle les deux foyers seraient confondus.

**Application : construction de l'ellipse par le procédé dit du jardinier.** Pour tracer une ellipse de foyers $F$ et $F'$ et de longueur de grand axe $2a > FF'$ donnés, il suffit de fixer deux piquets en $F$ et $F'$ et d'y attacher les extrémités d'une ficelle non élastique de longueur $2a$. Le trajet que l'on parcourt en tournant autour de $F$ et $F'$ tout en maintenant la ficelle tendue est l'ellipse cherchée.

# Chapitre 2

# Courbes paramétrées

## 2.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques

**Définition 2.1 (Arc)** *On appelle* **arc paramétré** *(ou courbe paramétrée), tout couple* $(I, f)$*, avec* $I$ *intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f$ *application de* $I$ *dans* $\mathbb{R}^k$ [1]*.*

*L'arc est de classe* $C^N$ *si* $f$ *est de classe* $C^N$ *sur* $I$*.*

Ainsi dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien canonique, euclidien et orienté, pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f$ une fonction

$$f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.1}$$

la courbe associée :

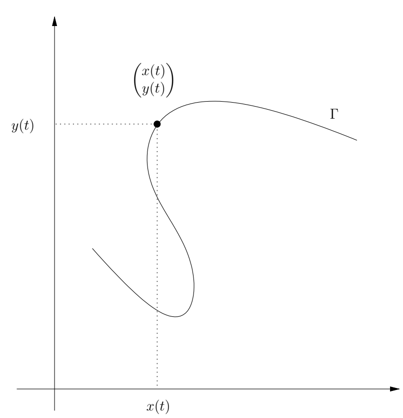


FIGURE 2.1 – Courbe planaire paramétrée.

*Par la suite nous n'étudierons que les arcs de classe* $C^0$ *au moins* ; on dira que l'arc est continu. Quelques autres notions sur les courbes.

1. On peut remplacer $\mathbb{R}^k$ par un espace vectoriel euclidien.

**Définition 2.2**

- *Une courbe paramétrée continue* $F : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *est* $C^1$ **par morceaux** *s'il existe une subdivision* $a = a_0 < \ldots < a_m = b$ *telle que la restriction*[2] *de* $F$ *à* $[a_{k-1}, a_k]$ *est de classe* $C^1$ *pour tout* $k = 1, \ldots, m$.
- *Une courbe* $\Gamma$ *de paramétrage* $(I = [a, b], F)$ *est* **fermée** *si* $F(a) = F(b)$, *et qu'elle est* **simple** *si sa restriction à* $]a, b[$ *est injective :* $\forall t_1 \neq t_2, \quad F(t_1) \neq F(t_2)$.

**Définition 2.3 (Support)** *Soit* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ *un repère de* $\mathbb{R}^k$. *On appelle* **support de l'arc paramétré** *l'ensemble*

$$\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^k,\ \exists t \in I,\ \overrightarrow{OM} = f(t)\}.$$

*On dit que* $(I, f)$ *est un* **paramétrage** *de classe* $C^N$ *de* $\Gamma$.

Un point $M$ d'un arc sera mutiple si le cardinal de $\{t \in I,\ \overrightarrow{OM} = f(t)\}$ est strictement plus grand que 1. L'ordre d'un point sera le cardinal de cet ensemble.

Attention le support d'un arc peut être compliqué.

**Théorème 2.1 (Courbe de Peano)** *Il existe un arc paramétré continu* $([0, 1], f)$ *du plan de support* $[0, 1] \times [0, 1]$.

Cet arc n'aura pas de longueur, mais aura une aire ; étonnant non ?

### 2.1.1 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ → courbes

Depuis le lycée, en L1 et L2, vous avez étudié et tracé la courbe représentative $y = f(x)$ d'une fonction $f$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En fait c'est la courbe paramétrée du plan suivante :

$$t \in I \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = f(t) = f(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, toutes ces courbes sont le cas particulier où le paramètre est l'abscisse (et vice-versa) : $x = t$ ! Pour une telle courbe, toute droite perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe la courbe au plus une fois (c'est la définition d'une fonction...).

### 2.1.2 Effet d'un changement de paramétrage

**Définition 2.4** *Soit* $\phi : I \to J$, $I$ *et* $J$ *étant deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *Soit* $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *On dit que* $\phi$ *est un* $C^N$-difféomorphisme *de* $I$ *sur* $J$ *si et seulement si* $\phi \in C^N(I)$, $\phi$ *est bijective et* $\phi^{-1} \in C^N(J)$.

*Deux arcs paramétrés* $(I, f)$ *et* $(J, g)$ *de classe* $C^N$ *sont* $C^N$**-équivalents** *si et seulement s'il existe un* $C^N$*-difféomorphisme* $\phi$ *de* $I$ *sur* $J$ *tel que* $f = g \circ \phi$.

**Théorème 2.2** *La relation définie ainsi entre deux arcs est une relation d'équivalence, dont les classe d'équivalence sont appelées* **arcs géométriques**.

2. ou du moins son prolongement

**Définition 2.5** *On appelle* **paramétrage admissible** *d'un arc géométrique $\mathcal{C}$, tout élément $(I, f)$ de la classe d'équivalence $\mathcal{C}$, et* **notion géométrique** *tout notion indépendante du paramétrage admissible.*

La notion de support, de point multiple ou d'ordre d'un point multiple est une notion géométrique. Mais pas celle d'orientation.

En effet si $\phi$ est un $C^N$-difféomorphisme de $I$ sur $J$, avec $N \geq 1$, soit : $\phi \in C^N(I)$, $\phi(I) = J$ et $\forall t \in I,\ \phi'(t) \neq 0$, alors $\phi$ est strictement monotone et deux cas sont donc possibles :

— ou bien : $\forall t \in I,\ \phi'(t) > 0$ et $\phi$ est strictement croissante sur $I$,

— ou bien : $\forall t \in I,\ \phi'(t) < 0$ et $\phi$ est strictement décroissante sur $I$.

Soit deux arcs paramétrés admissibles d'un arc géométrique $\mathcal{C}$ :

$$\Gamma = \{F(t),\ t \in I\} = \{F(\phi(u)),\ u \in J\} = \{G(u),\ u \in J\}.$$

Deux cas sont alors possibles :

— ou bien pour tout $u \in J$, $\phi'(u) > 0$. Dans ce cas on dit que le paramétrage $(G, J)$ est positivement admissible et que les paramétrages $(F, I)$ et $(G, J)$ orientent $\Gamma$ dans le même sens.

— Ou bien pour tout $u \in J$, $\phi'(u) < 0$. Dans ce cas on dit que le paramétrage $(G, J)$ est négativement admissible et que les paramétrages $(F, I)$ et $(G, J)$ orientent $\Gamma$ dans le sens contraire.

Donc les paramétrages admissibles vont être réparti en deux classes $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$, appelées **arcs géométriques orientés**.

**Exemple 2.1** Soient $I = [0, 2\pi]$ et $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Alors $(F, I)$ est un paramétrage de classe $C^\infty$ de $\Gamma = \{(x, y),\ x^2 + y^2 = 1\}$, cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1. On considère les deux paramétrages admissibles suivants :

1. $J = [0, \pi]$ et $\phi : J \to I$, avec $\phi(u) = 2u$ : paramétrage positivement admissible (la vitesse est multipliée par deux) ;
2. $K = [-2\pi, 0]$ et $\psi : K \to I$, avec $\psi(v) = -v$ : paramétrage négativement admissible (le sens de parcours est inversé).

## 2.2 Étude locale en un point

**Définition 2.6** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de classe $C^N$, $N \geq 1$. On appelle* **sous-espaces fondamentaux** *de l'arc en $M$ de paramètre $t$, les sous-espaces vectoriels*

$$E_i = \mathit{Vect}\ (f'(t), \ldots, f^{(i)}(t))$$

*pour $i = 1, \ldots, N$.*

On peut vérifier directement

**Proposition 2.1** *Les sous-espaces fondamentaux d'un arc paramétré sont indépendants du paramétrage $C^N$-équivalent : c'est une notion géométrique attachée à l'arc géométrique défini par l'arc paramétré.*

Vu leur définition, les sous-espaces fondamentaux vérifient les relations d'inclusion :

$$\{0\} \subset E_1(t) \subset E_2(t) \subset ... \subset E_i(t) \subset E_{i+1}(t) \subset ... \subset E_N(t),$$

($N$ classe de l'arc), mais il se peut qu'il y ait des égalités. Aussi considérera-t-on les entiers associés aux inclusions strictes.

**Définition 2.7** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (l, f)$, de classe $C^N$, $N \geq 1$, et $\mathcal{C}$ l'arc géométrique qu'il définit. On appelle q-ième entier caractéristique de $\Gamma$, (ou de $\mathcal{C}$), en m de paramètre t, le plus petit entier i, s'il existe, tel que dim $(E_i(t)) = q$, et dans ce cas, $E_i(t)$ est le q-ième sous-espace caractéristique.*

Donc le premier entier caractéristique $p_i$ est tel que $f^{(p_i)}(t) \neq 0$ et $f^{(p)}(t) = 0$ pour $p < p_i$ ; le deuxième entier caractéristique, $p_2$, est tel que $\{f^{(p_1)}(t), f^{(p_2)}(t)\}$ libre, et que pour $p_1 \leq p < p_2$, $f^{(p)}(t)$ est colinéaire à $f^{(p_1)}(t)$. Nous allons voir que cette suite d'entiers,"caractérise" de plus en plus de notions attachées à l'arc. Et d'abord :

**Théorème 2.3** *Soit un arc géométrique $\mathcal{C}$ de classe $C^N$, $N \geq 1$, représenté par l'arc paramétré $(l, f)$. S'il existe un sous-intervalle $J$ de $I$ tel que, pour tout $t$ de $J$, on ait $\{f'(t), f"(t), \ldots, f^{(i)}(t)\}$ libre et $\{f'(t), f''(t), \ldots, f^{(i)}(t), f^{(i+1)}(t)\}$ famille liée, le sous-arc $\mathcal{D}$ associé à $(J, f\big|_J)$ est dans un sous-espace affine de dimension $i$.*

Bien que l'on travaille sur des arcs paramétrés, il est "facile" de voir que la notion est géométrique.

**Corollaire 2.1** *Si un arc paramétré $(l, f)$, de classe $C^2$ au moins, est tel que sur $l$, $f'(t) \neq 0$ et $f^{(2)}(t)$ est colinéaire à $f'(t)$, son support est un intervalle d'une droite.*

*Si un arc paramétré $(l, f)$, de classe $C^3$ au moins, est tel que sur $l$, la famille $\{f'(t), f"(t)\}$ est libre avec $f^{(3)}(t) \in Vect(f'(t), f"(t))$, l'arc est plan.*

### 2.2.1 Tangente et plan osculateur

Revenons à l'allure locale d'une courbe.

