Statistiques appliquées à la biologie : les tests paramétriques.

Alexandre Popier

L3 BBTE, Université du Maine, Le Mans

Semestre 1

Plan du cours

DONNÉES ET ESTIMATION :

- Une machine produit des pièces classées soit « bonnes » (noté 0), soit « défectueuses » (noté 1).
- Lot de $n = 100$ pièces :

  00010101000000000000000000100000100001000100000010

  10100010000000010100000010010100100110100010100000

- Schéma de Bernoulli avec $n = 100$ et p proportion de pièces défectueuses inconnue.
- Ici fréquence empirique : $\hat{p} = 0,22$ avec un intervalle de confiance à 95% : $[0,139; 0,301]$.

EXEMPLE : CONTRÔLE QUALITÉ

PRISE DE DÉCISIONS :

- L'industriel devrait arrêter la production si la probabilité p de produire des pièces défectueuses monte au dessus d'un certain seuil p_0 (par exemple $0,2$).
- Mais un arrêt coûte cher, et il ne le fera que s'il est convaincu de la nécessité d'y procéder.
- Ce qui intéresse l'industriel, au vu des données, c'est donc de savoir s'il doit considérer que $p \leq p_0$ (et continuer à produire) ou que $p > p_0$ (et se résoudre à arrêter).

Test de l'hypothèse nulle $H_0 = \{p \leq p_0\}$ contre l'hypothèse alternative (ou contre-hypothèse) $H_1 = \{p > p_0\}$.

- Test paramétrique car porte sur un nombre p.

TRÈS GRANDE DIVERSITÉ.

Une multitude de tests existe, adaptés à une question particulière.

1. TEST DE CORRÉLATION avec une régression.
2. TEST DE COMPARAISON multiple (Kruskal-Wallis).
3. TEST D'ADÉQUATION (Kolmogorov).

PLAN

PLAN

DÉFINITION

Les tests d'hypothèses sont des règles de décisions qui pour deux hypothèses complémentaires H_0 et H_1, à partir des observations, permettent de rejeter H_0 ou non.

Un test est défini par sa région critique ou zone de rejet W : si X représente les données $(X_1, \ldots, X_n)$, alors

- soit X est dans la région critique ($X \in W$), on rejette alors H_0 et on accepte H_1.
- soit X n'est pas dans la région critique ($X \notin W$), on ne rejette pas H_0.

ERREURS ET PUISSANCE D'UN TEST.

Données étant aléatoires, décision potentiellement erronée.

- ERREUR DE 1ÈRE ESPÈCE : Rejeter H_0 à tort.

  Exemple du contrôle qualité : arrêter la production alors que le taux de pièces défectueuses est encore acceptable.

- ERREUR DE 2ÈME ESPÈCE : Accepter H0 à tort (c'est-à-dire rejet de H_1 à tort).

  Exemple du contrôle qualité : continuer la production alors que le taux de défaillance est supérieur au seuil p_0 fixé par l'industriel.

Dissymétrie des erreurs.

Convention : choix de H_0 de sorte que l'on désire minimiser en priorité l'erreur de 1ère espèce.

- Ceci traduit le fait que rejeter H_0 à tort est plus préjudiciable que rejeter H_1 à tort.
- Le statisticien doit bien comprendre le contexte, pour choisir correctement l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative !
- En général, le but d'un test est de rejeter H_0.
- Quand on ne peut pas rejeter H_0, on ne peut pas conclure car on ne contrôle pas l'erreur de seconde espèce.

NIVEAU D'UN TEST, CHOIX D'UN TEST.

Le niveau du test de région critique W est défini par

$\alpha(W) =$ maximum de l'erreur de première espèce quand H_0 est vraie.

PRINCIPE DE NEYMANN :

- Utiliser un test de niveau inférieur à un seuil α fixé a priori.
- La valeur de α est faible ; les valeurs typiques sont 10%, 5%, 1%, ...
- Ensuite, parmi les tests de niveau inférieur à α, on cherche, si possible, à minimiser l'erreur de 2ème espèce.

