Le Mans Université

Licence SPI première année

Mathématiques

Alexandre POPIER

Année : 2018–2019

Table des matières

Introduction

“I have nothing to offer but blood, toil, tears, and sweat. [...] You ask, what is our aim ? I can answer in one word. It is victory. Victory at all costs - Victory in spite of all terrors - Victory, however long and hard the road may be, for without victory there is no survival.”

Winston Churchill, May 13th, 1940.

Approximativement : « Je n’ai rien d’autre à offrir que du sang, de la peine, des larmes et de la sueur. [...] Vous demandez, quel est notre but ? Je peux répondre en un mot : la victoire, la victoire à tout prix, la victoire en dépit de la terreur, la victoire aussi long et dur que soit le chemin qui nous y mènera ; car sans victoire, il n’y a pas de survie. »

Un peu grandiloquent et dramatique pour un cours de mathématiques, mais c’est l’idée. Pour survivre en acoustique et dans les cours de physique (optique, électronique, mécanique, thermo, acoustique, etc.), il faut passer l’obstacle mathématique ! Et cela demande du travail, de la sueur (les châtiments corporels étant interdits, il ne devrait pas y avoir de sang).

Le texte qui suit constitue un résumé du cours de mathématiques du premier semestre pour les étudiants de licence SPI première année. Il ne saurait se substituer à un exposé complet et commenté et encore moins à la pratique d’exercices d’application. Il servira néanmoins de référence pour tous les groupes et d’aide-mémoire en ce qui concerne les notions et outils de base de l’analyse.

À la fin de ce polycopié, se trouve un alphabet grec.

Enfin une annexe est ajoutée dans laquelle se trouvent quelques définitions, résultats ou démonstrations. Son contenu n’est pas exigé pour les contrôles, autrement dit vous n’êtes pas obligés de la lire. Néanmoins la partie 9.2 vous permettra de mieux saisir d’où viennent les formules compliquées de la trigonométrie. Quant aux autres parties, vous pouvez les considérer comme de la culture mathématique pour vous montrer que les mathématiques ne sont pas des recettes de cuisine.

Ces notes de cours sont évidemment une version préliminaire et nous serions reconnaissant à tout lecteur de nous faire part des fautes qu'il y aura détectées à l'adresse suivante : *alexandre.popier@univ-lemans.fr* ou *bertrand.lihoreau@univ-lemans.fr*.

Première partie

Fonctions avec argument simple

Chapitre 1

Nombres réels (rappels)

Ce chapitre ne fait pas partie du programme. Il n'est là que pour rappeler les bases de calcul sur les nombres.

Au collège, puis au lycée vous avez rencontré les nombres réels sous des formes différentes. En voici quelques exemples.

— Les nombres *entiers naturels* ou *relatifs*.

— Les nombres *décimaux* $a \times 10^n$ où a et n sont des entiers relatifs ; par exemple 3×10^5 et -13×10^{-2} sont des nombres décimaux.

— Les nombres *rationnels*, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier positif non nul. Un nombre décimal est un nombre rationnel.

— Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme 0,33..., où les points de suspension signifient que toutes les décimales valent 3. Un autre exemple est -4,896461616161..., où les trois points signifient que la suite des décimales continue comme indiquée, c'est-à-dire en mettant alternativement 6 et 1.

En général on ne voit pas sur les premières décimales de règle permettant de trouver les décimales suivantes. Ainsi le nombre π qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est représenté par un développement décimal illimité :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 51 \cdots$$

Ici les points de suspension indiquent simplement qu'il n'y a pas «d'arrêt», ni de règle simple pour obtenir les décimales suivantes.

En revanche les nombres décimaux ont un développement qui se termine par des zéros : $-13 \times 10^{-2} = -0,130000....$ La réciproque est vraie : si un développement décimal se termine par des zéros alors le nombre est décimal.

Un nombre réel peut être représenté par un développement décimal. Mais il existe d'autres «représentations».

— Les nombres définis par des opérations à partir d'autres nombres réels ; ainsi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{-7}$ ou $(1-3^{-7})^{(2^5)}$.

— Des nombres particuliers, fréquents utilisés en mathématiques (ou en physique, mécanique, etc.), qui ont une notation spéciale : le nombre π ou encore le nombre e, base du logarithme népérien.

Notations : dans tout ce cours,

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Ces ensembles vérifient

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ceci signifie qu'un nombre entier positif est un nombre entier, que tout entier est décimal, tout décimal est rationnel, tout rationnel est réel. Autrement dit les ensembles sont *inclus* les uns dans les autres.

1.1 Opérations sur les nombres réels

On ne donnera pas ici de définition précise de l'ensemble $\mathbb{R}$. Néanmoins les propriétés suivantes sont à connaître.

Théorème 1.1 $\mathbb{R}$ *est un corps commutatif qui contient le corps des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$. *L'addition et la multiplication de* $\mathbb{R}$ *prolongent celles de* $\mathbb{Q}$.

Ce théorème résume en deux phrases les règles de calcul suivantes, qui sont celles que vous avez toujours pratiquées :

$$a + b = b + a, \quad 0 + a = a, \quad a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$ab = ba, \quad 1 \times a = a, \quad ab = 1 \Leftrightarrow a = 1/b, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b + c) = ab + ac,$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

On peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser par un nombre réel différent de zéro, sans se soucier de l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations.

1.2 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Tout nombre réel non nul est (strictement) positif ou (strictement) négatif. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul et $\mathbb{R}_-$ les nombres négatifs ou nul. Si a et b sont deux nombres réels, on dit que

Définition 1.1 a *est* inférieur ou égal à b *si le nombre* $b - a$ *est positif ou nul. Cette relation se note* $a \leq b$ *ou* $b \geq a$.

La seconde notation correspond en français à : b est supérieur ou égal à a. Si $a \leq b$ et $a \neq b$, on dit que a *est strictement plus petit que* b, ce qui se note $a < b$ ou $b > a$.

Propriétés 1.1 $\mathbb{R}$ *est muni d'une relation d'ordre, notée* $\leq$, *qui satisfait par définition :*

— $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$ *(réflexivité),*
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y$ *et* $y \leq x \ \Rightarrow x = y$ *(anti-symétrie),*
— $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq y$ *et* $y \leq z \ \Rightarrow x \leq z$ *(transitivité),*

De plus cette relation vérifie également

1. *l'ordre est total, i.e.* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *;*
2. *la relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z,$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

Attention au signe de z dans la multiplication !

On définit le plus grand nombre des nombres réels a et b en posant

$$\max(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } b \geq a \\ a & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

On définit de même $\min(a,b)$, le plus petit des nombres a et b.

Enfin nous dirons qu'un nombre réel x est compris entre a et b si on a ($a \leq b$ et $a \leq x \leq b$) ou bien si on a ($b \leq a$ et $b \leq x \leq a$).