**Définition 2.8** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de support $\Gamma$ et $M_0$ le point de $\Gamma$ de paramètre $t_0$. On dira que $\Gamma$ admet en $M_0$ une tangente $D_0$ si et seulement si la droite $D(t_0, t)$ passant par $M_0$, de direction Vect $(\overrightarrow{M_0M(t)})$ admet une limite lorsque $t$ tend vers $t_0$.*

On admet ici la notion de limite d'un sous-espace vectoriel. Ceci suppose donc qu'il existe un voisinage $V(t_0)$ tel que pour $t$ dans $I \cap (V(t_0) \setminus \{t_0\})$ on ait $M(t) \neq M_0$, sinon la droite affine $D(t_0, t)$ n'existerait pas ; puis qu'il existe un vecteur directeur de cette droite, donc du type $\lambda(t)\overrightarrow{M_0M(t)}$ (avec $\lambda(t)$ réel non nul) ayant une limite $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ si $t$ tend vers $t_0$. Le point $M_0$ étant constant, la limite de $D(t_0, t)$ existera, sera indépendante du choix de $\lambda(t)$ tel que

$$\lim_{t\to t_0,\ t\neq t_0} \lambda(t)\overrightarrow{M_0M(t)}$$

existe. Ce sera la droite affine $D_0$ passant par $m_0$, de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

**Théorème 2.4** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de support $\Gamma$ de classe $C^N$, $N \geq 1$. Si en $M_0(t_0)$, le premier entier caractéristique, $p_1$, existe, la tangente en $M_0$ existe et c'est la droite affine passant par $M_0$, de direction $E_1(t_0)$, premier sous-espace caractéristique.*

**Preuve.** La preuve est basée sur la formule de Taylor-Young appliquée à $f$ en $t_0$ à l'ordre $p_1$ :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = f(t) - f(t_0) = \frac{(t-t_0)^{p_1}}{p_1!}(f^{(p_1)}(t_0) + \varepsilon(t)).$$

En posant $\lambda(t) = \dfrac{p_1!}{(t-t_0)^{p_1}}$, $\lambda(t)\overrightarrow{M_0M(t)}$ a une limite quand $t$ tend vers $t_0$. □

**Remarque 2.1** *Dans le théorème on énonce une condition suffisante d'existence d'une tangente, mais elle n'est pas nécessaire. Par ailleurs un arc $C^\infty$ peut avoir des points "anguleux".*

**Définition 2.9** *On dit que $f(t_0)$* un point régulier de $\Gamma$ *si $f'(t_0) \neq 0$ et* un point stationnaire de $\Gamma$ *si $f'(t_0) = 0$.*

**Corollaire 2.2** *En tout point régulier de $\Gamma$ la tangente est dirigée par $f'(t_0)$. C'est le vecteur vitesse à l'instant $t_0$.*

Si la courbe est plane ($k = 2$), on s'arrête là. Sinon poursuivons maintenant l'étude locale des arcs paramétrés.

**Définition 2.10 (Plan tangent, plan osculateur)** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de support $\Gamma$ et $M_0(t_0)$ le point de $\Gamma$ ayant une tangente $D_0$. On appelle*

— **plan tangent** *à $\Gamma$ en $M_0$ tout plan affine contenant $D_0$.*
— **plan osculateur à l'arc en** *$M_0$, la limite, si elle existe, d'un plan tangent à $\Gamma$ en $M_0$, contenant $M(t)$ pour $t$ voisin de $t_0$, lorsque $t$ tend vers $t_0$.*

Ceci suppose donc l'existence d'un voisinage $V(t_0)$ tel que pour $t$ dans $I \cap (V(t_0) \setminus \{t_0\})$ le vecteur $M_0M(t)$ ne soit pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de la tangente.

**Théorème 2.5** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de support $\Gamma$ et de classe $C^N$. Si en $M_0$ de $\Gamma$, de paramètre $t_0$, les deux premiers entiers caractéristiques existent, le plan osculateur en $M_0$ existe. C'est le plan affine passant par $M_0$, de direction $E_2$, deuxième espace caractéristique.*

**Remarque 2.2** *Là encore, on a une condition suffisante d'existence du plan osculateur, mais pas nécessaire.*

*Paramétrisations du plan osculateur et de la tangente.* Soit $\Gamma = (I, f)$ un arc de classe $C^N$ de $\mathbb{R}^k$ et $\mathcal{R} = (0; e_1, \ldots, e_k)$ un repère. Si $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i(t).e_i$, le point $M(t)$ du support $\Gamma$ a pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ les $f_i(t)$.

Si le premier entier caractéristique $p_1$ existe, la tangente est paramétrée par : le point $P$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_k)$ est sur la tangente en $M(t)$ à $\Gamma$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall i = 1, \ldots, k, \quad x_i = f_i(t) + \lambda f_i^{(p_1)}(t).$$

De mÃªme, si le deuxième entier caractéristique, $p_2$, existe, le point $P$ sera dans le plan osculateur en $M(t)$ à $\Gamma$ si et seulement s'il existe $\lambda$ et $\mu$ réels tels que

$$\forall i = 1, \ldots, k, \quad x_i = f_i(t) + \lambda f_i^{(p_1)}(t) + \mu f_i^{(p_2)}(t).$$

Si $k = 3$, la recherche s'arrÃªte à celle du plan osculateur qui est un hyperplan, et qui a donc une équation : le point P de coordonnées $(x, y, z)$ sera dans le plan osculateur si et seulement si on a :

$$\begin{vmatrix} x - f_1(t) & y - f_2(t) & z - f_3(t) \\ f_1^{(p_1)}(t) & f_2^{(p_1)}(t) & f_3^{(p_1)}(t) \\ f_1^{(p_2)}(t) & f_2^{(p_2)}(t) & f_3^{(p_2)}(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Si la dimension $k$ est supérieure ou égale à 4, on continue. On parlerait de 3-espace tangent en $M_0$ à $\Gamma$ ayant un plan osculateur $P_0$, pour tout sous-espace affine de dimension 3, contenant $P_0$, et de 3-espace osculateur en $M_0$ à $\Gamma$, si le 3-espace affine tangent en $M_0$ à $\Gamma$ et passant par $M(t)$, pour $t$ voisin de $t_0$, existe, et si, en le notant $B(t)$, on a $\lim B(t) = B_0$ existe, $B_0$ étant alors ce 3-espace osculateur.

On établirait également que, si le troisième entier caractéristique $p_3$ existe en $M_0(t_0)$, alors l'arc admet un 3-espace osculateur $B_0$, sous-espace affine de direction $E_3$ contenant $M_0$. Et on continue ainsi, avec, si $p_\ell$, $\ell$-ième entier caractéristique existe, l'existence d'un $\ell$-espace osculateur à $\Gamma$ en $M_0$, espace affine passant par $M_0$, de direction $E_\ell$, $\ell$-ième sous-espace caractéristique.

Intuitivement, la tangente en $M_0$ est la sécante (droite qui passe par $M_0$) qui "colle" le plus à la courbe ; le plan osculateur est le plan tangent qui "colle" le plus à la courbe et ainsi de suite.

**Définition 2.11** *Soit un arc paramétré $(I, f)$ de support $\Gamma$ et de classe $C^N$. On dit que $M(t)$ est $p$-**régulier** si et seulement si les $p$ premiers entiers caractéristiques sont $1, 2, \ldots, p$ (ceci suppose $N \geq p$). En particulier un point est **birégulier** si $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$.*

### 2.2.2 Tangentes à une conique

On reviendra bien plus en détails sur la notion de tangente à une courbe dans le chapitre 2, section 2.2.1. Pour l'instant on va admettre que la courbe de représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$ admet, en tout point de paramètre $t$ où $\overrightarrow{M}'(t)$ ne s'annule pas, une tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{M}'(t)$.

**Tangentes à la parabole.** Soit $M = M(t)$ une représentation paramétrique de la parabole et $H = H(t)$ le projeté orthogonal de $M$ sur la directrice $D$. En dérivant par rapport à $t$ la relation $FM(t)^2 - H(t)M(t)^2 = 0$, on obtient

$$2\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{M'(t)} - 2\overrightarrow{HM} \cdot (\overrightarrow{M'(t)} - \overrightarrow{H'(t)}) = 0.$$

Or $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{H'(t)}$ puisque le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $D$ et le vecteur $H$ appartient à la direction de $D$. Ainsi

$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{M'(t)} = 0.$$

La tangente en $M$ à la parabole est donc orthogonale à la droite $(FH)$, i.e. est la hauteur issue de $M$ dans le triangle $MFH$. Ce triangle étant isocèle en $M$, cette tangente est aussi la médiatrice de $[HF]$ et la bissectrice intérieure de l'angle en $M$ de ce triangle.

**Proposition 2.2** *La tangente en un point $M$ à la parabole de foyer $F$ et de directrice $D$ est la médiatrice de $[HF]$, où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $D$. C'est aussi la bissectrice intérieure de l'angle en $M$ dans le triangle isocèle $HMF$.*

Il en résulte que tout rayon lumineux parallèle à l'axe d'un miroir parabolique se réfléchit en un rayon passant par le foyer : un miroir parabolique concentre donc la lumière au foyer. Cette propriété est utilisée dans certains télescopes et dans les fours solaires.

**Tangentes aux coniques à centre.** Soit $\Gamma$ l'ellipse de foyers $F$ et $F'$ et de demi-grand axe $a$. En dérivant la relation $FM + F'M = 2a$, on obtient

$$\left( \frac{1}{\|\overrightarrow{FM}\|}\overrightarrow{FM} + \frac{1}{\|\overrightarrow{F'M}\|}\overrightarrow{F'M} \right) \cdot \overrightarrow{M}' = 0.$$

Mais le vecteur

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{FM}\|}\overrightarrow{FM} + \frac{1}{\|\overrightarrow{F'M}\|}\overrightarrow{F'M}$$

est somme de deux vecteurs directeurs unitaires des demi-droites $[MF)$ et $[MF')$ ; c'est donc un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de l'angle en $M$ du triangle $MFF'$. Il en résulte que la tangente en $M$ à l'ellipse est orthogonale à cette bissectrice intérieure : c'est donc la bissectrice extérieure de l'angle en $M$ de ce triangle.

Dans le cas de l'hyperbole, on montre de même, en dérivant la relation $FM - F'M = \pm 2a$ (chaque choix de signe correspondant à une branche de l'hyperbole), que la tangente en $M$ est la bissectrice intérieure de l'angle en $M$ du triangle $MFF'$.

## 2.3 Position de l'arc par rapport à un hyperplan

On rappelle qu'un hyperplan vectoriel est le noyau Ker $\phi$ d'une application linéaire non nulle $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (automatiquement continue, car la dimension est finie). Un hyperplan affine $H$ sera donné un point $M_0$ et $\phi$ tels que

$$M \in H \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \text{Ker } \phi \Longleftrightarrow \phi(\overrightarrow{M_0M}) = 0.$$

Donc comme $\phi$ est linéaire, une équation de $H$ sera obtenue par

$$\phi(\overrightarrow{M_0M}) = \phi(\overrightarrow{OM}) - \phi(\overrightarrow{OM_0}) = 0 \Longleftrightarrow \phi(\overrightarrow{OM}) = \phi(\overrightarrow{OM_0}).$$

Comme $\phi$ est continue, on obtient une partition de $\mathbb{R}^k$ en trois :

$$H, \quad R_+^* = \{M,\ \phi(\overrightarrow{OM}) > \phi(\overrightarrow{OM_0}\}, \quad R_-^* = \{M,\ \phi(\overrightarrow{OM}) < \phi(\overrightarrow{OM_0}\}.$$

Si $\Gamma = (I, f)$ est un arc paramétré de classe $C^N$ , et si $M_0(t_0) \in H$, nous voulons savoir dans quelle partie de cette partition se trouve $M(t)$, pour $t$ voisin (et distinct) de $t_0$.