RETOUR SUR L'EXEMPLE ET SUR LE CHOIX DE H_0.

1. Choix $H_0 = \{p \leq p_0\}$ et $H_1 = \{p > p_0\}$
   - On arrête la production (on rejette H_0) si l'on est vraiment convaincu (avec une marge d'erreur au plus égale au seuil du test) que le seuil p_0 de taux de pièces défectueuses est dépassé.
   - Correspond au cas où l'arrêt de la production a un coût très important.

2. Choix $H_0 = \{p \geq p_0\}$ et $H_1 = \{p < p_0\}$
   - On accepte de continuer la production que si l'on est vraiment convaincu que le seuil p_0 de taux de pièces défectueuses n'est pas encore atteint.
   - Point de vue d'un acheteur ou d'un organisme de contrôle de la qualité (la qualité de la production prime sur le coût d'arrêt de la production).

Le choix de H0 et H1 dépend directement des préoccupations de l'interlocuteur !

PLAN

EXEMPLE.

- Pour l'industriel, très coûteux d'arrêter la production pour réparer ou changer la machine.
- Erreur à ne pas commettre (c'est-à-dire à minimiser) : arrêter la production (c'est-à-dire rejeter $p \leq p_0$ et accepter $p > p_0$) si $p \leq p_0$.
- Erreur de 1ère espèce : rejeter $\{p \leq p_0\}$ à tort.
- Donc $H_0 = \{p \leq p_0\}$ et $H_1 = \{p > p_0\}$.

TEST UNILATÉRAL : $H_0 = \{p \leq p_0\}$ contre $H_1 = \{p > p_0\}$.

ESTIMATEUR de p : fréquence empirique $\widehat{p}$.

- sous H_0, $\widehat{p}$ prend des valeurs proches de p dans $[0, p_0]$,
- et sous H_1 des valeurs proches de p dans $]p_0, 1]$.

CHOIX DE LA STATISTIQUE DE TEST. Pour n grand

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}.$$

1. Comportement asymptotique sous H_0. Pour $p < p_0$,

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = -\infty.$$

   Pour $p = p_0$, $(Z_n,\ n >> 1) \approx$ gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. Comportement asymptotique sous H_1 : $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$.

Construction de la zone de rejet W.

Test unilatéral : $H_0 = \{p \leq p_0\}$ contre $H_1 = \{p > p_0\}$.

choix de la statistique de test. Pour n grand

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}.$$

1. Comportement asymptotique sous H_1 : $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$.

Choix de la zone de rejet :

$$W = \{(X_1, \ldots, X_n); \quad Z_n > a\}$$

où n est la taille de l'échantillon, et a une constante à déterminer.

Niveau de ce test.

Niveau du test :

$$\begin{aligned} \alpha(W) &= \max_{p \le p_0} \mathbb{P}(Z_n > a) \\ &= \mathbb{P}(Z_n > a | p = p_0) \approx \mathbb{P}(Z > a). \end{aligned}$$

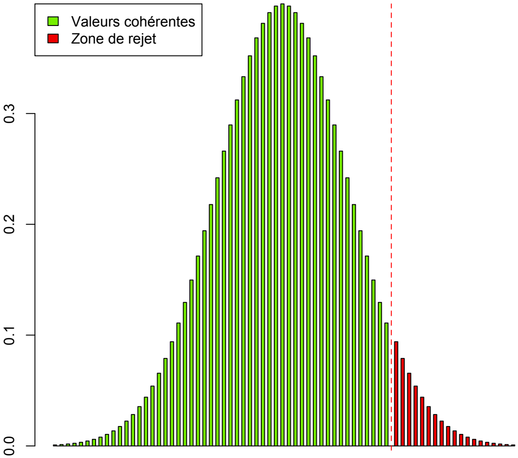
où Z est de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Seuil α fixé.

- $\alpha(W) = \mathbb{P}(Z > a) \le \alpha$.
- Sous R : `qnorm(`α`,lower.tail=F)`.

NIVEAU DE CE TEST.