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

L'ordre sur $\mathbb{R}$ permet également de définir la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *Soient a et b des nombres réels.*

1. *Si $a \leq b$, le* segment $[a,b]$ *est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.*
2. *On définit les* intervalles ouverts *:*
   — *si $a < b$, l'intervalle $]a,b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$;*
   — *l'intervalle $]a,+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x$;*
   — *l'intervalle $]-\infty,a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$;*
   — *l'ensemble vide $\emptyset$ et $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.*
3. *Si $a < b$, l'intervalle $]a,b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$ et l'intervalle $[a,b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.*
4. *Les intervalles $]-\infty,a]$ et $[a,+\infty[$ sont formés respectivement des nombres réels x tels que $x \leq a$ et $a \leq x$.*

Il y a donc en tout dix « types » d'intervalles ! Le segment $[a,a]$ est l'ensemble $\{a\}$ et ne comporte qu'un élément a.

Proposition 1.1 *Soit I un intervalle.*
— *Si x et y sont des éléments de I tels que $x < y$, alors on a $[x,y] \subset I$.*

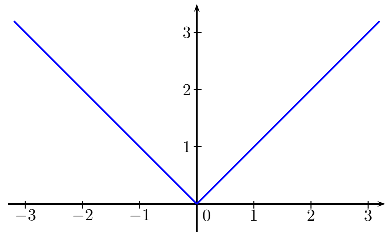


FIGURE 1.1 – Fonction valeur absolue

— *Si I est un intervalle ouvert, alors pour tout nombre $x \in I$, il existe un intervalle ouvert de centre x contenu dans I.*

Définition 1.3 *Si $a < b$, les nombres a et b s'appellent les* extrémités *des intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$. Le nombre positif $b - a$ s'appelle la* longueur *de l'intervalle. Le* centre*, ou* milieu*, est le nombre $c = (b + a)/2$.*

Le centre c vérifie $c - a = b - c = (b - a)/2 > 0$. Donc c appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

1.4 Valeur absolue

Définition 1.4 *Soit x un nombre réel. La* valeur absolue de *x est le nombre réel défini par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction valeur absolue *$x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

La valeur absolue d'un nombre x peut aussi être définie comme le plus grand des nombres x et $-x$. La fonction valeur absolue est donc paire. Rappelons quelques propriétés.

Propriétés 1.2 *Pour tous nombres réels x et y,*

1. $|x| \geq 0$, $-|x| \leq x \leq |x|$, $|-x| = |x|$ *et* $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
2. $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. $|xy| = |x||y|$ *et si* $x \neq 0$, $|1/x| = 1/|x|$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
5. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Proposition 1.2 *Soit r un nombre réel strictement positif. Pour tous les nombres réels a et x*

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r, \qquad |x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

Chapitre 2

Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, nous allons redonner les principales propriétés de fonctions déjà connues et vues au lycée telles que ln, exp, et les fonctions trigonométriques cos et sin. Avant nous allons commencer par rappeler les notions principales sur les fonctions.

2.1 Fonctions

Dans ce cours on va d'abord s'intéresser aux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble U, qui est une partie de $\mathbb{R}$. Cette partie U ne sera jamais vide ou réduite à un élément. Si la fonction f est définie par une formule, il arrivera qu'on n'indique pas l'ensemble de départ U. Celui-ci sera alors la plus grande partie de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) où la formule a un sens.

Exemple 2.1 La fonction $x \mapsto x^2$ désigne précisément l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En revanche la fonction $x \mapsto 1/x$ est l'application $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui à un nombre réel non nul associe son inverse.

Les opérations entre nombres réels s'étendent aux fonctions comme suit.

Définition 2.1 *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur le même ensemble de départ U et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit*

- *la fonction* somme *$f + g : U \to \mathbb{R}$ qui à $x \in U$ associe $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
- *la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ en posant $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$ pour tout $x \in U$;*
- *la fonction* produit *$fg : U \to \mathbb{R}$ en posant $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$.*

Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$, alors la fonction quotient *est $f/g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Pour les relations d'ordre,

Définition 2.2 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit V une partie non vide de U.*

- *La fonction f est* positive ou nulle sur *V si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in V$.*
- *La fonction f est* strictement positive sur *V si $f(x) > 0$ pour tout $x \in V$.*

On définit de même une fonction négative ou nulle *ou une fonction* strictement négative *sur* V*.*

Si g *est une fonction elle aussi définie sur* U*,* f *est* inférieure ou égale à g*, et on note* $f \leq g$*, si on a* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in U$*. On définit de même la relation* supérieure ou égale.

Attention : deux nombres réels sont toujours comparables ($x \leq y$ ou $y \leq x$). Mais il n'est pas toujours possible de comparer deux fonctions. On laisse le soin au lecteur de trouver des contre-exemples.

S'il existe un nombre a tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in V$, f est dite constante sur V. Si $a = 0$, f est nulle sur V. Si de plus V est égal à l'ensemble U sur lequel est définie f, on dit simplement que f est constante de valeur a (l'ensemble U est sous-entendu s'il n'y a pas d'ambiguité possible).

Définition 2.3 (Parité, imparité, périodicité) ***Soit*** U ***une partie de*** $\mathbb{R}$ ***telle que*** $x \in U \Rightarrow -x \in U$*. Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que*

— f *est* paire *si* $f(-x) = f(x)$ *quel que soit* $x \in U$ *;*

— f *est* impaire *si* $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* $x \in U$*.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* T *un nombre réel strictement positif. On dit que* f *est* périodique de période T *(ou encore* T-périodique*) si* $f(x+T) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

La parité (resp. l'imparité) d'une fonction est une propriété de symétrie du graphe de cette fonction par rapport à l'axe des ordonnées (resp. à l'origine). Pour étudier une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $U \cap \mathbb{R}_+$ puis de compléter par symétrie. La périodicité est une propriété de répétition. Pour étudier une fonction T-périodique, il suffit de s'intéresser à un intervalle de longueur T, puis de compléter par des translations.

Définition 2.4 *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* V *une partie non vide de* U*. On dit que*

— f *est* croissante sur V *si pour tous* x *et* y *dans* V*,*

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y);$$

— f *est* strictement croissante sur V *si pour tous* x *et* y *dans* V*,*

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y);$$

— f *est* décroissante sur V *si pour tous* x *et* y *dans* V*,*

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y);$$

— f *est* strictement décroissante sur V *si pour tous* x *et* y *dans* V*,*

$$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Une fonction f *est* monotone sur V *si elle est croissante ou décroissante sur* V*,* strictement monotone *si elle est strictement décroissante ou strictement croissante sur* V*.*

On peut remarquer que f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante, et qu'une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante. Il faut prendre soin de toujours préciser l'ensemble sur lequel il y a (ou non) monotonie d'une fonction.

2.2 Fonctions polynomiales, fractions rationnelles, racines

Vous connaissez déjà les fonctions puissances définies pour les entiers $n \in \mathbb{N}$. En effet si n est un entier positif

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

avec par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions polynomiales sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

où n est un entier naturel et les a_i, $i = 0, \ldots, n$ sont des nombres réels. Si tous les a_i sont nuls, cette fonction constante égale à zéro a pour degré $-\infty$; si $a_n \neq 0$, l'entier n est le degré du polynôme.

Un polynôme est donc la somme et la multiplication par des constantes des monomes $x \mapsto x^k$, pour $k = 0, \ldots, n$.