**Théorème 2.6** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe $C^N$, $M_0(t_0)$ un point de $\Gamma$ et $H$ un hyperplan affine d'équation $u(M) = 0$, de direction $F = Ker\ \phi$ ($\phi$ forme linéaire).*

*Si $p_i$, le plus petit entier caractéristique tel que $E_{p_i} \not\subset F$ existe, il existe un voisinage $V(t_0)$ dans $I$ tel que :*

1. *Si $p_i$ est pair, $M(t)$ reste dans le mÃªme demi-espace ouvert ($R_+^*$ ou $R_-^*$) pour $t \in V(t_0) \setminus \{t_0\}$ ;*
2. *Si $p_i$ est impair, $M(t)$ est dans l'un des demi-espaces ouverts pour $t \in V(t_0) \setminus \{t_0\}$, $t > t_0$ et dans l'autre pour $t \in V(t_0) \setminus \{t_0\}$, $t < t_0$. Dans ce cas on dit que l'arc traverse l'hyperplan $H$ en $M_0$.*

*On dit que l'arc a un contact d'ordre $p_i$ avec l'hyperplan $H$, et ce, que $p_i$ soit pair ou impair.*

Pour comprendre un peu mieux la signification de ce théorème, regardons en détail un cas particulier où $k = 2$ et une courbe sous forme d'équation cartésienne $f : x \in I \longmapsto (x, y(x))$ où $y : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $y$ admet un développement limité en $a$ de la forme

$$y(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - a) + \lambda_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$$

avec $p \geq 2$, $\lambda_p \neq 0$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} y(x) = \lambda_0$. Donc $y$ est définie et continue en $a$ ou prolongeable par continuité en $a$ en posant $y(a) = \lambda_0$. On suppose désormais $a \in I$ et $y(a) = \lambda_0$. On note $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan et $A = (a, y(a))$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $a$.

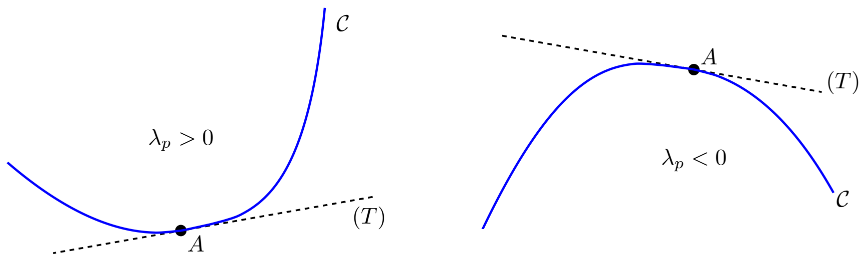


FIGURE 2.2 – $p$ pair : $\Gamma$ ne traverse pas $(T)$

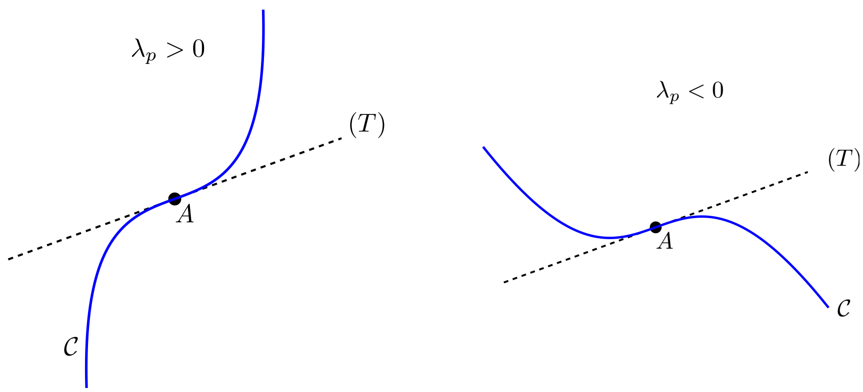


FIGURE 2.3 – $p$ impair : $\Gamma$ traverse $(T)$

Au voisinage de $a$,

$$\frac{y(x)-y(a)}{x-a} = \lambda_1 + \lambda_p(x-a)^{p-1} + o((x-a)^{p-1}) = \lambda_1 + o(1).$$

Donc $y$ est dérivable en $a$ avec $y'(a) = \lambda_1$. La tangente $(T)$ en $A$ à $\Gamma$ a pour équation $z = y(a)+y'(a)(x-a)$, soit $z = \lambda_0+\lambda_1(x-a)$. Ici l'hyperplan $H$ est la droite d'équation : $y - \lambda_0 - \lambda_1(x-a) = 0$, la forme linéaire $\phi$ étant $\phi(x,y) = y - \lambda_1 x$ et $F = \text{Ker } \phi = \{(x,y),\ y = \lambda_1 x\}$. De plus on a

$$E_1(a) = \{\mu(1,\lambda_1),\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

qui est de dimension 1. Donc le premier entier caractéristique est $p_1 = 1$. Les points sont réguliers.

On rappelle que l'existence d'un développement limité ne donne pas d'information sur la régularité de la fonction $y$. Autrement dit, on ne peut rien déduire sur les dérivées successives de $y$. Donc le théorème suppose que $y$ est régulière, et le développement limité montre alors que

$$\forall i = 2,\dots,p-1,\ y^{(i)}(a) = 0, \qquad y^{(p)}(a) = \lambda_p.$$

Donc

$$E_p(a) = \{\mu(1,\lambda_1)+\nu(0,\lambda_p),\ (\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit le second entier caractéristique est $p_2 = p$ et $F \subsetneq E_p(a)$. La conclusion du théorème s'applique.

Plus directement, comme $\lambda_p \neq 0$,

$$y(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a)) \underset{a}{\sim} \lambda_p(x-a)^p.$$

Ainsi au voisinage de $a$, $y(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a))$ est du signe de $\lambda_p(x-a)^p$ ce qui donne la position de $\Gamma$ par rapport à $(T)$ au voisinage de $a^+$ et $a^-$.
Deux cas de figure se présentent :

1. Si $p$ est pair : $\Gamma$ reste du même côté de $(T)$.
2. Si $p$ est impair : $\Gamma$ traverse $(T)$ et on dit que $A$ est un point d'inflexion de $\Gamma$.

**Étude locale pour une courbe paramétrée plane**

Soient $(I, f)$ un arc paramétré de classe $C^N$ $(N \geq 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ $(k = 2)$, $\Gamma$ son support et $t_0 \in I$ où $f$ est définie par l'équation (2.1). On considère le point $M_0$ de paramètre $t_0$. On suppose qu'en $M_0$ les deux entiers caractéristiques $p_1 = p$ et $p_2 = q$ existent. Alors $\big(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On va généraliser le cas particulier traité précédemment.

Une sécante $D$ passant par $M_0$, de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ distincte de la tangente dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ est donc telle que $E_p \not\subset \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{v}$, directeur de l'hyperplan $D$, donc l'arc traverse une sécante non tangente si et seulement si $p$ est impair.

Quant à la tangente, on a $E_p \subset \mathbb{R} \cdot f^{(p)}(t_0)$, mais $E_q$, de dimension 2, n'est pas contenu dans $\mathbb{R} \cdot f^{(p)}(t_0)$, donc l'arc traverse localement sa tangente si et seulement si $q$ est impair.

En dimension 2, on peut faire un peu mieux suivant les parités respectives de $p$ et $q$, et définir différentes allures locales et les termes de : *point d'inflexion géométrique, point de rebroussement de première espèce et point de rebroussement de deuxième espèce.*

Par ailleurs dans la base $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)) = \mathcal{B}(t_0)$, on montre (Taylor-Young à l'ordre $q$) que les coordonnées $(\xi(t), \eta(t))$ de $M(t)$ vérifient :

$$\xi(t) \approx \frac{(t-t_0)^p}{p!}, \quad \eta(t) \approx \frac{(t-t_0)^q}{q!}.$$

Ainsi :

**Proposition 2.3** *On a les quatre cas suivants (on note $M_0 = f(t_0)$) :*

— *si $p$ est impair et $q$ est pair, alors $M_0$ est* un point ordinaire de $\Gamma$ *et $\Gamma$ ne traverse pas sa tangente, mais traverse toute autre droite passant par $M_0$.*

— *Si $p$ est impair et $q$ est impair, alors $M_0$ est* un point d'inflexion de $\Gamma$ *et $\Gamma$ traverse toute droite passant par $M_0$ y compris sa tangente en $M_0$.*

— *Si $p$ est pair et $q$ est impair, alors $M_0$ est* un point de rebroussement de première espèce de $\Gamma$ *et $\Gamma$ traverse sa tangente, mais ne traverse aucune autre droite passant par $M_0$.*

— *si $p$ est pair et $q$ est pair, alors $M_0$ est* un point de reroussement de deuxième espèce de $\Gamma$ *et* $\Gamma$ *ne traverse aucune droite passant par* $M_0$.

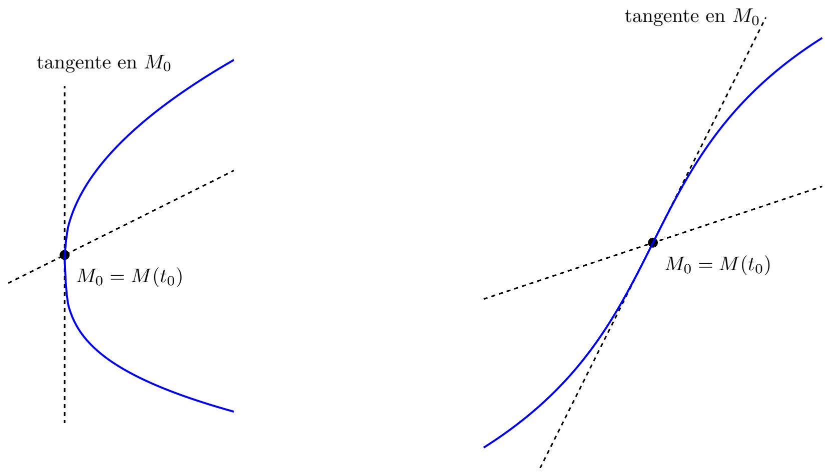


FIGURE 2.4 – Points ordinaires et d'inflexion ($p$ impair)

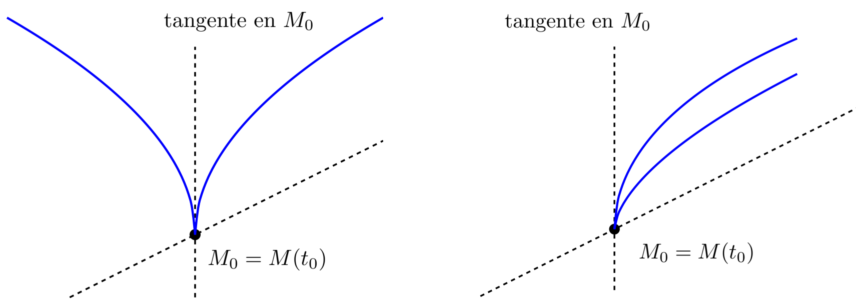


FIGURE 2.5 – Points de rebroussement de première et deuxième espèce ($p$ pair)

Suivant la définition 2.11, un point birégulier, pour lequel la famille $(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre $(p = 1, q = 2)$, est donc ordinaire.

**Pour une courbe paramétrée en dimension $k = 3$**

On reprend le même cadre : soit donc $M_0(t_0)$ un point de l'arc $\Gamma = (I, f)$, arc de classe $C^N$ tel qu'en $t_0$ les trois premiers entiers caractéristiques $p$, $q$ et $r$ existent, d'où une base $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0), f^{(r)}(t_0)) = \mathcal{B}(t_0)$, de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On sait que $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente en $M_0$ à $\Gamma$ et Vect $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ le plan osculateur.

Comme en dimension 2, les coordonnées $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ de $M(t)$ vérifient :

$$\xi(t) \approx \frac{(t-t_0)^p}{p!}, \quad \eta(t) \approx \frac{(t-t_0)^q}{q!}, \quad \zeta(t) \approx \frac{(t-t_0)^r}{r!}.$$

Donc suivant la parité de $p$, $q$ et $r$, on a une description de l'allure locale de l'arc : il y a donc huit cas de figures (essayez de tous les trouver et de les matérialiser).