$\alpha = 5\%$, $a = 1,64$



Test retenu pour un seuil α :

$$W = \{(X_1, \ldots, X_n); \quad Z_n > a\}$$

Exemple. $n = 100$, $p_0 = 0,2$, $\widehat{p} = 0,22$.

- $\alpha = 0,05$, $a = 1,64$.
  Sous R, `qnorm(0.05,lower.tail=F)`.

$$W = \{(X_1, \ldots, X_n); \quad Z_n > 1,64\}$$

- Ici $Z_n = 0,5$. Donc on ne rejette pas H_0 au niveau de 5%.

Comportement des erreurs.

- Plus p est proche de 0 (c'est-à-dire plus on est loin de H_1), plus l'erreur de 1ère espèce est faible.
- Plus p est proche de 1 (c'est-à-dire plus on est loin de H_0), plus l'erreur de 2ème espèce est faible.
- Quand $p \in H_1$ se rapproche de p_0 (c'est-à-dire de H_0), l'erreur de 2ème espèce augmente.
- L'erreur de 2ème espèce est loin d'être négligeable !

Exemple. $n = 100$, $p_0 = 0,2$. Si $p = 0,22$, alors

$$\text{Erreur seconde espèce } = 90\%.$$

TEST UNILATÉRAL "inverse" :

- Préférable de minimiser l'erreur suivante : continuer la production (c'est-à-dire rejeter $p \geq p_0$ et accepter $p < p_0$) si $p \geq p_0$.
- Dans ce cas on choisit $H_0 = \{p \geq p_0\}$ et $H_1 = \{p < p_0\}$.

ZONE DE REJET : test de seuil α construit à l'aide de $\widehat{p}$ et de Z_n

$$W = \{(X_1, \ldots, X_n); Z_n < b\} .$$

avec a tel que

$$\mathbb{P}(Z < a) \leq \alpha.$$

Sous R : `qnorm(`α`)`.

Zone de rejet : test de seuil α construit à l'aide de $\widehat{p}$ et de Z_n

$$W = \{(X_1, \dots, X_n); Z_n < b\}.$$

avec a tel que

$$\mathbb{P}(Z < a) \leq \alpha.$$

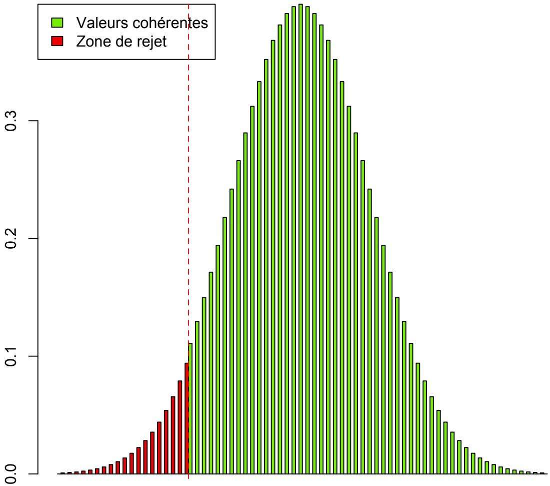
Sous R : `qnorm(`α`)`.

Exemple.

- $n = 100$, $p_0 = 0,2$, $\alpha = 5\%$: $b = -1,64$.
- $\widehat{p} = 0,15$, $Z_n = -0,39$: donc on ne rejette pas H_0.

Point de vue d'un acheteur.

$\alpha = 5\%$: $b = -1,64$ (`qnorm(0.05)`).



TEST BILATÉRAL.

ZONES DE REJET :

- $H_0 = \{p \leq p_0\}$

$$W_n = \{(X_1, \ldots, X_n); Z_n > a\}.$$

- $H_0 = \{p \geq p_0\}$

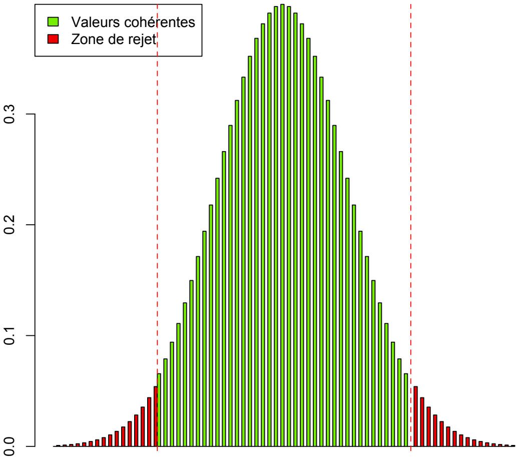
$$\widetilde{W} = \{(X_1, \ldots, X_n); Z_n < b\}.$$