Exemple 2.2 Les fonctions $x \mapsto 1 + 2x$, $x \mapsto x^2 - 3x^5$ sont des fonctions polynomiales de degré respectif 1 et 5.

Tous les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée si $n \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k,$$

et $f'(x) = 0$ si $n = 0$ ou si la fonction est nulle.

On rappelle qu'en dehors des polynômes constants, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynomiale sont $\pm\infty$, suivant la parité de n et le signe de $a_n \neq 0$.

Enfin il est impératif de connaître les **identités remarquables** suivantes :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.}$$

La *formule du binôme* de Newton (1643 – 1727) peut s'avérer utile pour raccourcir certains calculs : pour tout nombre a et b et tout entier naturel n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.1}$$

En particulier pour $n = 3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Les fractions rationnelles sont des fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m},$$

c'est-à-dire le quotient des deux fonctions polynomiales, la fonction Q devant être non nulle. En général ces fonctions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais uniquement sur $\mathbb{R}$ privé des racines (ou des zéros) de Q, c'est-à-dire des nombres réels x tels que $Q(x) = 0$.

Exemple 2.3 — La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, car $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif).

— La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - 7x}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ privé des points 0, 2 et 3 car $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$.

Il faut parfois faire attention toutefois à ce qu'un zéro du dénominateur peut aussi être un zéro du numérateur :

Exemple 2.4 Ainsi la fraction rationnelle définie par $x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ privé de 4. En effet on a $x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x-2)(x+1)$ et $x^2 - 4x = x(x-4)$, d'où une simplification possible par x.

Sur leur ensemble de définition, les fractions rationnelles sont de classe C^∞. Pour déterminer leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$, il y a une indétermination qu'on lève en mettant en facteur les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur et en effectuant les simplifications adéquates pour se trouver avec une puissance de x multipliée par une fraction dont le comportement à l'infini ne pose pas de problème. Ainsi

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x(1+(1/x))}{x^2(1+(1/x)+(1/x^2))} = \frac{1}{x} \times \frac{1+(1/x)}{1+(1/x)+(1/x^2)},$$

$$\frac{2x^3-7x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^3(2-(7/x^2))}{x^3(1-(5/x)+(6/x^2))} = x^0 \times \frac{2-(7/x^2)}{1-(5/x)+(6/x^2)},$$

$$\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-4x} = \frac{x^3(1-(1/x)-(2/x^2))}{x^2(1-(4/x))} = x \times \frac{1-(1/x)-(2/x^2)}{1-(4/x)}.$$

On rappelle ensuite

Lemme 2.1

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n \geq 1, \\ 1 & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n \leq -1. \end{cases} \qquad et \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n \geq 1\ et\ n\ pair, \\ -\infty & si\ n \geq 1\ et\ n\ impair, \\ 1 & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n \leq -1. \end{cases}$$

2.2.1 Polynômes du second degré

Pour ces fonctions, tout doit être parfaitement connu !

Définition 2.5 *Soient a, b et c réels. On appelle fonction polynôme du second degré toute application*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \end{array}$$

Forme canonique :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Comme on a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2},$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

C'est cette expression qui est nommée forme canonique du polynôme du second degré.
Variation :

Considérons la fonction $x \longmapsto x^2$. Elle est croissante si $x \geq 0$ et décroissante si $x \leq 0$. On en déduit alors le résultat suivant : la fonction $x \longmapsto \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est croissante si $x + \frac{b}{2a} \geq 0$ et décroissante si $x + \frac{b}{2a} \leq 0$. Il en est de même de la fonction $g : x \longmapsto \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

La fonction f varie dans le même sens que la fonction g si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$a>0\ :\ g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

et elle varie en sens contraire si $a<0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$a<0\ :\ g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	$\searrow$	$-\infty$

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ est représentée dans le plan rapporté à un repère orthonormé, par une **parabole** dont l'axe a pour équation $x=-\dfrac{b}{2a}$. Le point $S=(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2})$ est le sommet de la parabole.

<u>Racines du polynôme du second degré</u>

On pose $\Delta=b^2-4ac$. L'expression de la fonction polynôme prend la forme

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

1. Si $\Delta<0$, alors $(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Par conséquent la fonction polynôme ne s'annule pas, ce qui revient à dire que le polynôme du second degré n'admet pas de <u>racines réelles</u>.
2. Si $\Delta>0$, alors

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2=\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et

$$f(x)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Donc le polynôme du second degré admet deux racines réelles :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad \text{et}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$. Le polynôme du second degré admet une racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Remarque : Si $\Delta \geq 0$ alors

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

La somme et le produit des racines sont donnés par les relations suivantes :

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad \text{et} \quad p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

<u>Signe du polynôme du second degré</u>

Rappelons que

$$f(x) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

D'après l'étude précédente,

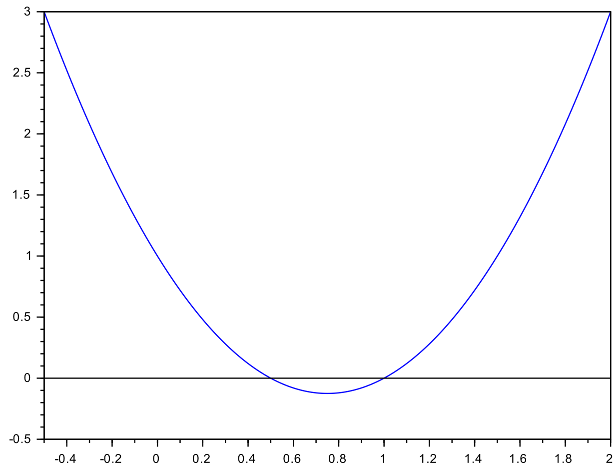
1. Si $\Delta < 0$, alors le signe de $f(x)$ est le signe de a.
2. Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et le signe de $f(x)$ est le signe de a, à l'extérieur des racines et le signe contraire de a, à l'intérieur des racines.
3. Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)^2$ et le signe de $f(x)$ est le signe de a.

Exemple 1 : Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. La courbe de f est la parabole de sommet S d'abscisse $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$. De plus $\Delta = 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$. On obtient la factorisation du polynôme :

$$f(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 1).$$

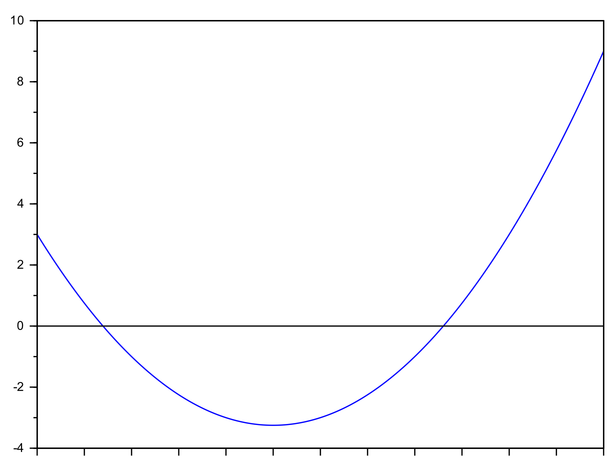
Et enfin

$$f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[\\ < 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$



Exemple 2 : Un mouvement rectiligne de loi horaire $u = f(t)$ est dit uniformément varié (ou à accélération constante) si f est une fonction polynôme du second degré.