## 2.4 Branches infinies

**Définition 2.12** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de $\mathbb{R}^k$ et $t_0$ une borne de $I$. On dira que l'arc $\Gamma$ admet une branche infinie, lorsque $t$ tend vers $t_0$ si*

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty.$$

Il est facile de vérifier que la notion est géométrique, c' est-à -dire indépendante du paramétrage admissible choisi. D'autre part $t_0$ peut Ãªtre $+\infty$ ou $-\infty$. La notion peut être étendue pour des limites à gauche ou à droite.

**Théorème 2.7 (Direction asymptotique)** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe $C^0$ au moins, $t_0$ une borne de $I$ telle que $\Gamma$ admette en $t_0$ une branche infinie. Si pour $A$ fixé dans $\mathbb{R}^k$, la droite affine $D_{A,M(t)}$ engendrée par $A$ et $M(t)$ admet une position limite $\Delta_A$ lorsque $t$ tend vers $t_0$, sa direction $\delta$ est indépendante de $A$ et s'appelle la direction asymptotique de la branche infinie.*

Cela justifie la définition qui suit.

**Définition 2.13** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe $C^0$ au moins, $t_0$ une borne de $I$ telle que $\Gamma$ admette en $t_0$ une branche infinie ayant une direction asymptotique $\delta$. On appelle* **asymptote** *à $\Gamma$ lorsque $t$ tend vers $t_0$, la limite $D$, si elle existe, de la droite affine $D(t)$ de direction $\delta$, passant par $M(t)$, lorsque $t$ tend vers $t_0$ dans $I$.*

Il en résulte que si $B(t)$ est un point de $D(t)$, ayant une limite $B_0$ lorsque $t$ tend vers $t_0$, alors l'asymptote $D$ existe, et c'est la droite passant par $B_0$, de direction $\delta$, direction indépendante de $t$ de $D(t)$.

On peut alors montrer

**Proposition 2.4** *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe $C^0$ au moins, $t_0$ une borne de $I$ telle que $\Gamma$ admette en $t_0$ une branche infinie ayant une direction asymptotique $\delta$. Alors $\Gamma$ admet en $t_0$ une asymptote $D$ si et seulement si, avec $H$ sous- espace affine de direction $F$ telle que $\mathbb{R}^k = F \oplus \delta$, le projeté $C(t)$ de $M(t)$ sur $H$ parallèlement à $\delta$ admet une limite $C_0$. L'asymptote $D$ est alors la droite passant par $C_0$, de direction $\delta$.*

### Cas des courbes planes

Le plan affine est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on note $x$ et $y$ les coordonnées d'un point $M$ du plan.

**Cas d'un arc d'équation cartésienne $y = f(x)$.**

On suppose $f$ définie et continue sur $I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\|OM(x)\|^2 = |x|^2 + |f(x)|^2$$

ne peut tendre vers $+\infty$ que si $x$ tend vers $x_0$ borne de $I$, que si $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$, ou, si $x_0 \in \mathbb{R}$ que si $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

1. Premier cas $x_0$ est dans $\mathbb{R}$. Comme $|f|$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ ne s'annule pas localement et le vecteur
$$V(x) = \frac{x}{f(x)}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$
dirige $D_{O,M(x)}$ et a pour limite $\overrightarrow{j}$, donc $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{j}$ est direction asymptotique.

   Comme l'axe des abscisses est un supplémentaire $H$ de $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{j}$ et que le projeté $C(x)$ de $M(x)$ sur $H$ est le point $(x, 0)$ de limite $(x_0, 0)$, on a une asymptote, suivant que $f(x)$, continue et ne s'annulant pas, donc de signe constant localement, tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

2. Deuxième cas $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$. La fonction $f$ peut ne pas avoir de limite. Mais si $\lim f(x) = a$ existe, on vérifierait que la théorie s'applique et conduit à l'existence d'une asymptote, la droite d'équation $y = a$, la place de l'arc par rapport à l'asymptote dépendant du signe de $f(x) - a$. On peut enfin avoir $\lim f(x) = \pm\infty$. Traitons le cas $+\infty$.

   On peut alors montrer la règle pratique suivante :

   — Si $\lim \dfrac{y(x)}{x} = \pm\infty$, alors on a pour direction asymptotique l'axe des ordonnées, donc $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{j}$. Il n'y a pas d'asymptote et on parle de *branche parabolique* dans ce cas, (car c'est le comportement d'une parabole, d'équation $y = x^2$ par exemple).

   — Si $\lim \dfrac{y(x)}{x} = \ell$ existe dans $\mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \ell x$ est direction asymptotique. De plus

     — Soit $\lim(y - \ell x) = m$, et la droite d'équation $y = \ell x + m$ est asymptote, l'étude du signe de $y - \ell x - m$ donnant la place de la courbe par rapport à l'asymptote.

     — Soit $\lim y - \ell x = \pm\infty$, et on dira que la courbe admet une branche parabolique dans la direction $y = \ell x$.

     — Soit la limite n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on peut avoir n'importe quel comportement.

**Définition 2.14** *On dit qu'un arc plan $\Gamma$ admet une branche parabolique de direction $\delta$, s'il admet une direction asymptotique $\delta$ et si l'intersection d'un hyperplan $H$ de direction supplémentaire de $\delta$, et de la droite $D_M$ de direction $\delta$ passant par $M$ de $\Gamma$ a une limite infinie sur la droite $H$.*

**Cas d'un arc paramétré** $(I, f)$**.**

Supposons par exemple $I = [a, b[$, avec $f(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$ et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ repère du plan, $x$ et $y$ étant des fonctions continues telles que $\lim_{t \to b}(x(t)^2 + y(t)^2) = +\infty$ et que l'une au moins des fonctions $x^2$ ou $y^2$ tend vers $+\infty$. Voici une liste de résultats dont les justifications précises s'inspirent de celles faites précédemment.

Si $\lim x(t) = x_0$ existe dans $\mathbb{R}$, et si $\lim y(t) = \pm\infty$, la droite $D_{x_0}$ d'équation $x = x_0$ est asymptote ; il en est de mÃªme en inversant les rÃ´les de $x$ et $y$.

Enfin, on peut avoir $x$ et $y$ qui ont chacun une limite infinie.

1. Si $\lim \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, il y a direction asymptotique $Oy$ et branche parabolique de direction $Oy$.
2. Si $\lim \dfrac{y(t)}{x(t)} = \ell$ existe dans $\mathbb{R}$, la direction de la droite d'équation $y = \ell x$ est direction asymptotique ; on a alors :
   (a) si $\lim y(t) - \ell x(t) = m$, la droite d'équation $y = \ell x + m$ est asymptote, (et l'étude du signe de $y(t) - \ell x(t) - m$ donne la place par rapport à l'asymptote) ;
   (b) si $\lim y(t) - \ell x(t) = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $y = \ell x$ ;
   (c) mais il se peut que $y(t) - \ell x(t)$ n'ait pas de limite dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
3. Ne pas oublier que $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ peut ne pas voir de limite dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Ne pas oublier enfin, que $x^2 + y^2$ peut tendre vers l'infini sans que $x^2$ et $y^2$ ne le fasse : penser aux spirales.

## 2.5 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Soit un arc paramétré $(I, f)$ de classe $C^N$, $N \geq 1$ de $\mathbb{R}^k$.

1. Vérifier le domaine de définition de $f$, identifier les points de $I$ pouvant poser problème. Attention, cela suppose de vérifier pour $k$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Réduction des intervalles d'étude : on cherchera si les fonctions coordonnées $t \mapsto f_i(t)$ sont périodiques, paires ou impaires.
   Par exemple ($k = 2$) si pour tout $t \in D$, $-t \in D$ et $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, alors $M(-t) = (x(-t), y(-t))$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie par rapport à la droite des ordonnées. On obtient donc toute la courbe en faisant varier $t$ dans $\mathbb{R}_+ \cap D$, puis en complétant par symétrie.
3. Calculer les dérivées successives de $f$ (si possible) et déterminer les entiers caractéristiques.
   Pour une courbe plane ($k = 2$), on cherchera les points stationnaires (ceux tels que $x'(t) = y'(t) = 0$).
4. Dresser les tableaux de variations de chaque des fonctions coordonnées.

5. La dernière étape est optionnelle : on étudie les branches infinies.

Pour la régularité des points, si un point $M(t)$ est $p$-régulier, les vecteurs $f'(t)$, $f"(t), \ldots, f^{(p)}(t)$ sont libres, donc ceci se traduit par l'existence d'un mineur d'ordre $p$, de la matrice $(n,p)$ des coordonnées des $f^{(j)}(t)$ dans une base $\mathcal{B}$ fixée de $\mathbb{R}^k$, non nul, et par continuité de l'application déterminant, ce mineur reste localement non nul.

Soit donc

$$\Omega_p = \{t \in I,\ M(t)\ p - \text{régulier}\}.$$

Si $t \in \Omega_p$, il existe un voisinage de $t$ dans $\Omega_p$ qui est donc ouvert comme voisinage de chacun de ses points. Mais alors $\Omega_p$ est réunion de ses composantes connexes qui sont donc des intervalles (forme des connexes de $\mathbb{R}$), ouverts de $I$. En particulier, on se placera sur les composantes connexes :

— de $\Omega_1$ (points réguliers) pour étudier la tangente ou l'abscisse curviligne,

— de $\Omega_2$ (points biréguliers, donc ordinaires en dimension 2), pour étudier la première courbure,

— de $\Omega_3$ si $k \geq 3$, et ainsi de suite.

Que se passe-t-il sur $I \setminus \Omega_p$ ? Si $I \setminus \Omega_p$ est de cardinal fini, alors l'arc est fractionné en un nombre fini d'arcs $p$-réguliers dont on peut étudier les raccordements.

Si $I \setminus \Omega_p$ contient un sous-intervalle $J$ d'intérieur non vide, le théorème 2.3 nous montre que le sous-arc $(J, f\big|_J)$ est contenu dans un sous-espace affine de dimension $p$, et dans ce cas la recherche du $(p+1)$-ième entier caractéristique ne se pose plus.Il en est de mÃªme de toute composante connexe éventuelle de $I \setminus \Omega_p$, intervalle ouvert associé à un sous-arc $p$-régulier d'un sous-espace affine de dimension $p$.

Mais si $t_0$ est un point d'accumulation de $I \setminus \Omega_p$, non dans l'intérieur de $I \setminus \Omega_p$, on peut se retrouver avec des composantes connexes de $I \setminus \Omega_p$ en quantité dénombrable, non ordonnables, et Ãªtre bien embÃªté alors pour représenter graphiquement la chose.

Ainsi généralement $\Gamma$ est une réunion de courbes $\Gamma_j$, $I$ étant une réunion d'intervalles disjoints, où sur chaque intervalle la restriction de $\Gamma$ est régulière.

## 2.6 Courbes polaires

Dans $\mathbb{R}^2$ ou dans un plan, on peut utiliser deux systèmes de coordonnées : les cartésiennes ou les polaires. On se place donc dans $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan complexe) muni du repère cartésien canonique, euclidien et orienté. Un point du plan est déterminé par ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$ (partie réelle et partie imaginaire) ou par ses coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ (respectivement le module et l'argument du nombre complexe), liées par

$$x = \rho\cos(\theta), \qquad y = \rho\cos(\theta).$$

**Définition 2.15** *Soit $f$ une application de $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la courbe paramètrée $\theta \longmapsto (f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta))$ est la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.*

On note $M(\theta)$ le point courant correspondant au paramètre $\theta$ et $\Gamma$ le graphe de la courbe. On note $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $v_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

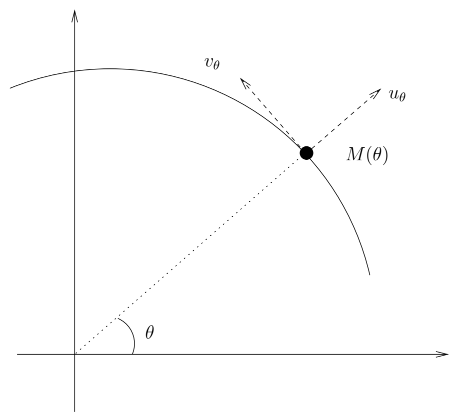


FIGURE 2.6 – Courbes polaires

Si on note $z = f(\theta)\cos(\theta) + if(\theta)\sin(\theta)$, on peut voir le point $M(\theta)$ comme le complexe $|z|e^{i\arg(z)}$ (attention $f(\theta)$ peut être négatif dans quel cas $\arg(z) = \theta + \pi \neq \theta$) qui parcourt une courbe dans le plan (complexe) lorsque $\theta$ varie. Comme pour une courbe paramètrée classique, on procède en plusieurs étapes :

1. Détermination du domaine de définition et réduction de domaine d'étude (périodicité, parités, symétries) ;
2. Étude des variations de la fonction $f(\theta)$ ;
3. Étude des branches infinies.