TEST BILATÉRAL : $H_0 = \{p = p_0\}$ vs. $H_1 = \{p \neq p_0\}$

$$\mathcal{W} = W \cup \widetilde{W} = \{(X_1, \ldots, X_n); Z_n < b, \text{ ou } Z_n > a\}.$$

TEST BILATÉRAL.

$\alpha = 5\%$: $a = 1,96$ (`qnorm(0.025,lower.tail=F)`).



Plan

Statistique de test.

Région critique, construite pour un échantillon de taille n, sous la forme :

$$W = \{(X_1, \dots, X_n);\ S(X_1, \dots, X_n) \geq a\} = \{S \geq a\},$$

où $S = S(X_1, \dots, X_n)$ est une statistique.

Définition

S est une statistique de test et que W est la région critique associée à la statistique de test S.

DÉFINITION

Pour un échantillon donné, la P-valeur du test de région critique $W = \{S \geq a\}$ est la valeur maximale de la probabilité que la statistique de test dépasse celle calculée pour l'échantillon, si H_0 est vraie.

La P-valeur du test de région critique $W = \{S \leq a\}$ donnée par la valeur maximale de la probabilité que la statistique de test soit inférieure à celle calculée pour l'échantillon, si H_0 est vraie.

La P-valeur traduit la probabilité, si H_0 est vraie, d'observer « pire » que les observations dont on dispose.

P-VALEUR.

ACCEPTER OU REJETER H_0 ?

- P-valeur très faible : ce que l'on observe est très rare (sous H_0). En particulier remet en cause l'hypothèse H_0.
- Suivant la valeur de la P-valeur et le contexte qui permet d'apprécier le niveau de risque retenu, on pourra alors rejeter H_0.
- P-valeur pas faible : il est raisonnable d'observer cette valeur sous H_0. On ne rejettera pas H_0.

La P-valeur est un indicateur de la confiance que l'on accorde à H_0, on peut également la voir comme l'inverse d'une « distance » à H_0. La P-valeur d'une observation, pour une technique de test donnée, est le plus petit choix du niveau de signification pour lequel l'observation effectuée conduise au rejet. Il est plus précis que la réaction binaire du rejet ou acceptation dépendant d'un niveau parfois arbitraire !

EXEMPLE. $n = 100$, $p_0 = 0,2$.

- Statistique de test : fréquence empirique $\widehat{p}$ puis Z_n avec $Z^{obs} = 0,5$.
- $W = \{(X_1, \ldots, X_n); \quad Z_n > a\}$.
- $P - valeur = \max_{p \leq p_0} \mathbb{P}(Z_n \geq Z^{obs}) = \mathbb{P}(Z_n \geq Z^{obs} | p = p_0)$.
- Sous R, `pnorm(0.5,lower.tail=F)`

$$P - valeur = 0,308 = 30,8\%.$$

On ne rejette pas H_0.

Pour les tests sur une proportion

- Test unilatéral à gauche : $H_0 = \{p \leq p_0\}$, $H_1 = \{p > p_0\}$
- Test unilatéral à droite : $H_0 = \{p \geq p_0\}$, $H_1 = \{p < p_0\}$
- Test bilatéral : $H_0 = \{p = p_0\}$, $H_1 = \{p \neq p_0\}$

on utilise

- Statistique de test : $\widehat{p}$
- Loi binomiale (au lieu de la loi normale).

RETOUR SUR L'EXEMPLE $n = 100$, $p_0 = 0,2$ et $\widehat{p}_n = 0,22$. Résultats :

- P-valeur avec loi normale $= 0,309 = 30,9\%$.
- Test avec loi binomiale P-valeur $= 26\%$.