Soit $u = t^2 - 5t + 3$. Considérons le déplacement du mobile M d'abscisse $f(t)$ sur l'axe $(O, \overrightarrow{U})$ pour les réels $t \geq 0$. En $t = 0$, le mobile est à la position M_0 d'abscisse 3, il se déplace ensuite dans le sens contraire de l'axe pour atteindre la position M_1 d'abscisse $\dfrac{-13}{4}$ (en passant par l'origine en $t = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$), puis change de direction pour aller dans le sens croissant des abscisses (en passant de nouveau par O en $t = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$).



Position d'un réel par rapport par rapport aux racines du polynôme.

On considère le cas où la fonction polynôme du second degré admet 2 zéros distincts (soit $\Delta > 0$). Nous avons alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Il en résulte que pour un réel x_0, le signe de $af(x_0)$ est le même que celui de $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$. Par conséquent :

— si $af(x_0) < 0$ alors $x_0 \in]x_1, x_2[$;

— si $af(x_0) > 0$ et si $x_0 < \frac{S}{2}$, alors $x_0 \in] - \infty, x_1[$.

2.2.2 Racine n-ième.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La valeur en 0 est 0 et l'on a $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. Alors pour tout nombre réel y positif ou nul, l'équation $y = x^n$, d'inconnue x, admet une et seule solution positive ou nulle.

Définition 2.6 *Cette unique solution est la racine n-ième et se note* $\sqrt[n]{y}$ *ou* $y^{\frac{1}{n}}$. *Si* $n = 2$, *c'est la* racine carrée *que l'on note simplement* $\sqrt{y} = y^{1/2}$.

Ainsi on crée une fonction racine n-ième définie sur $[0, +\infty[$ par la formule

$$x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow y = x^n.$$

C'est une fonction continue et strictement croissante. De plus :

— pour tout x et y positifs ou nuls, $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

— Si $x \in [0, 1]$, alors $x^n \leq x$ et en prenant la racine n-ième, on obtient $x \leq \sqrt[n]{x}$.

— Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^n$, donc $\sqrt[n]{x} \leq x$.

2.3 Fonctions logarithme

La fonction logarithme.

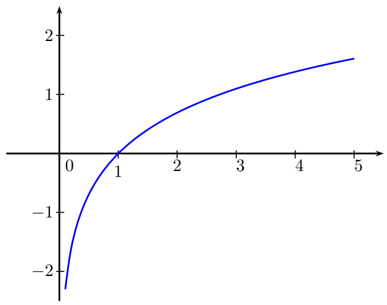
Définition 2.7 *On appelle* logarithme népérien, *que l'on note* ln, *l'unique fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \textit{et } \ln(1) = 0.$$

Souvent on l'appelle simplement logarithme. Voici ces principales propriétés :

Propriétés 2.1 *C'est une fonction continue (et de classe* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$*) et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$. *De plus*

1. *pour tout x et y strictement positifs,*
   (a) $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$
   (b) $\ln(1/x) = -\ln(x)$
   (c) $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$



x	0		1		$+\infty$
$\ln' x = 1/x$		$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2.1 – Fonction logarithme

(d) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

2. *Enfin pour tout* $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Rappelons également quelques limites usuelles du logarithme :

Propriétés 2.2 *1.* $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Remarque 2.1 *La fonction* $x \mapsto \ln(|x|)$ *est définie sur* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *On vérifiera que cette fonction est dérivable et a pour dérivée* $1/x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.

Si le logarithme népérien est considéré mathématiquement comme naturel, ce n'est pas forcément le plus classique en acoustique. On utilise plus fréquemment le logarithme de base 10.

Définition 2.8 *Soit* $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. *On appelle* logarithme de base a *l'application définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

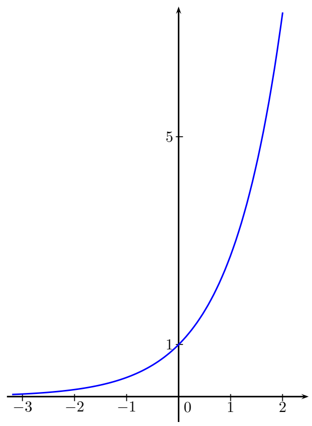
Quand $a = 10$, *on ne précise pas la base. Autrement dit,* $\log = \log_{10}$.

Toutes ces fonctions logarithme sont donc proportionnelles les unes aux autres. Elles sont donc toutes définies sur $]0,+\infty[$, croissantes, ont toutes les mêmes limites en 0 et en $+\infty$. De plus pour tout a, on a toujours

$$\boxed{\log_a(1) = 0, \qquad \log_a(a) = 1, \qquad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)}.$$

Pour le logarithme décimal, il vérifie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \log(10^n) = \log_{10}(10^n) = n.$$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp' x = \exp x$		$+$	1	$+$	
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2.2 – Fonction exponentielle

2.4 La fonction exponentielle.

Les propriétés de la fonction ln font que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x > 0$ tel que $y = \ln(x)$. Ce nombre x est l'exponentielle de y et est noté $\exp(y)$.

Définition 2.9 *La* fonction exponentielle, *notée* exp, *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $]0, +\infty[$ *et est telle que*

$$\forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y = \ln(x) \Longleftrightarrow \exp(y) = x.$$

Ainsi on a

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln x) = x, \qquad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp x) = x.$$

On en déduit également les propriétés suivantes :

Propriétés 2.3 *La fonction* exp *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *dérivable avec* $\exp'(x) = \exp(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *De plus pour tout* x *et* y *dans* $\mathbb{R}$ *:*
- $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$, *d'où* $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$,
- $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$,
- *pour tout* $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$.

Concernant les limites usuelles concernant cette fonction, on obtient :

Propriétés 2.4
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$.

Notation. Le nombre réel $\exp(1)$ se note e ; on a donc $\ln(e) = 1$. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, il vient $\exp(1) > \exp(0)$, donc $e > 1$.

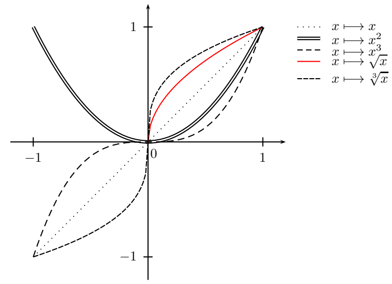


FIGURE 2.3 – Fonctions puissance

2.4.1 Fonctions puissance.

Soit a un nombre réel strictement positif.

— Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n \ln a) = (\exp \ln a)^n = a^n$.

— Supposons que n est un entier positif au moins égal à 2 et posons $y = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$. On a $y^n = \exp(n(1/n) \ln a) = a$. Puisque y est strictement positif, on en déduit $y = \sqrt[n]{a}$ par définition de la racine n-ième. On a donc

$$\sqrt[n]{a} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right), \text{ pour tout } a > 0.$$

Plus généralement

Définition 2.10 *soit a un nombre strictement positif et soit $b \in \mathbb{R}$. On définit le nombre réel a^b, appelé a* puissance *b, en posant*

$$\boxed{a^b = \exp(b \ln a).}$$

On peut donc élever un nombre **strictement positif** à une puissance réelle quelconque. Les règles de calcul sont ensuite celles dont on a l'habitude.