Dans le cas des courbes polaires ces trois points sont caractéristiques et nous proposons de les étudier dans la suite.

**Réduction du domaine d'étude** Dans le cas des courbes polaires, on a les réductions suivantes :

1. Si $f$ est périodique de période $T$, $f(\theta + T) = f(\theta)$, alors $M(\theta + T)$ se déduit de $M(\theta)$ par rotation de centre $O$ et d'angle $T$. Si $T = 2k\pi$, alors toute la courbe est décrite pour le paramètre dans un intervalle de longueur $T$.
2. Si $f$ est antipériodique de période $T$, $f(\theta + T) = -f(\theta)$. Alors $M(\theta + T)$ se déduit de $M(\theta)$ par rotation de centre $O$ et d'angle $T + \pi$.
3. Si $f(a-\theta) = f(\theta)$, Alors $M(\alpha-\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2}$. Si $f$ est paire on a donc une symétrie par rapport à l'axe $Ox$.
4. Si $f(a-\theta) = -f(\theta)$. Alors $M(\alpha-\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha+\pi}{2}$. Si $f$ est paire on a donc une symétrie par rapport à l'axe $Oy$.

**Étude des variations de la fonction**

**Proposition 2.5** *Un point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $(f(\theta), f'(\theta)) \neq (0,0)$. En un point régulier la tangente a pour vecteur directeur $f'(\theta)u_\theta + f(\theta)v_\theta$. Un point est birégulier si et seulement si $f^2(\theta) + 2f'(\theta) - f''(\theta)f(\theta) \neq 0$.*

Il résulte que l'origine $O$ est le seul point stationnaire possible. Si $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$, c'est un point irrégulier. On considère $p = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(\theta_0) \neq 0\}$. Si $p$ est impair, c'est un point de rebroussement de première espèce, si $p$ est pair, c'est un point ordinaire dont la tangent à pour vecteur directeur $u_{\theta_0}$.

**Étude des branches infinies** Soit $\theta_0$ un élément d'une domaine de définition. Alors,

1. Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ alors $\Gamma$ admet une asymptote d'équation polaire $\theta = \theta_0$.
2. Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = a \in \mathbb{R}$ alors $\Gamma$ admet une asymptote d'équation $Y = a$.
3. Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty$ alors la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$ est une branche parabolique.
4. Si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} |f(\theta)| = \infty$, alors $\Gamma$ admet une branche infinie spirale.
5. Si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = a \in \mathbb{R}$, alors le cercle de centre $O$ et de rayon $a$ est un cercle asymptote à $\Gamma$.

### 2.6.1 Paramétrage polaire des coniques

Les lois de Kepler disent que les trajectoires des planètes sont approximativement des ellipses dont le soleil occupe un des foyers. La démonstration de ce résultat fait intervenir l'équation polaire d'une conique dont un des foyers est situé à l'origine du repère. C'est ce qui fait l'importance de la proposition suivante.

**Proposition 2.6** *Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une droite $D$ d'équation normale $x\cos\phi + y\sin\phi = d$, où $d > 0$ est la distance de $O$ à $D$. La conique d'excentricité $e$, de foyer $O$ et de directrice $D$ admet l'équation polaire :*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \phi)},$$

*où $p = ed$ est appelé paramètre de la conique.*

**Preuve.** La droite d'équation normale $x\cos\phi + y\sin\phi = d$ se déduit de la droite d'équation $x = d$ (qui correspond au cas $\phi = 0$) par la rotation de centre $O$ et d'angle $\phi$. Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas où $\phi = 0$, le cas général se déduit en remplaçant l'angle polaire $\theta$ d'un point $M$ par $\theta - \phi$ dans l'équation obtenue.

Les coordonnées cartésiennes de $M$ sont alors $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ et celles du projeté orthogonal $H$ de $M$ sur $D$ $(d, \rho\sin\theta)$. La relation $MO^2 = e^2 MH^2$ s'écrit alors $\rho^2 = e^2(\rho\cos\theta - d)^2$, soit en développant :

$$(1 - e^2\cos^2\theta)\rho^2 + 2e^2 d\cos^\theta \rho - e^2 d^2 = 0.$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$\rho = \frac{ed(-e\cos\theta \pm 1)}{1 - e^2\cos^2\theta},$$

si $e^2\cos^2\theta \neq 1$ (si $e \geq 1$, la ou les valeurs de $\theta$ telles que $e^2\cos^2\theta = 1$ correspondent aux directions asymptotiques de la parabole ou de l'hyperbole).

On trouve donc a priori deux courbes d'équations polaires $\rho_1(\theta) = \dfrac{ed}{1 + e\cos(\theta)}$ et $\rho_2(\theta) = \dfrac{-ed}{1 - e\cos(\theta)}$. Mais $\rho_2(\theta + \pi) = -\rho_1(\theta)$. Cela signifie que le point d'angle polaire $\theta + \pi$ de la première courbe se confond avec le point de paramètre $\theta$ de la première. Il suffit donc de garder la première équation. $\square$

# Chapitre 3

# Longueur et courbure

## 3.1 Rectification d'une courbe

**Définition 3.1** *Soit un arc paramétré* $\Gamma = (I, f)$ *de* $\mathbb{R}^k$. *On appelle* **subdivision de I** *toute suite finie strictement croissante,* $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *de points de* $l$, *et* **ligne polygonale associée** $P(d)$ *la suite finie des points* $M_i$ *de paramètres* $t_i$.

On appellera alors **longueur de la ligne polygonale** $P(d)$, le scalaire

$$\ell(P(d)) = \sum_{i=1}^{n-1} \|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}\|.$$

**Définition 3.2** *L'arc* $\Gamma = (I, f)$ *est* **rectifiable de longueur** $L$ *si et seulement si l'ensemble* $\mathcal{L}$, *des* $\ell(P(d))$, *pour toute subdivision* $d$ *de* $I$, *est majoré, et si* $L$ *en est la borne supérieure.*

**Remarque 3.1** *Le fait d'être rectifiable est une propriété géométrique pour les arcs de classe* $C^0$ *au moins.*

Voici quelques propriétés évidentes qui nous conduiront à des hypothèses impliquant la rectifiabilité.

**Proposition 3.1**

1. *Si l'arc* $\Gamma = (I, f)$ *est rectifiable de longueur* $L$, *et si* $I_1 \subset I$, *le sous-arc* $\Gamma_1 = (I_1, f)$ *est rectifiable de longueur* $L_1 \leq L$.
2. *Si* $I = [a, b]$, *et si on note* $d*$ *les subdivisions de premier terme* $a$ *et de dernier terme* $b$, *les ensembles*

$$\{\ell(P(d));\ d \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

*et*

$$\{\ell(P(d^*));\ d^* \text{ subdivision de } [a, b] \text{ passant par } a \text{ et } b\}$$

*sont simultanément bornés, et ont même borne quand ils le sont.*

**Preuve.** $\square$

Par la suite on ne considérera que des intervalles du type segment $[a, b]$, et les subdivisions passeront par a et b, sans qu'on leur mette d'étoile !

**Proposition 3.2** *Soit un arc* $\Gamma = ([a, b], f)$, $c \in ]a, b[$, $I_1 = [a, c]$, $I_2 = [c, b]$, $f_1 = f\Big|_{I_1}$ *et* $f_2 = f\Big|_{I_2}$. *Alors* $\Gamma = (I, f)$ *est rectifiable de longueur* $L$ *si et seulement si* $\Gamma_1 = (I_1, f_1)$ *et* $\Gamma_2 = (I_2, f_2)$ *le sont, et les longueurs* $L_1$ *et* $L_2$ *sont telles que* $L = L_1 + L_2$.

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant.

**Théorème 3.1** *Soit un arc paramétré* $\Gamma = ([a, b], f)$ *de classe* $C^1$ *au moins. Il est rectifiable, de longueur*

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

## 3.2 Abscisse curviligne

$(F, I)$ désigne un arc paramétré de classe $C^N$, $N \geq 1$, $\Gamma = \{M(t), t \in I\}$ est son support orienté par le paramétrage $(F, I)$.

Soit alors un arc géométrique $\mathcal{C}$, de représentant l'arc paramétré $(l, f)$, de classe $C^N$, $N \geq 1$. On peut fixer $t_0$ dans $l$, et définir, pour $t \in l$, la fonction $s$ par

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

**Définition 3.3** *$s$ est l'***abscisse curviligne** *de l'arc $\Gamma$, (ou $\mathcal{C}$ géométrique) orienté suivant les $t$ croissants, ayant le point $M_0(t_0)$ pour origine des abscisses curvilignes.*

C'est l'extension pour les courbes de la notion d'abscisse sur une droite orientée.

La fonction $t \mapsto s(t)$ est alors dérivable, de dérivée $s'(t) = \|f'(t)\|$, donc $s$ est fonction croissante de $t$, et si on a $[a, b] \subset I$, la longueur de l'arc restreint à $[a, b]$ est :

$$L = s(b) - s(a) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b s'(t) dt.$$

**Expression de l'abscisse curviligne.** Si $\mathbb{R}^k$ est muni de la base orthonormée $B = (e_1, \cdots ., e_k)$, et si

$$f(t) = \sum_{j=1}^k x_j(t) e_j,$$

on a

$$\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\| = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j'(t))^2\right)^{1/2},$$

expression que l'on écrit plus souvent sous la forme :

$$ds^2 = ((x_1'(t))^2 + \cdots + (x_k'(t))^2)dt^2.$$

Dans le cas des arcs plans en coordonnées polaires, si on note : $\overrightarrow{u} = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}$, le vecteur unitaire d'angle polaire $\theta$, on a : $\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta)\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{f'(\theta)} = r'\overrightarrow{u} + r\dfrac{d\overrightarrow{u}}{d\theta}$. Or

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j} = \overrightarrow{v},$$

est le vecteur déduit de $\overrightarrow{u}$ par la rotation d'angle $\pi/2$ donc la décomposition $\overrightarrow{f'(\theta)} = r'\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v}$ est obtenu dans une base orthonormée d'où :

$$ds^2 = \left(r^2 + (r')^2\right) d\theta^2.$$

**Exemple 3.1** L'astroïde est la courbe plane paramétrée par : $x = a\cos^3(t)$ et $y = a\sin^3(t)$ avec $a > 0$. Sa longueur totale est $6a$. En effet en remarquant que $x$ et $y$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques, paire pour $x$ et impaire pour $y$, que $(x(t+\pi), y(t+\pi)) = -(x(t), y(t))$ et que $(x(\pi/2 - t), y(\pi/2 - t)) = (y(t), x(t))$, on obtient que l'astroïde est une courbe fermée, simple, admettant les axes des abscisses et des ordonnées ainsi que la première bissectrice comme axe de symétrie (voir figure 3.1). Sur l'intervalle $[0, \pi/4]$,

$$x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t), \quad y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t),$$

donc $\|F'(t)\| = 3a\cos(t)\sin(t) = (3a/2)\sin(2t)$ et

$$\int_0^{\pi/4} \|F'(t)\|dt = (3a/2)\int_0^{\pi/4} \sin(2t)dt = (3a/4).$$

C'est la longueur d'un huitième de la courbe ! D'où le résultat annoncé.