PLAN

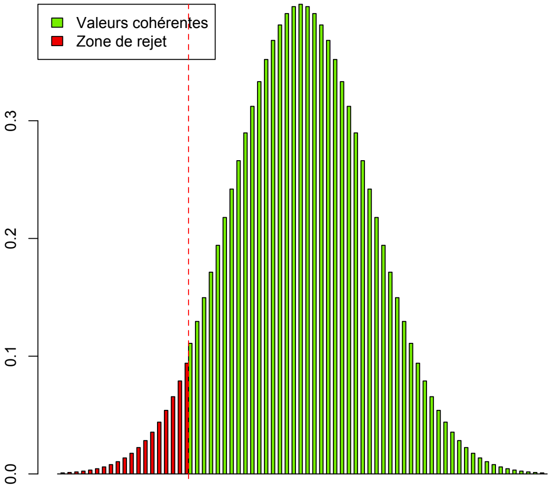
PLAN

Test sur la moyenne.

Pour n grand (≥ 30) !

- Hypothèses : $H_0 = \{m \geq m_0\}$ et $H_1 = \{m < m_0\}$ (test unilatéral).
- Statistique de test : $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\widehat{m}_n - m_0}{\widehat{s}_n}$.
- Comportement :
  - Sous H_0 : approximation loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
  - Sous H_1 : $\lim_{n\to+\infty} Z_n = -\infty$.
- Zone de rejet : $W = \{(X_1,\ldots,X_n); Z_n \leq a\}$, $a < 0$.
- De niveau $\mathbb{P}(Z \leq a)$ avec Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- P-valeur = $\mathbb{P}(Z \leq Z_n)$.

$\alpha = 5\%$: $a = -1,64$ (`qnorm(0.05)`).

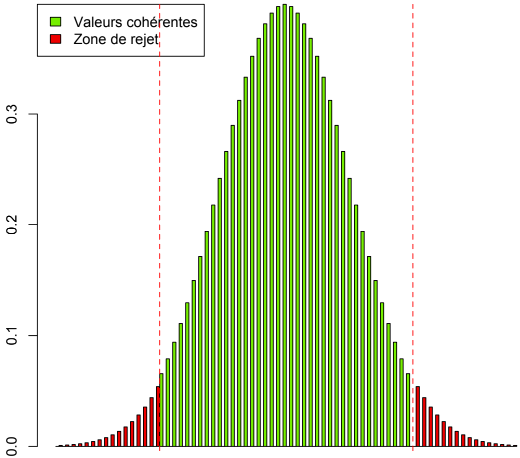


Pour n grand (≥ 30) !

- Hypothèses : $H_0 = \{s^2 = s_0^2\}$ et $H_1 = \{s^2 \neq s_0^2\}$ (test bilatéral).
- Statistique de test : $\zeta_n = \sqrt{n}\dfrac{\widehat{s}_n^2 - s_0^2}{s_0^2\sqrt{2}}$.
- Comportement :
  - Sous H_0 : approximation loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
  - Sous H_1 : ζ_n augmente avec $\widehat{s}_n^2 \to s^2$.
- ZONE DE REJET : $W = \{(X_1, \ldots, X_n); |\zeta_n| \geq a\}$, $a > 0$.
- De niveau asymptotique α, si $\mathbb{P}(|Z| > a) = \alpha$.
- P-VALEUR $= \mathbb{P}(|Z| \geq \zeta_n)$.

TEST SUR LA VARIANCE.

$\alpha = 5\%$: $a = 1,96$ (`qnorm(0.025,lower.tail=F)`).



Production d'un fil avec norme de résistance à la rupture :

- Résistance à la rupture : $m_0 = 300$ g.
- Écart-type : $s_0 = 20$ g.

Échantillon de taille $n = 100$ (donc grand).

- Résistance à la rupture : $\widehat{m} = 305$ g.
- Écart-type : $\widehat{s} = 22$ g.