Proposition 2.1 *Pour tous nombres réels b et c :*

— $1^b = 1$.

— $x^{b+c} = x^b x^c$ *et* $(x^b)^c = x^{(bc)}$ *pour tout* $x > 0$ *;*

— *si* $x > 0$ *et* $y > 0$*, alors* $(xy)^c = x^c y^c$ *;*

— *si* $x > 0$*, alors* $x^{-c} = 1/(x^c)$.

Méthode. Pour étudier une expression de la forme a^b où b n'est pas un entier, revenez à la définition : $a^b = \exp(b \ln a)$.

Définition 2.11 *Soit α un nombre réel. La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ s'appelle la* fonction puissance d'exposant *α.*

Propriétés 2.5 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction puissance d'exposant α*

1. *est une application continue sur* $]0,+\infty[$*, strictement monotone (croissante si* $\alpha > 0$ *et décroissante si* $\alpha < 0$*),*
2. *est une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $]0,+\infty[$.
3. *Enfin elle est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *avec pour dérivée la fonction* $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Concernant les limites on a

Propriétés 2.6

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 0, \\ 1 & si\ \alpha = 0, \\ +\infty & si\ \alpha > 0. \end{cases}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha < 0, \\ 1 & si\ \alpha = 0, \\ 0 & si\ \alpha > 0. \end{cases}$

2.4.2 Fonction exponentielle de base a.

Définition 2.12 *Soit* a *un nombre réel strictement positif fixé. La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = a^x = \exp(x\ln(a)),$$

s'appelle la fonction exponentielle de base a.

Remarquons que si $a = e = \exp(1)$, alors $\ln(a) = 1$ et donc on obtient la relation et la notation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\exp(x) = e^x.}$$

La fonction exponentielle de base e est donc l'exponentielle ordinaire. On utilisera par la suite indifféremment les deux notations.

Maintenant pour un $a > 0$ quelconque, on a les relations suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(\exp(x\ln(a)))}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x.$$

De plus pour tout $x > 0$:

$$a^{\log_a(x)} = \exp(\log_a(x)\ln(a)) = \exp(\ln(x)) = x.$$

Autrement dit on a la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0, \qquad y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a(y).$$

Cette relation doit être retenue dans deux cas :

— $a = e = \exp(1)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0, \qquad \boxed{y = e^x = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y).}$$

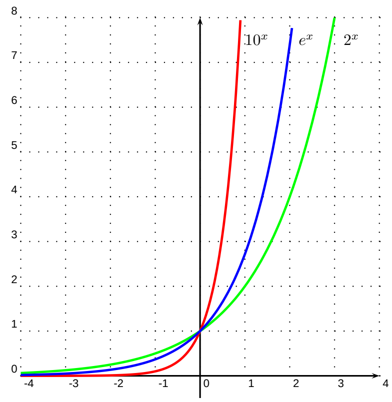


FIGURE 2.4 – Fonctions exponentielles de base a

— $a = 10$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0, \qquad \boxed{y = 10^x \Longleftrightarrow x = \log(y).}$$

En voici quelques propriétés.

Propriétés 2.7 *Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Si $a > 1$ cette fonction est strictement croissante ; si $a < 1$, elle est strictement décroissante. De plus elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée $x \mapsto (\ln a)a^x$.*

2.5 Fonctions trigonométriques

2.5.1 Cosinus et sinus

Les fonctions cos et sin sont définies, continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$. Ce sont des fonctions 2π- périodiques, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x),\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Quelques propriétés pour étudier ces fonctions :

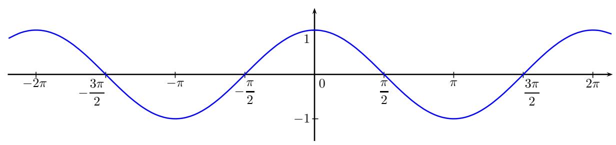
— L'étude sur un intervalle de longueur 2π est donc suffisante. On complète ensuite par des translations de vecteurs $n2\pi \overrightarrow{i}$

— cos est paire, sin est impaire, on peut donc encore réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. La courbe de cos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $(\pi/2, 0)$ et celle de sin est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$ et compléter par symétrie.

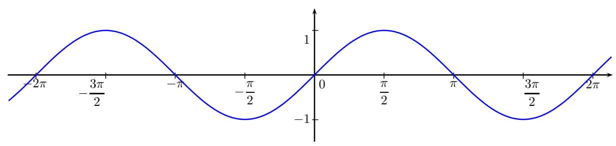
Propriétés 2.8 *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x).$$



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

FIGURE 2.5 – Graphe et tableau de variation de cosinus



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

FIGURE 2.6 – Graphe et tableau de variation de sinus

La fonction cos *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$ *;* sin *est strictement croissante sur* $[0, \pi/2]$.

Pour terminer remarquons que comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$, la courbe de sinus est image de celle de cosinus par la translation de longueur $(\pi/2)$.

2.5.2 Tangente

La fonction tangente est définie comme le quotient :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Comme on divise par $\cos(x)$, ce dernier ne doit pas s'annuler. Donc tan est définie sur l'ensemble D qui est la réunion des intervalles $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme quotient de fonctions continues et dérivables,

Propriétés 2.9 *La fonction tangente est continue et dérivable sur son ensemble de définition D. De plus pour tout $x \in D$,*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

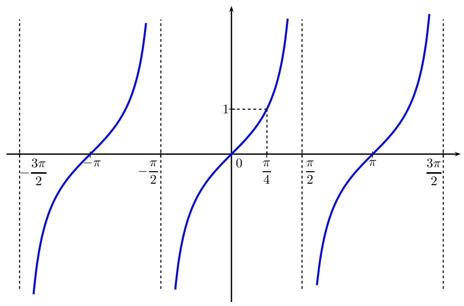
De plus cette fonction est π-périodique et impaire.

On a donc les relations suivantes :

- $\tan(-x) = -\tan x$ (*imparité*).
- $\tan(x + \pi) = \tan x$ (π-*périodicité*).

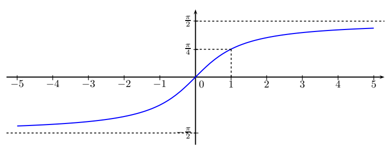
Quelques valeurs particulières :

$$\tan 0 = 0, \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2.7 – Graphe et tableau de variation de tangente



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan' x = 1/(1+x^2)$		$+$	1	$+$	
$\arctan x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

FIGURE 2.8 – Graphes et tableau de variation de Arc tangente

2.5.3 Formules trigonométriques

On renvoie le lecteur à la fin de ce cours pour les formules de trigonométrie classiques.