En dehors du calcul de la longueur de courbes, l'abscisse curviligne peut être utilisée pour reparamétrer une courbe (on parle de paramétrage normal), avec l'avantage que le nouveau paramètre $s$ ne dépend que de la géométrie de la courbe et non de tel ou tel système de coordonnées. En effet sur toute composante connexe de $\Omega = \{t \in l,\ f'(t) \neq 0\}$, la fonction $s$ est strictement croissante et si $J$ est une telle composante connexe, $s$ donne un $C^N$ difféomorphisme de $J$ sur l'intervalle $K = s(J)$, et le sous-arc $(J, f|_J)$ de $\Gamma$, qui est sans point stationnaire, peut être paramétré par $(K, f \circ s^{-1})$ : on dira qu'il est paramétré en fonction de l'abscisse curviligne.

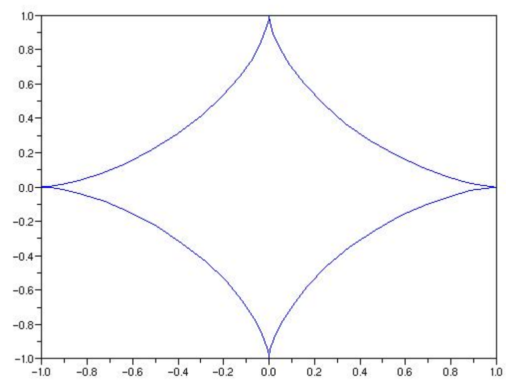


FIGURE 3.1 – Astroïde (avec $a = 1$ pour le dessin)

# Chapitre 4

# Intégrale curviligne

## 4.1 Intégrale curviligne d'une fonction

Cette notion sera utilisée en physique pour calculer le centre d'inertie d'un fil ou les moments d'inertie d'une courbe par rapport à un axe.

**Définition 4.1** *Soient $\Gamma$ une courbe de classe $C^1$ avec un paramétrage $(F, I = [a,b])$ et $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue*[1]*, la région $\mathcal{D}$ contenant $\Gamma$. Alors* **l'intégrale curviligne de $f$ le long de $\Gamma$** *est définie par*

$$\int_\Gamma f = \int_\Gamma f ds = \int_a^b f(F(t))\|F'(t)\|dt.$$

Si $f$ est constante égale à 1, alors l'intégrale est égale à la longueur de la courbe $L_\Gamma$. Si la courbe $\Gamma$ est fermée, on utilise parfois la notation particulière $\oint_\Gamma f$. Si la courbe est uniquement $C^1$ par morceaux, on utilise la relation de Chasles pour définir l'intégrale curviligne. Une propriété importante est la suivante :

**Proposition 4.1** *La définition de l'intégrale curviligne ne dépend pas du choix du paramétrage.*

**Preuve.** Supposons que $(F, I = [a,b])$ et $(G, J = [c,d])$ soient deux paramétrages admissibles de $\Gamma$ et notons $\phi$ le $C^1$ difféomorphisme reliant les deux. Si $\phi$ est croissant, en faisant le changement de variable $t = \phi(s)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_a^b f(F(t))\|F'(t)\|dt \\
&= \int_c^d f((F\circ\phi)(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds = \int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\phi'(s)\|ds \\
&= \int_c^d f(G(s))\|G'(s)\|ds.
\end{aligned}$$

1. La régularité de $\Gamma$ et de $f$ peut être supprimée dans le cadre plus général de l'intégrale de Stieltjes.

Si $\phi$ est décroissant, alors

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_a^b f(F(t))\|F'(t)\|dt \\
&= \int_d^c f((F\circ\phi)(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds = -\int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\|\phi'(s)ds \\
&= \int_c^d f(G(s))\|F'(\phi(s))\||\phi'(s)|ds = \int_c^d f(G(s))\|G'(s)\|ds.
\end{aligned}$$

L'intégrale ne dépend donc pas du paramétrage. □

Les autres propriétés de l'intégrale curviligne sont semblables à celles de l'intégrale standard.

1. Linéarité : pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f$ et $g$ continues,
$$\int_\Gamma (af+g) = a\int_\Gamma f + \int_\Gamma g.$$
2. Positivité : si $a \leq f(X) \leq b$ sur la courbe $\Gamma$, alors
$$aL_\Gamma \leq \int_\Gamma f \leq bL_\Gamma.$$
3. Relation de Chasles : si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont deux courbes de classe $C^1$ par morceaux, sans point commun sauf éventuellement un nombre fini de points, alors
$$\int_{\Gamma_1\vee\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$
$\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ étant la juxtaposition des deux courbes.

## 4.2 Dérivées partielles, différentielle, 1-forme

Maintenant la fonction $F$ dépend, non pas d'un nombre réel $t$, mais d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$, on parle de **champ vectoriel** (scalaire si $k = 1$). Alors

$$F(X) = F(x_1,\ldots,x_d) = (F_1(x_1,\ldots,x_d),\ldots,F_k(x_1,\ldots,x_d))$$

et le champ vectoriel $F$ de dimension $k$ est équivalent à la donnée de $k$ champs scalaires $F_j$, $j = 1,\ldots,k$.

Pour un champ scalaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ au point $A = (a_1,\ldots,a_d) \in \mathbb{R}^d$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_d) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_d)-f(a_1,\ldots,a_d)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(A+hE_i)-f(A)}{h}.
\end{aligned}$$

Une fonction $f$ est de classe $C^1$ (dans une région $\mathcal{D}$) si elle possède $d$ dérivées partielles premières et que ces dérivées sont continues sur $\mathcal{D}$. Ensuite on peut définir un champ scalaire de classe $C^N$, $N \geq 2$, par récurrence. Le *théorème de Schwarz* implique que si $f$ est de classe $C^2$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

De plus si les coordonnées de $f$ dépendent elles même d'une variable $t$, et si on note

$$z(t) = f(x_1(t), \ldots, x_d(t))$$

alors

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_d(t)) x_i'(t). \tag{4.1}$$

### 4.2.1 Différentielle d'une fonction

Passons maintenant à la notion de différentielle. Pour bien comprendre cette notion, revenons au cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que $f$ soit dérivable sur $I$. La dérivée permet de rendre linéaire (au moins localement) une fonction dérivable $f$ aussi compliqué soit-elle. En effet en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si } x \neq x_0, \qquad \text{et } \varepsilon(x_0) = 0,$$

alors $\varepsilon$ est continue et pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas les deux membres sont égaux à $f(x_0)$. C'est le **développement limité de $f$ à l'ordre 1** en $x_0$. Cette relation montre que pour $x$ proche de $x_0$, $f$ est en effet une application linéaire (une droite donc) :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = ah + b.$$

Cette application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ est la différentielle de $f$ en $x_0$.

Cette notion se généralise en dimension plus grande. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est **différentiable** en $A = (a_1, \ldots, a_d)$ s'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f(A)$ et appelée **différentielle de** $f$ en $A$, telle que pour tout $H = (h_1, \ldots, h_d)$

$$\lim_{H \to 0} \frac{1}{\|H\|} \left(f(A + H) - f(A) - \mathrm{d}f(A)(H)\right) = 0.$$

La notion peut être perturbante, mais pour $A$ fixé, $\mathrm{d}f(A)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{d}f(A)(H) \in \mathbb{R}$. Comme elle est linéaire, nécessairement

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle,$$

où $\nabla f(A) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur, appelé **gradient de** $f$ en $A$. Ce vecteur a pour coordonnées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, $i = 1, \ldots, d$. Ainsi si $H = (h_1, \ldots, h_d)$

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) h_i.$$

Si on considère $H$ comme un accroissement infinitésimal de $A$, avec la notation $h_i = \mathrm{d}a_i$ et $H = \mathrm{d}A$, on obtient :

$$f(A + \mathrm{d}A) \approx f(A) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,\mathrm{d}a_i.$$

### 4.2.2 Forme différentielle (d'ordre 1)

L'écriture précédente de la différentielle d'une fonction motive les définitions suivantes.

**Définition 4.2** *On considère une application linéaire* $\mathrm{d}x_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\mathrm{d}x_1(e_1) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}x_1(e_2) = \ldots = \mathrm{d}x_1(e_n) = 0.$$

$\mathrm{d}x_1$ *est appelée une* **forme différentielle**. *De même, on définit les formes différentielles* $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, ... , $\mathrm{d}x_d$.

La famille $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_d)$ est une base de l'ensemble des applications linéaires (appelées ici formes) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 4.3** *Soit $\mathcal{D}$ une région*[2] *de $\mathbb{R}^d$. On appelle* **forme différentielle d'ordre 1** *(ou* **1-forme différentielle**, *ou* **1-forme***) de classe $C^N$ une application $\omega$ de classe $C^N$ de $\mathcal{D}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$ . Cela signifie qu'il existe des applications $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de classe $C^N$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $X \in \mathcal{D}$ :*

$$\omega(X) = \alpha_1(X)\,\mathrm{d}x_1 + \alpha_2(X)\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + \alpha_d(X)\,\mathrm{d}x_d.$$

Ainsi pour un vecteur $H \in \mathbb{R}^d$,

$$\omega(X)(H) = \alpha_1(X)\,\mathrm{d}x_1(H) + \alpha_2(X)\,\mathrm{d}x_2(H) + \ldots + \alpha_d(X)\,\mathrm{d}x_d(H).$$

Pour une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, la forme $\mathrm{d}f$ est définie par

$$\mathrm{d}f(X) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\,\mathrm{d}x_i.$$

Si $f$ est de classe $C^N$, la différentielle de $\mathrm{d}f$ est une 1-forme de classe $C^{N-1}$.

2. Un ouvert pour être précis et correct.

**Définition 4.4** *Une forme différentielle $\omega$ est dite* **exacte** *(ou totale) s'il existe une fonction $f$ différentiable telle que $\omega = \mathrm{d}f$. La fonction $f$ est alors une primitive de $\omega$.*

La 1-forme $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ est la différentielle de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ces notions ont des applications directes en thermodynamique notamment (énergie interne, entropie). Il est en général difficile de déterminer si une forme est exacte ou non. Nous reviendrons sur ce point plus tard (voir notamment le théorème de Poincaré 4.1).

# 4.3 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Cette notion (différente de celle d'une fonction vue précédemment) va avoir son utilité pour calculer le travail d'une force le long d'une trajectoire. Soit $\Gamma$ une courbe paramétrée de paramétrage $(F, I = [a, b])$.

## 4.3.1 Définition et propriétés

**Définition 4.5** *Soit $\omega$ une 1-forme différentielle continue sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^d$. Alors on définit l'intégrale de $\omega$ le long de $\Gamma$ par*

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt.$$

Si on note $\omega = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i\,\mathrm{d}x_i$ et $F(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$, cela donne

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{d} \int_a^b \alpha_i(F(t))x_i'(t)dt.$$

Si $\Gamma$ est $C^1$ par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \ldots < a_m = b$ adaptée et on pose

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \omega(F(t))(F'(t))dt.$$

La proposition suivante montre qu'une intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage mais seulement du sens de parcours :

**Proposition 4.2** *Soit $\Gamma'$ une courbe de paramétrage $(G, J = [c, d])$ et soit $\phi$ un $C^1$-difféomorphisme de $[c, d]$ dans $[a, b]$ et $G = F \circ \phi$. Alors on a*

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_\Gamma \omega$$

*si $\phi$ est croissant et*

$$\int_{\Gamma'} \omega = -\int_{\Gamma} \omega$$

*si $\phi$ est décroissant.*

Géométriquement, $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont la même courbe.