Test sur la variance : $H_0 = \{s^2 = s_0^2 = 400\}$ vs. $H_1 = \{s^2 \neq s_0^2\}$.

- $\zeta_n = \sqrt{100}\frac{\widehat{s}^2 - 400}{400\sqrt{2}} = 1,48$.
- Zone de rejet (à 5%) : $\zeta_n < -1,96$ ou $\zeta_n > 1,96$.
- P-valeur = $13,9\%$
- Conclusion : on ne rejette pas H_0.

EXEMPLE.

PRODUCTION D'UN FIL avec norme de résistance à la rupture :

- Résistance à la rupture : $m_0 = 300$ g.
- Écart-type : $s_0 = 20$ g.

Échantillon de taille $n = 100$ (donc grand).

- Résistance à la rupture : $\widehat{m} = 305$ g.
- Écart-type : $\widehat{s} = 22$ g.

TEST SUR LA MOYENNE : $H_0 = \{m = 300\}$ vs. $H_1 = \{m \neq 300\}$.

- Variance connue : $s^2 = 400$!
- $Z_n = \sqrt{100}\frac{\widehat{m}-300}{20} = 2,5$.
- Zone de rejet (à 5%) : $Z_n < -1,96$ ou $Z_n > 1,96$.
- P-valeur = $1,24\%$
- Conclusion : on rejette H_0.

PLAN

Situation classique : appréciation des effets comparés de 2 traitements (ou l'appréciation des effets d'un traitement face à l'absence d'administration de traitement).
Deux échantillons de suites de 0 (échec) et de 1 (succès), d'observations $X_{1,i}$ $(1 \leq i \leq n_1)$ et $X_{2,j}$ $(1 \leq j \leq n_2)$. Au sein d'un échantillon, les observations sont indépendantes et de mêmes caractéristiques.

Définition

Échantillons non appariés. Deux groupes de sujets pris indépendamment.
Échantillons appariés (de même taille). Sujets réunis par couples de manière qu'ils aient dans chaque couple des caractéristiques communes susceptibles d'agir sur la réceptivité aux traitements (par ex. l'âge) et que dans chaque couple les deux sujets reçoivent des traitements différents.

Échantillons non appariés.

Modèle.

- $X_{1,i}$: Bernoulli de paramètre p_1,
- $X_{2,j}$: Bernoulli de paramètre p_2.

Hypothèses :

- Test bilatéral.
  - $H_0 = \{p_1 = p_2\}$: identité des traitements.
  - $H_1 = \{p_1 \neq p_2\}$.
- Test unilatéral.
  - $H_0 = \{p_1 \leq p_2\}$: traitement 1 pas meilleur que le 2.
  - $H_1 = \{p_1 > p_2\}$: traitement 1 plus efficace que traitement 2.

Remarque :

- Cas petits échantillons : possible mais difficile.
- Cas grands échantillons : $n_1 p_1 (1 - p_1) \geq 5$ et $n_2 p_2 (1 - p_2) \geq 5$.
- Suppose estimations ou renseignements préalables.

GRANDS ÉCHANTILLONS NON APPARIÉS.

NOTATIONS :

- $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_{n_1}$: fréquence empirique de l'échantillon 1
- $\widehat{p}_2 = \widehat{p}_{n_2}$: fréquence empirique de l'échantillon 2
- $\overline{p} = \dfrac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1 + n_2}$: moyenne pondérée des fréquences empiriques.

STATISTIQUE DE TEST :

$$Z_{n_1,n_2} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\frac{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1}{\sqrt{\overline{p}(1 - \overline{p})}}$$

avec

- n_1 et n_2 grands,
- $0 < \lim \dfrac{n_1}{n_2} < +\infty$: tailles de même ordre de grandeur.
- Si $p_1 = p_2$: $Z_{n_1,n_2} \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

Test unilatéral.

Hypothèses : $H_0 = \{p_1 \geq p_2\}$ vs. $H_1 = \{p_1 < p_2\}$.