2.5.4 La fonction Arc tangente.

La fonction tangente est continue et dérivable et si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. La fonction tangente est donc strictement croissante sur le segment $]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) =]-\infty, \infty[$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre x dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que

$$y = \tan(x).$$

Ce nombre x est l'arc tangente de y et se note $\mathrm{Arctan}(y)$ ou $\arctan(y)$. On crée ainsi une fonction Arc tangente, définie sur $\mathbb{R}$ et notée Arctan, qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\mathrm{Arctan} x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \mathrm{Arctan}(\tan x) = x.$$

Attention : la dernière égalité n'est vraie que sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Propriétés 2.10 *La fonction* Arctan *est continue, strictement croissante et impaire. De plus elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ *et*

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\pi/2, \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \pi/2.$$

Voici d'autres propriétés liant les fonctions trigonométriques.

Propriétés 2.11 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\cos(\mathrm{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\mathrm{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

1. *si* $x > 0$, $\mathrm{Arctan} x + \mathrm{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$,
2. *si* $x < 0$, $\mathrm{Arctan} x + \mathrm{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Chapitre 3

Limite, continuité, dérivée

3.1 Limite d'une fonction

La notion précise de limite n'est pas au programme. Ceux qui sont intéressés iront lire le paragraphe consacré en annexe.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou bien est une extrémité de I.

Définition 3.1 (intuitive de la limite) *Soit ℓ un nombre réel. On dit que f* a pour limite ℓ en x_0*, ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0, si $f(x)$ est aussi près que l'on veut de ℓ à condition de choisir x assez près de x_0, mais différent de x_0. Cette propriété se note* $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.}$

Par définition il revient au même de dire que $f(x)$ tend vers ℓ ou que $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On a ainsi les équivalences très utiles

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0.$$

Remarque 3.1 *Dans la définition de la limite en x_0, la fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 et si elle l'est, la valeur $f(x_0)$ n'a aucune influence sur l'existence ou la valeur de la limite.*

Ainsi il est possible de chercher si $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ a une limite quand x tend vers 1.

Définition 3.2 (Limite à l'infini) *Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$, $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si ℓ est un nombre réel, on dit que f* a pour limite ℓ en $+\infty$*, ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, si $f(x)$ est aussi près que l'on veut de ℓ à condition de choisir x de plus en plus grand. Cette propriété se note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.*

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si ℓ est un nombre réel, on dit que f a pour limite ℓ en

$-\infty$, ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$, si $f(x)$ est aussi près que l'on veut de ℓ à condition de choisir x de plus en plus petit (ou de plus en plus négatif). Cette propriété se note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Propriétés 3.1 *Si une fonction a une limite, cette limite est unique.*

Nous parlerons désormais de **la** limite d'une fonction en x_0, en $+\infty$ ou $-\infty$. Mais attention la limite d'une fonction en un point n'existe pas toujours.

Définition 3.3 (Limite infinie)

— *On dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0, *et l'on note*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

si quand x se rapproche de x_0, $f(x)$ devient de plus en plus grand.

— *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, *et l'on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

si $f(x)$ est de plus en plus grand quand x est lui aussi de plus en plus grand.

— *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, *et l'on note*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

si $f(x)$ est de plus en plus grand quand x est de plus en plus négatif.

— *On dit que $f(x)$* tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 *(ou bien* quand x tend vers $+\infty$, *ou bien* quand x tend vers $-\infty$*), si $-f(x)$ tend vers $+\infty$. Cette propriété se note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ dans le cas, par exemple, de la limite en x_0.*

3.1.1 Opérations sur les limites

Sont à connaître toutes les limites des fonctions usuelles vues au chapitre 2. À partir de celles-ci il faudra être capable d'**utiliser les opérations** qui vont être décrites ci-dessous pour déterminer une limite d'une autre fonction. Toutes ces opérations peuvent être démontrées rigoureusement. Mais dans la pratique il faut surtout avoir un peu de bon sens. Ainsi si deux fonctions tendent vers $+\infty$ au même point x_0, elles sont donc très grandes près de ce point. La somme ou le produit seront donc forcément encore plus grands et tendront aussi vers $+\infty$. Pour la différence ou le quotient c'est beaucoup moins clair et tout va dépendre de laquelle des deux fonctions l'emporte sur l'autre. On parle alors de forme indéterminée.

Les **formes indéterminées** correspondent à des cas où il n'y a pas de règle générale permettant de déterminer la limite. Par exemple il n'y a pas de résultat général pour le produit d'une fonction qui tend vers zéro par une fonction qui tend vers $+\infty$: selon les cas, le résultat peut d'ailleurs être 0 ou $\pm\infty$ ou une limite finie non nulle, ou bien il n'y a pas de limite ; on dit que $0 \times \infty$ est une forme indéterminée. Il existe d'autres formes indéterminées comme $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $(+\infty - \infty)$, 1^{∞}, ou ∞^0. Pour lever les indéterminations, c'est-à-dire pour voir si de telles expressions ont une limite et éventuellement calculer cette limite, il suffit parfois de transformer convenablement l'expression (ce qui n'est pas toujours simple) et de se ramener aux énoncés précédents. Souvent il faudra faire appel à des techniques plus sophistiquées (dérivabilité, développements limités, etc.).

Les tableaux ci-dessous résument les cas usuels. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a dans I ou un bord de I (peut donc être $+\infty$ ou $-\infty$). l et l' sont deux réels finis.

Pour la somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Pour le produit :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
ℓ avec $\ell>0$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ avec $\ell>0$	$-\infty$	$-\infty$
ℓ avec $\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ avec $\ell<0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	forme indéterminée
0	$-\infty$	forme indéterminée

Si une fonction g tend vers 0 quand x tend vers a avec $g(x)>0$ (resp. $g(x)<0$) pour tout x proche de a, la limite est notée 0^+ (resp. 0^-) :

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0^+ \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0^-.$$

Pour le quotient :

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ', avec $\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
ℓ avec $\ell > 0$	0^+	$+\infty$
ℓ avec $\ell > 0$	0^-	$-\infty$
ℓ avec $\ell < 0$	0^+	$-\infty$
ℓ avec $\ell < 0$	0^-	$+\infty$
0	0	forme indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	forme indéterminée

Pour les fonctions usuelles (logarithme, exponentielle ou puissance), on peut supprimer une indétermination grâce au théorème suivant.

Théorème 3.1 (Croissances comparées)

1. *Si α et β sont deux nombres réels et si $\alpha < \beta$, alors*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = +\infty.$$

2. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

3. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, au voisinage de $+\infty$,*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta \exp(-\alpha x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\beta \exp(\alpha x) = +\infty.$$

4. *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

3.2 Continuité d'une fonction

Cette notion a logiquement sa place après celle de limite, mais n'est pas cruciale en première lecture.

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 3.4 *Si $x_0 \in I$, on dit que la fonction f est* continue en *x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. La fonction f est* continue sur *I, si quel que soit $x_0 \in I$, f est continue en x_0.*

La proposition sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un inverse permet d'énoncer :

Proposition 3.1 *Soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in I$.*

— *Les fonctions $f+g$, fg et λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0.*
— *Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction f/g est continue en x_0.*
— *La composée de deux fonctions continues est continue.*

À retenir : toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition !

Voici un exemple de fonction non continue. On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1/2, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle *fonction échelon* ou *fonction de Heaviside* et reviendra assez fréquemment en acoustique. Elle n'est pas continue en zéro. En effet si x se rapproche de zéro mais en restant négatif, alors $f(x)$ vaut toujours 0. Donc

$$\lim_{x\to 0,\ x<0} f(x) = 0 \neq 1/2 = f(0).$$

De même

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} f(x) = 1 \neq 1/2 = f(0).$$

Elle n'est donc pas continue. Elle a un saut en zéro.