**Remarque 4.1** *Attention contrairement à l'intégrale curviligne d'une fonction, l'intégrale d'une forme différentielle dépend de l'orientation de la courbe.*

**Preuve.** On effectue le changement de variables $t = \phi(s)$. Si $\phi$ est croissant on obtient

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt = \int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s)))\phi'(s)ds.$$

Par linéarité de l'application $\omega$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s)))\phi'(s)ds &= \int_c^d \omega(\phi(s))(F'(\phi(s))\phi'(s))ds \\ &= \int_c^d \omega(\phi(s))((F \circ \phi)'(s))ds = \int_{\Gamma'} \omega. \end{aligned}$$

□

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur le segment $[a, b]$. Alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Autrement dit, l'intégrale de la dérivée de $f$ sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de $f$ sur les bords du segment. Ce résultat se généralise à une intégrale curviligne :

**Proposition 4.3** *On suppose que $\omega$ est une forme exacte sur $\mathcal{D}$, et on considère une primitive $f$ de $\omega$ (soit $f$ est $C^1$ sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{d}f = \omega$). Si $\Gamma$ est une courbe de paramétrage $([a, b], F)$ $C^1$ par morceaux alors on a*

$$\int_{\Gamma} \omega = f(F(b)) - f(F(a)).$$

**Preuve.** En effet si $\omega$ est de classe $C^1$, en utilisant la formule (5.1)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_a^b \omega(F(t))(F'(t))dt = \int_a^b \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(F(t))\,\mathrm{d}x_i(F'(t))dt \\ &= \int_a^b (f \circ F)'(t)dt = (f \circ F)(b) - (f \circ F)(a). \end{aligned}$$

□

Cette proposition simplifie grandement le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exactes. On observe en outre que l'intégrale dépend des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin $\Gamma$ parcouru entre les deux. De cette proposition on déduit

**Corollaire 4.1** *Si $\omega$ est une forme différentielle exacte sur $\mathcal{D}$ et $\Gamma$ est une courbe fermée de classe $C^1$ par morceaux, alors*

$$\int_\Gamma \omega = 0.$$

Terminons par un exemple. On considère sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle :

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Soit $\Gamma = \mathcal{C}$ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Un paramétrage de $\Gamma$ est $I = [0, 2\pi]$ avec $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \cos'(t) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \sin'(t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Si on choisit comme paramétrage $I = [0, \pi]$ et $F(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, on retrouve la même valeur (l'intégrale ne dépend pas du paramétrage choisi). Si on parcourt la courbe $\Gamma$ dans le sens contraire, via le paramétrage $I = [0, 2\pi]$ et $F(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$, alors

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin(-t)}{\cos^2(-t)+\sin^2(-t)} \cos'(-t) - \frac{\cos(-t)}{\cos^2(-t)+\sin^2(-t)} \sin'(-t) \right] dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Enfin le cercle étant une courbe fermée, comme $\int_\Gamma \omega \neq 0$, on en déduit que $\omega$ n'est pas une forme exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

### 4.3.2 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs dans le plan

Il existe une dualité naturelle entre les champs de vecteurs et les formes différentielles. Si $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs :

$$F(x,y) = P(x,y)e_1 + Q(x,y)e_2$$

alors on peut définir la forme différentielle $\omega = \omega_F$ par

$$\omega_F = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

On définit alors **l'intégrale curviligne de** $F$ le long d'une courbe $\Gamma$ régulière par

$$\int_\Gamma F \bullet ds = \int_\Gamma \omega_F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt,$$

où $(\gamma, [a,b])$ est un paramétrage de $\Gamma$. En physique on parle de **circulation du champ de vecteurs** $F$. Si $F$ est un champ de force, sa circulation est le travail du champ de force. S'il dérive d'un gradient, c'est-à-dire $F = \nabla(f)$ alors $\displaystyle\int_\Gamma F \bullet ds = f(B) - f(A)$, les points $A$ et $B$ correspondant aux extrémités de la courbe $\Gamma$. La travail ne dépend donc pas du trajet suivi pour aller de $A$ vers $B$.

## 4.4 Théorèmes de Poincaré et de Green-Riemann

Nous présentons ici deux résultats importants. Le premier du à Poincaré donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme différentielle $\omega$ soit exacte, le second généralise la formule suivante : si $f$ est de classe $C^1$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Pour les comprendre commençons par la dimension 2. Supposons que $\omega = \mathrm{d}f$ soit exacte. Alors

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = X(x,y)\,\mathrm{d}x + Y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Donc par le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Cette condition

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{4.2}$$

est nécessaire.

**Définition 4.6 (Forme fermée)** *Une forme différentielle est* **fermée** *si l'égalité* (4.2) *est vérifiée.*

Ainsi toute forme différentielle exacte est fermée. Néanmoins cette condition n'est pas suffisante en général ! Pour cela il faut que le domaine $\mathcal{D}$ sur lequel $\omega$ est définie soit *simplement connexe*[3], intuitivement que $\mathcal{D}$ n'ait pas de trou.

3. Toute courbe contenue dans $\mathcal{D}$ est homotope à un point.

**Théorème 4.1 (Poincaré)** *Une forme différentielle $\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire si*
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Soit maintenant un domaine $\mathcal{D}$ borné $\mathbb{R}^2$.

**Définition 4.7** *On dit que $\mathcal{D}$ a* **un bord $C^1$ par morceaux** *si sa frontière $\partial\mathcal{D}$ est la réunion finie de supports de courbes $\Gamma_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ avec $N \in \mathbb{N}$, fermées, simples, et $C^1$ par morceaux.*

*On dit que $\partial\mathcal{D}$ est* **orienté de sorte que $\mathcal{D}$ soit à sa gauche** *si pour tout $i = 1, \ldots, N$ et lorsque $t$ croit, le point $\Gamma_i(t)$ se déplace en laissant $\mathcal{D}$ à sa gauche. Cela signifie qu'en tout point $\Gamma_i(t)$, la base $(\overrightarrow{v}, \Gamma_i'(t))$ est directe, où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal sortant au point $\Gamma_i(t)$.*

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ (la réunion de $\mathcal{D}$ et de sa frontière $\partial\mathcal{D}$) et si $\omega$ est une 1-forme continue sur $\mathcal{U}$, on note alors
$$\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} \omega.$$

**Théorème 4.2 (Green-Riemann)** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ orienté de sorte que $\mathcal{D}$ soit à sa gauche et $\omega$ une 1-forme de classe $C^1$ sur un ouvert contenant $\mathcal{D}$. Alors on a*
$$\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\omega = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy.$$

Cette formule implique donc que si $\omega$ est fermée (sans être forcément exacte), alors $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \omega = 0.$

La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens. Selon le problème considéré, on peut vouloir ramener un calcul d'intégrale double au calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse. Elle peut par exemple servir à calculer l'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ via l'une des égalités suivantes. En effet si on considère la forme
$$\omega = x\,\mathrm{d}y = Y\,\mathrm{d}y,$$
alors
$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{D}} dxdy = \text{Aire}(\mathcal{D})$$
et le théorème précédent donne
$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} \omega = \int_{\partial\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}y.$$

De même
$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = -\int_{\partial\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{D}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

À titre d'exemple, calculons l'aire délimitée par une astroïde donnée par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (voir Figure 3.1). Pour des raison de symétrie, ce domaine $\mathcal{D}$ a pour aire quatre fois celle du domaine $\mathcal{D}^+$ se trouvant dans le premier quadrant. On note $\Gamma_1$ le segment $\{(x,0),\ x \in [0,1]\}$, $\Gamma_2$ la courbe définie par $\{(x,y) = (\cos^3(t), \sin^3(t)),\ t \in [0, \pi/2]\}$ et $\Gamma_3 = \{(0,y),\ y \in [0,1]\}$. Le bord de $\mathcal{D}^+$ est $\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \Gamma_3$. Sur le segment $\Gamma_1$, la forme différentielle $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ est nulle car $y = 0$, donc $\mathrm{d}y = 0$. De même $\displaystyle\int_{\Gamma_3} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(\mathcal{D}^+) &= 2\int_{\Gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[\cos^3(t)(3\cos(t)\sin^2(t)) - \sin^3(t)(-3\sin(t)\cos^2(t))\right] dt \\
&= 6\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^2(t)dt = \frac{6}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2t)dt \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4t))dt = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

**Pour un champ de vecteurs.** En utilisant la dualité vue dans la partie 4.3.2, si $F$ est un champ de vecteurs
$$F = X(x,y)e_1 + Y(x,y)e_2$$
alors le théorème de Green-Riemann devient
$$\int_{\Gamma^+} F \bullet ds = \iint_{\mathcal{D}} \text{rot}(F)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$
$\Gamma^+$ étant la courbe $\Gamma$ orientée de façon qu'un mobile la parcourant laisse toujours le domaine $\mathcal{D}$ à sa gauche.

**En dimension supérieure ?** Ces résultats sont valables mais prennent une forme plus compliquée. Ainsi en dimension 3, si $\omega$ est la forme différentielle
$$\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$$
et si nous la supposons exacte $\omega = \mathrm{d}f$, alors toujours avec le théorème de Schwarz, on obtient le théorême de Poincaré en dimension 3.

**Théorème 4.3 (Poincaré en dimension 3)** *Une forme différentielle $\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, est exacte si et seulement si*
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Ainsi il y a trois relations à vérifier. L'extension du théorème de Green-Riemann sera vue dans le dernier chapitre.

# Chapitre 5

# Annexe : à lire seul !

## 5.1 Quelques rappels de géométrie

### 5.1.1 Repérage dans le plan

On note $P$ l'ensemble des points du plan et $\overrightarrow{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On suppose connus les éléments suivants :

- construction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des points $A$ et $B$ ;
- construction du point $M$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ où $O$ est un point de $P$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

On suppose enfin le plan orienté avec comme sens direct le sens trigonométrique.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\overrightarrow{P}$. Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de $\overrightarrow{P}$, il existe un unique couple de réels $(x, y)$ tel que : $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

**Définition 5.1** On dit alors que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une **base** de $\overrightarrow{P}$ et que $\overrightarrow{t}$ a pour **coordonnées cartésiennes** $(x, y)$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soient $A$ un point de $P$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\overrightarrow{P}$. Pour tout point $M$ du plan, il existe un unique couple de réels $(x, y)$ tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

**Définition 5.2** $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère cartésien** du plan $\overrightarrow{P}$ et $M$ a pour **coordonnées cartésiennes** $(x, y)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Définition 5.3** $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère orthonormal** du plan lorsque $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vérifie :

1. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$,
2. l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égal à $\pm\pi/2$ (modulo $2\pi$).

Il est **direct** si l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égal à $\pi/2$ (modulo $2\pi$).

On considère le plan $P$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les points sont donnés par leurs coordonnées dans ce repère et les vecteurs par leurs coordonnées dans la base

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Par exemple le point $A$ ou le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, 2, 3)$ se notent $A(1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{u}(1, 2, 3)$.

**Propriétés 5.1**

- *Soient* $A(a, b)$ *et* $A'(a', b')$. *Alors* $\overrightarrow{AA'}(a' - a, b' - b)$.
- *Soient* $\overrightarrow{u}(u_1, u_2), \overrightarrow{v}(v_1, v_2)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ *et* $(\lambda \overrightarrow{u})(\lambda u_1, \lambda u_2)$.