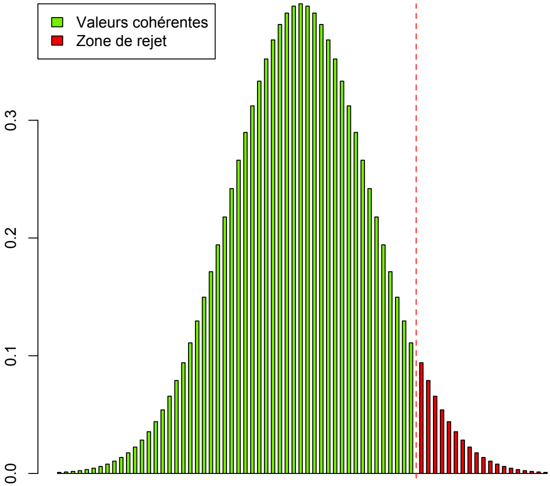
- **Comportement :** sous H_1, $Z_{n_1,n_2} \to +\infty$.
- **Zone de rejet :** $W = \{Z_{n_1,n_2} > a\}$ avec $a > 0$.
- **Niveau asymptotique** α si a tel que

  $$\mathbb{P}(Z > a) = \alpha, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

  Sous R, `qnorm(`α`,lower.tail=F)`.
- **P-valeur :** $\mathbb{P}(Z > Z_{n_1,n_2})$.
  Sous R, `pnorm(`Z_{n_1,n_2}`,lower.tail=F)`.

TEST UNILATÉRAL.

$\alpha = 5\%$, $a = 1,64$.



TEST BILATÉRAL.

HYPOTHÈSES : $H_0 = \{p_1 = p_2\}$ vs. $H_1 = \{p_1 \neq p_2\}$.

- COMPORTEMENT : sous H_1, $|Z_{n_1,n_2}| \to +\infty$.
- ZONE DE REJET : $W = \{|Z_{n_1,n_2}| > a\}$ avec $a > 0$.
- NIVEAU ASYMPTOTIQUE α si a tel que

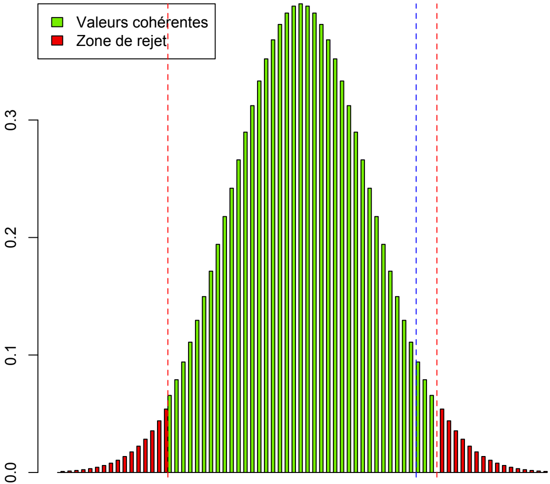
$$\mathbb{P}(|Z| > a) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z > a) = \alpha/2, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

  Sous R, `qnorm(`$\alpha/2$`, lower.tail=F)`.

- P-VALEUR : $\mathbb{P}(|Z| > |Z_{n_1,n_2}|)$.
  Sous R, `2*(pnorm(`$|Z_{n_1,n_2}|$`, lower.tail=F))`.

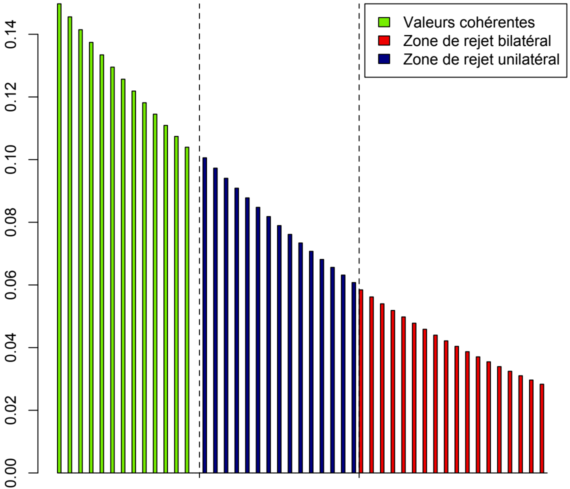
TEST BILATÉRAL.