Rappelez vous que vos pires cauchemars peuvent toujours se réaliser en analyse. Donc ne soyez pas naïf et évitez d'énoncer des résultats qui ne seraient pas dans le cours ou démontrables à partir du cours. Voici un cauchemar. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \ (x \text{ non rationnel}), \\ 1/q & \text{si } x = p/q \ (x \text{ rationnel sous forme de fraction irréductible}). \end{cases}$$

Cette fonction est parfaitement définie mais ne cherchez pas à la tracer. En effet elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (l'ensemble des nombres irrationnels) et discontinue sur $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels) !

3.3 Dérivée en un point, fonction dérivée, développement limité

La dérivée est l'outil principal pour étudier une fonction. Pour bien utiliser cette notion, il faut connaître parfaitement la définition et s'entraîner à calculer des dérivées rapidement et sans erreur.

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un élément de I. On appelle *taux d'accroissement* entre les points x et x_0 de la fonction f la quantité :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Graphiquement si $\mathcal{C}$ est le graphe de la fonction f dans le plan, on note M_0 le point $(x_0, f(x_0))$ et si $x \in I$, $x \neq x_0$, on note M le point $(x, f(x))$; par définition les points M_0 et M appartiennent à $\mathcal{C}$. Le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la *pente* de la droite passant par M_0 et M.

Si $f(x)$ représente la position (en mètre) d'un mobile au temps x (en seconde), alors le taux d'accroissement est la distance parcourue entre les instants x_0 et x divisée par la durée de temps. Ce taux est donc en mètre par seconde : c'est la vitesse du mobile durant cet intervalle de temps.

Définition 3.5 *La fonction f est* dérivable en x_0 *si le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite finie quand x tend vers x_0. La limite* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est notée :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I *si quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$, s'appelle la* dérivée de f.

On note $D(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

On a dit que le taux d'accroissement est la pente de la droite (M_0M). Supposons que f est dérivable en x_0. Alors intuitivement, quand x tend vers x_0, la droite (M_0M) a pour position limite la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$. Par définition cette droite s'appelle la *tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0*. Ainsi :

Propriétés 3.2 *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour tangente au point M_0 la droite d'équation $y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.*

Si $f(x)$ représente la position (en mètre) d'un mobile au temps x (en seconde), alors $f'(x)$ est sa vitesse (instantanée) à l'instant x.

Remarque sur la notation : en mathématiques la dérivée est notée f'. Le nom de la variable n'apparaît pas en tant que tel. La notation équivalente $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ indique qu'on dérive par rapport à la variable x et la dérivée est un accroissement infinitésimal de f divisé par un accroissement infinitésimal de x. Parfois vous croiserez aussi la notation

$$\dot{f}(t) = f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$$

pour indiquer une dérivée ; notamment en mécanique quand la variable est le temps.

Développement limité au premier ordre

La dérivée (et plus généralement le calcul différentiel) permet de rendre linéaire (au moins localement) une fonction dérivable f aussi compliqué soit-elle. En effet supposons

f dérivable en x_0 et définissons une fonction ε en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si } x \neq x_0, \qquad \text{et } \varepsilon(x_0) = 0.$$

Pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas les deux membres sont égaux à $f(x_0)$. Par ailleurs

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = \varepsilon(x_0),$$

donc la fonction ε est continue en x_0. Finalement si f est dérivable en x_0, il existe une fonction ε continue en x_0 telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{quel que soit } x \in I.}$$

La relation précédente s'appelle le **développement limité de f à l'ordre 1**. Par exemple si $f(t) = \sin(t)$, alors $f'(t) = \cos(t)$ et donc près de $t_0 = 0$:

$$\sin(t) = t + t\varepsilon(t), \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Cette relation montre que pour x proche de x_0, f est en effet une application linéaire (une droite donc) :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = f'(x_0)x + (f(x_0) - x_0 f'(x_0)) = ax + b.$$

Dans cette approximation on néglige le terme $(x - x_0)\varepsilon(x)$ qui est bien plus petit que les autres quand x est près de x_0. Dans notre exemple pour t proche de 0, $\sin(t) \approx t$. Graphiquement la courbe représentative de f est remplacée (localement) par une droite (sa tangente).

Cette propriété caractérise les fonctions dérivables en x_0.

Proposition 3.2 *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un nombre réel a et une fonction ε ayant les propriétés suivantes :*

— *ε est continue en x_0 et $\varepsilon(x_0) = 0$,*

— *$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in I$.*

Dans ce cas, le nombre a est égal à $f'(x_0)$. Autrement dit une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 (ou du premier ordre) en x_0.

Une conséquence importante est la suivante.

Corollaire 3.1 *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

En effet si $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, alors les règles de calcul sur les limites donnent :

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} (x - x_0)\varepsilon(x) = 0.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque 3.2 *Une fonction peut être continue au point x_0 sans être dérivable. Par exemple pour la fonction valeur absolue $f : t \longmapsto |t|$, f est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en zéro. De même la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$, mais pas dérivable en zéro. Là aussi attention à ne pas prendre ses désirs pour la réalité : il existe plein (une infinité) de fonctions continues partout et dérivables nulle part.*

Dérivée et forme indéterminée

La dérivation peut être utilisée par supprimer une forme indéterminée. En effet si f est dérivable en x_0, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Or dans la fraction le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro (car f est continue en x_0). Donc a priori la limite est une forme indéterminée. Voici quelques exemples, dont on laisse au lecteur la preuve :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1, \qquad \lim_{t\to 2\pi} \frac{\cos(t) - 1}{t - 2\pi} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Monotonie et dérivée

Terminons ce paragraphe par une règle bien connue.

Lemme 3.1 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*
- *f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.*

Dérivées successives

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ; par définition cela signifie que f est dérivable en tout point de I. Nous avons alors défini la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout x appartenant à I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Si la fonction f' est à son tour dérivable en tout point de I, alors la fonction $(f')'$ dérivée de f' est définie sur I ; cette fonction se note

$$f'' = f^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

et s'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement si n est un entier positif ou nul, on définit, si elle existe, la dérivée n-ième de f en posant $f^{(0)} = f$ par convention et

$$f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)' \text{ pour tout entier } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq n.$$

Si la dérivée n-ième de f existe, on dit que f est n fois dérivable.

Un peu de vocabulaire. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe C^p sur I si et seulement si f est (au moins) p fois dérivable et la dérivée p-ième $f^{(p)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I (ou de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$). Pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^p(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^p sur I.

Si f est de classe C^p sur I, alors $f^{(p)}$ est continue sur I et $f, f', \ldots, f^{(p-1)}$ sont aussi continues car dérivables. Si $f \in C^\infty$ sur I, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est continue sur I. En particulier $C^0(I) = C(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I. Les fonctions dans $C^1(I)$ sont dites *continuement dérivables*. Enfin on a les inclusions suivantes :

$$C^\infty(I) \subset \ldots \subset C^{p+1}(I) \subset C^p(I) \subset \ldots \subset C^1(I) \subset D(I) \subset C(I).$$

Toutes ces inclusions sont strictes, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions qui sont continues mais pas dérivables, dérivables mais pas à dérivée continue, etc.