Soient $M$, $A$, $B$ des points de $P$ :

**Propriétés 5.2**

- *Si* $M(x, y)$, *alors* $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- *Si* $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$, *alors* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- *Si* $\overrightarrow{u}(x, y)$ *alors* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

### 5.1.2 Produit scalaire dans le plan

**Définition 5.4** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{P}$. Alors on appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *nombre* noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ avec

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls ;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, sinon.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et $O$ un point du plan. Soient $A$ et $B$ définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$. $H$ désigne la projection orthonormale de $B$ sur $(OA)$. Alors

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.}$$

**Proposition 5.1** *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs de* $\overrightarrow{P}$.

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.}$$

**Proposition 5.2** *Soient* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *un repère orthonormal du plan,* $\overrightarrow{u}(x, y)$ *et* $\overrightarrow{v}(x', y')$. *Alors*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'.}$$

*On peut utiliser les nombres complexes. Si* $\overrightarrow{u}$ *a pour affixe* $x + iy = u$ *et si* $\overrightarrow{v}$ *a pour affixe* $x' + iy' = v$, *alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \Re(uv)$.

**Propriétés 5.3** *Soient* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *trois vecteurs de* $\overrightarrow{P}$. *Alors*

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ *(le produit scalaire est symétrique) ;*
- $\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})$ *;*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$. Alors $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ : $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j})$.

**Droites et distance.** Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal, $\overrightarrow{n}$ un vecteur et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

— $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a, b)$.

— De plus si $M(x_0, y_0)$ est un point du plan, alors la distance de $M$ à $\mathcal{D}$ vaut

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} + c|}{\|\overrightarrow{n}\|^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .}$$

Si $\Omega$ est un point de la droite, alors

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\ .}$$

### 5.1.3 Dans l'espace

On note $E$ l'ensemble des points de l'espace et $\overrightarrow{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. Comme pour le plan, on suppose connus les éléments suivants :

— construction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des points $A$ et $B$ ;

— construction du point $M$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ où $O$ est un point de $P$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace non alignés et appelons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors l'ensemble des points $M$ de $E$ pour lesquels il existe un couple de réels $(x, y)$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$

forme un plan $P$. Par ailleurs $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère de $P$, $(x, y)$ sont les coordonnées de $M$ dans ce repère.

**Définition 5.5** Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ... de $\overrightarrow{E}$ sont dits **coplanaires** si pour un point $O$ quelconque de $E$ et si pour les points $A$, $B$, $C$, ... définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$, ... , alors les points $O$, $A$, $B$, $C$, ... sont dans un même plan (ou coplanaires).

Donc deux vecteurs sont toujours coplanaires. Ainsi on peut définir **l'angle** de deux vecteurs de l'espace comme l'angle qu'ils forment dans un plan.

**Définition 5.6** On appelle **base** de $\overrightarrow{E}$ tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires et **repère** cartésien de $E$ tout quadruplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $A$ est un point de $E$ appelé origine du repère et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.

Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ étant donné, pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ il existe un unique triplet $(x, y, z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$. $(x, y, z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{t}$.

De même un repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ étant fixé, tout point $M$ est repéré par ses coordonnées $(x, y, z)$ telles que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.

**Définition 5.7** $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un **repère orthonormal** de l'espace lorsque $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ vérifie :

1. $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$,
2. les angles entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont égaux à $\pm\pi/2$ (modulo $2\pi$).

Soit $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un **repère orthonormal** de l'espace. Un observateur se tient debout dans l'axe $(A, \overrightarrow{k})$, les pieds en $A$ et regardant le point $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{i}$. On note $J$ le point de $E$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{j}$.

**Définition 5.8** Le repère est dit **direct** si l'observateur a le point $J$ à sa gauche. Il est **indirect** dans le cas contraire.

### 5.1.4 Produit scalaire

La définition et les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, car deux vecteurs sont toujours coplanaires !

**Définition 5.9** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors on appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *nombre* noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ avec

— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls ;
— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, sinon.

**Proposition 5.3** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.}$$

**Propriétés 5.4** *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors*

— *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (le produit scalaire est symétrique) ;*
— *$\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})$ ;*
— *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.*

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

**Proposition 5.4** *Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$. Alors*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.}$$

De plus $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ a pour coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ : $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{k})$.

**Plan et distance.** Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal, $\overrightarrow{n}$ un vecteur et $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

- $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a, b, c)$.
- De plus si $M(x_0, y_0, z_0)$ est un point de l'espace, alors la distance de $M$ à $\mathcal{P}$ vaut

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} + d|}{\|\overrightarrow{n}\|^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + +cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .}$$

Si $\Omega$ est un point du plan, alors

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\ .}$$

### 5.1.5 Produit vectoriel

On suppose ici l'espace orienté par un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormal direct.

**Définition 5.10** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On appelle **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le *vecteur* noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ;
- et lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :
  - $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (ce qui donne la direction du vecteur),
  - $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe (ce qui donne le sens du vecteur),
  - $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (ce qui donne la norme du vecteur). Ici $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ représente une mesure de l'angle non orienté (donc un élément de $[0, \pi]$).

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$ et $\alpha$ un réel. Alors

**Propriétés 5.5**

- $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *(antisymétrie) ;*
- $(\alpha\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ *;*
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$*.*
- $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$*.*
- *Si* $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ *et* $\overrightarrow{v}(x', y', z')$*, alors*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} : (yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y).$$

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés de $E$. Alors l'aire du triangle $ABC$ est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

### 5.1.6 Déterminant ou produit mixte

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$.

**Définition 5.11** On appelle **déterminant (ou produit mixte)** des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, le *nombre réel* noté $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

**Proposition 5.5** *$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Soient $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal direct, $\overrightarrow{u}(x, y, z)$, $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ et $\overrightarrow{w}(x'', y'', z'')$. Alors

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = x(y'z'' - z'y'') - x'(yz'' - zy'') + x''(yz' - zy').$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors

**Propriétés 5.6**
- *Si on échange la place de deux vecteurs alors le déterminant est changé en son opposé. Ainsi*
$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$
- *Si $\alpha$ est un réel,*
$$\mathrm{Det}(\alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha\overrightarrow{w}) = \alpha\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$
- *Si $\overrightarrow{t}$ est un autre vecteur,* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
- *$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe de $\overrightarrow{E}$ si et seulement si* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Alors $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, qui vaut six fois le volume du tétraèdre formé par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

## 5.2 Rappels de calcul différentiel

Maintenant la fonction $F$ dépend, non pas d'un nombre réel $t$, mais d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$, on parle de **champ vectoriel** (scalaire si $k = 1$). Alors

$$F(X) = F(x_1, \ldots, x_d) = (F_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_d))$$

et le champ vectoriel $F$ de dimension $k$ est équivalent à la donnée de $k$ champs scalaires $F_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Pour un champ scalaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ au point $A = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_d) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_d) - f(a_1, \ldots, a_d)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(A + hE_i) - f(A)}{h}. \end{aligned}$$

Une fonction $f$ est de classe $C^1$ (dans une région $\mathcal{D}$) si elle possède $d$ dérivées partielles premières et que ces dérivées sont continues sur $\mathcal{D}$. Ensuite on peut définir un champ scalaire de classe $C^N$, $N \geq 2$, par récurrence. Le *théorème de Schwarz* implique que si $f$ est de classe $C^2$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

De plus si les coordonnées de $f$ dépendent elles même d'une variable $t$, et si on note

$$z(t) = f(x_1(t), \ldots, x_d(t))$$

alors

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_d(t))x_i'(t). \tag{5.1}$$

### 5.2.1 Différentielle d'une fonction

Passons maintenant à la notion de différentielle. Pour bien comprendre cette notion, revenons au cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que $f$ soit dérivable sur $I$. La dérivée permet de rendre linéaire (au moins localement) une fonction dérivable $f$ aussi compliqué soit-elle. En effet en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si } x \neq x_0, \qquad \text{et } \varepsilon(x_0) = 0,$$

alors $\varepsilon$ est continue et pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas les deux membres sont égaux à $f(x_0)$. C'est le **développement limité de $f$ à l'ordre 1** en $x_0$. Cette relation montre que pour $x$ proche de $x_0$, $f$ est en effet une application linéaire (une droite donc) :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = ah + b.$$

Cette application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ est la différentielle de $f$ en $x_0$.

Cette notion se généralise en dimension plus grande. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est **différentiable** en $A = (a_1, \ldots, a_d)$ s'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f(A)$ et appelée **différentielle de $f$** en $A$, telle que pour tout $H = (h_1, \ldots, h_d)$

$$\lim_{H \to 0} \frac{1}{\|H\|}\left(f(A + H) - f(A) - \mathrm{d}f(A)(H)\right) = 0.$$

La notion peut être perturbante, mais pour $A$ fixé, $\mathrm{d}f(A)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{d}f(A)(H) \in \mathbb{R}$. Comme elle est linéaire, nécessairement

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle,$$

où $\nabla f(A) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur, appelé **gradient de** $f$ en $A$. Ce vecteur a pour coordonnées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, $i = 1, \ldots, d$. Ainsi si $H = (h_1, \ldots, h_d)$

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) h_i.$$

Si on considère $H$ comme un accroissement infinitésimal de $A$, avec la notation $h_i = \mathrm{d}a_i$ et $H = \mathrm{d}A$, on obtient :

$$f(A + \mathrm{d}A) \approx f(A) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, \mathrm{d}a_i.$$

### 5.2.2 Forme différentielle (d'ordre 1)

L'écriture précédente de la différentielle d'une fonction motive les définitions suivantes.

**Définition 5.12** *On considère une application linéaire* $\mathrm{d}x_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\mathrm{d}x_1(e_1) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}x_1(e_2) = \ldots = \mathrm{d}x_1(e_n) = 0.$$

$\mathrm{d}x_1$ *est appelée une* **forme différentielle**. *De même, on définit les formes différentielles* $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, *...* , $\mathrm{d}x_d$.

La famille $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_d)$ est une base de l'ensemble des applications linéaires (appelées ici formes) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 5.13** *Soit $\mathcal{D}$ une région*[1] *de* $\mathbb{R}^d$. *On appelle* **forme différentielle d'ordre 1** *(ou* **1-forme différentielle**, *ou* **1-forme***) de classe $C^N$ une application $\omega$ de classe $C^N$ de $\mathcal{D}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$ . Cela signifie qu'il existe des applications $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de classe $C^N$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $X \in \mathcal{D}$ :*

$$\omega(X) = \alpha_1(X)\, \mathrm{d}x_1 + \alpha_2(X)\, \mathrm{d}x_2 + \ldots + \alpha_d(X)\, \mathrm{d}x_d.$$

Ainsi pour un vecteur $H \in \mathbb{R}^d$,

$$\omega(X)(H) = \alpha_1(X)\, \mathrm{d}x_1(H) + \alpha_2(X)\, \mathrm{d}x_2(H) + \ldots + \alpha_d(X)\, \mathrm{d}x_d(H).$$

Pour une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, la forme $\mathrm{d}f$ est définie par

$$\mathrm{d}f(X) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\, \mathrm{d}x_i.$$

Si $f$ est de classe $C^N$, la différentielle de $\mathrm{d}f$ est une 1-forme de classe $C^{N-1}$.

1. Un ouvert pour être précis et correct.

**Définition 5.14** *Une forme différentielle $\omega$ est dite* **exacte** *(ou totale) s'il existe une fonction $f$ différentiable telle que $\omega = \mathrm{d}f$. La fonction $f$ est alors une primitive de $\omega$.*

La 1-forme $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ est la différentielle de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ces notions ont des applications directes en thermodynamique notamment (énergie interne, entropie). Il est en général difficile de déterminer si une forme est exacte ou non. Nous reviendrons sur ce point plus tard (voir notamment le théorème de Poincaré 4.1).