$\alpha = 5\%$, $a = 1,96$.



TEST BILATÉRAL.

$\alpha = 5\%$, $a = 1,96$.



PLAN

Test de comparaison de moyennes.

Modèle : deux échantillons.

- $X_{1,i}$: de taille n_1, de paramètres m_1 et s_1^2,
- $X_{2,j}$: de taille n_2, de paramètres m_2 et s_2^2.

n_1 et n_2 sont grands (du même ordre de grandeur et $n_1 + n_2 > 100$).

Hypothèses : test bilatéral :

- $H_0 = \{m_1 = m_2\}$.
- $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$.

Notations :

- $\widehat{m}_1$ et $\widehat{s}_1^2$: moyenne et variance empiriques de l'échantillon 1
- $\widehat{m}_2$ et $\widehat{s}_2^2$: moyenne et variance empiriques de l'échantillon 2

ESTIMATEUR DE LA DIFFÉRENCE $\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2$ avec

$$Z = \frac{(\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

ESTIMATEUR DES VARIANCES avec

$$U^2 = (n_1 - 1)\widehat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\widehat{s}_2^2.$$

$$\zeta = (n_1 + n_2 - 2)\frac{\widehat{s}_1^2 - \widehat{s}_2^2}{U^2\sqrt{\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

PLAN

SYNTHÈSE POUR CHAQUE TEST.

9 POINTS :

1. Description du modèle (guidé par le contexte).
2. Les hypothèses (guidées par le contexte).
3. La statistique de test et sa loi.
4. Région critique du test.
5. Calcul de la P-valeur du test.

CONCLUSION : si la P-valeur est faible, on rejette H_0, sinon on ne rejette pas H_0. La notion de P-valeur « faible » dépend du contexte.

1. Modèle : $(X_k,\ 1 \leq k \leq n)$ données de type 0 ou 1 de paramètre inconnu p.
2. Nombre de données n grand ($n \geq 30$).
3. $H_0 = \{p \leq p_0\}$, $H_1 = \{p > p_0\}$, avec $p_0 \in]0, 1[$.
4. Statistique de test : $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$..
5. Région critique de niveau α : $W = \{\mathbb{Z}_n > a\}$, où a est donné par la loi normale.
6. P-valeur $= \mathbb{P}(Z \geq Z^{obs})$ avec Z normale.

TEST MOYENNE OU VARIANCE

Pour n grand (≥ 30) !

TEST UNILATÉRAL SUR LA MOYENNE.

- Statistique de test : $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\widehat{m} - m_0}{\widehat{s}}$.
- Utilisation de Z gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ pour calculer zone de rejet et P-valeur.

TEST BILATÉRAL SUR LA VARIANCE.

- Statistique de test : $\zeta_n = \sqrt{n}\dfrac{\widehat{s}_n^2 - s_0^2}{s_0^2\sqrt{2}}$.
- Utilisation de Z gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ pour calculer zone de rejet et P-valeur.

Pour n_1 et n_2 grands (≥ 30), $n_1 p_1(1-p_1) \geq 5$ et $n_2 p_2(1-p_2) \geq 5$

STATISTIQUE DE TEST :

- $\widehat{p}_1$ et $\widehat{p}_2$: fréquences empiriques des échantillons.
- $\overline{p} = \dfrac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}$: moyenne pondérée des fréquences empiriques.
- $$Z_{n_1,n_2} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\frac{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}}$$
- Utilisation de Z gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ pour calculer zone de rejet et P-valeur.

EXTENSION si n_1 et n_2 sont grands (supérieurs à 30 en pratique) !

MOYENNES :

$$\zeta = \frac{(\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2)}{\sqrt{\frac{\widehat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{s}_2^2}{n_2}}}$$

VARIANCES :

$$\zeta = (n_1 + n_2 - 2)\frac{\widehat{s}_1^2 - \widehat{s}_2^2}{U^2\sqrt{\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2}}}$$

Sont approximativement normales $\mathcal{N}(0, 1)$.