3.4 Calcul des dérivées

D'abord **toutes les dérivées des fonctions usuelles sont à connaître par coeur**. Ensuite pour une fonction plus compliquée on utilise les règles de dérivation qui suivent.

Dérivée d'une fonction constante. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction constante et soit x_0 un élément de I. Quel que soit $x \in I$, nous avons $u(x) = u(x_0)$. Le rapport $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ est égal à 0, par conséquent $u'(x_0) = 0$. Ainsi une fonction constante a une dérivée nulle en tout point.

Dérivée d'une somme et du produit par une constante. Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors les fonctions $f+g$ et λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sont dérivables en x_0 et

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)}\,.$$

Dérivée d'un produit. Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors la fonction fg est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}\,.$$

Dérivée de l'inverse. Soit f dérivable en x_0. Si $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}}\,.$$

En utilisant les formules donnant la dérivée d'un produit et d'un inverse, on obtient :

Corollaire 3.2 *Si f et g sont des fonctions dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en x_0 et*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}\,.$$

Tableau des dérivées. Enfin on renvoie au tableau des dérivées situé dans le formulaire, qui recense les dérivées des fonctions usuelles. Ce tableau est à connaître par cœur !

3.5 Étude de fonctions

À partir de maintenant, vous avez tous les outils pour étudier n'importe quelle fonction combinaison des fonctions usuelles. L'étude d'une fonction f suivra toujours la trame suivante.

1. Comprendre comment la fonction est construite à partir des fonctions usuelles (somme, produit, quotient, multiplication par une constante, etc.).
2. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Trois cas doivent vous interpeler : une division (on ne divise pas par zéro), un logarithme (non défini pour des valeurs négatives ou nulles), une racine (non définie pour des valeurs strictement négatives).
3. Calculer la dérivée f' et essayer de la factoriser pour pouvoir déterminer le signe de la dérivée. Cela permettra de connaître les variations de f.
4. Trouver les limites au bord du domaine de définition.
5. Établir le tableau de variations.

Concernant le graphe de f, on rappelle que doivent figurer :
- les points où la fonction n'est pas définie ;
- les points où la dérivée s'annule (tangente horizontale) ;
- et plus généralement toutes les valeurs remarquables du tableau de variations.

En particulier
- si f admet une limite infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors une asymptote verticale doit figurer.
- Si f admet une limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors une asymptote horizontale doit être représenté.

Voici un exemple détaillé pour illustrer notre propos. On souhaite étudier la fonction

$$f(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x-2}.$$

1. Il s'agit de la somme de trois fonctions : $x \mapsto \ln(x)$, la fonction constante égale à 1, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-2}$.
2. Pour que la première soit correctement définie, il faut que $x > 0$. La fonction constante est toujours bien définie. Quant à la troisième, il faut éviter la division par zéro, donc $x \neq 2$. Si on rassemble toutes ces conditions, on obtient :
$$D_f =]0,2[\cup]2,+\infty[= \{x > 0, x \neq 2\}.$$
3. On applique les règles de dérivation pour obtenir pour $x > 0$ et $x \neq 2$:
$$f'(x) = \frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - x}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}.$$
Le dénominateur est strictement positif car $x > 0$ et $x \neq 2$. Le numérateur est un polynôme de degré 2, dont le discriminant
$$\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 9$$
est positif. Donc il a deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$. La dérivée s'annule donc en 1 et 4 et a le même signe que $x^2 - 5x + 4$.
4. Passons à la recherche des limites. Commençons par la limite en $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0, et le logarithme tend vers $+\infty$. Donc
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Quand x tend vers 0 avec $x > 0$, $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers $-1/2$. Comme le logarithme tend vers $-\infty$, on obtient
$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty.$$
Enfin quand x tend vers 2, $\ln(x) + 1$ tend vers $\ln(2) + 1$. Et $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers $+\infty$ si $x > 2$ tend vers 2 et vers $-\infty$ si $x < 2$ tend vers 2.
5. Voici le tableau de variations de f.

x	0		1		2	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Reste à calculer

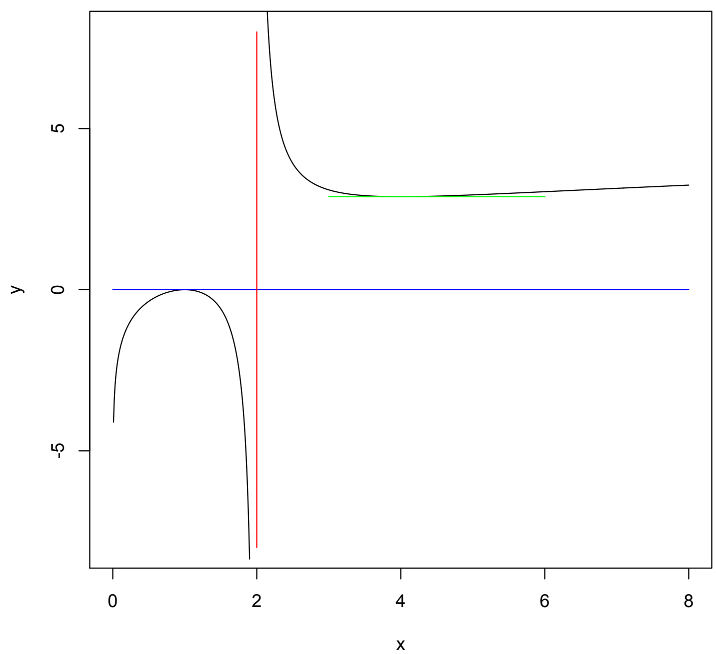
$$f(1) = \ln(1) + 1 + \frac{1}{1-2} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Et

$$f(4) = \ln(4) + 1 + \frac{1}{4-2} = \frac{3}{2} + 2\ln(2) \approx 2,9 > 0.$$

Avant le tracé des fonctions, remarquons que la fonction f admet au point 1 un maximum local puisque pour tout $x \in]0,2[$, $f(x) \leq f(1) = 0$. De même au point 4, on a un minimum local car pour tout $x > 2$, $f(x) \geq f(4)$.

Voici le graphe de f



Deuxième partie

Trigonométrie et nombre complexe

Chapitre 4

Trigonométrie

Attention : tous les angles seront toujours mesurés en radians. Pensez à régler correctement vos calculatrices. On rappelle qu'un angle droit vaut 90 degrés, $\pi/2$ radians et pour les géomètres 100 grades.

4.1 Triangle rectangle, cercle trigonométrique

En utilisant les propriétés du triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en C (voir figure 4.1). Le segment AB est l'hypoténuse, de longueur h, les segments AC et BC sont perpendiculaires, de longueur respective a et b. Le *théorème de Pythagore* nous donne :

$$h^2 = a^2 + b^2 \geq a^2.$$

On note $\widehat{BAC}$ l'angle formé par les segments AB et AC. Ainsi le rapport a/h des longueurs du côté adjacent AC et de l'hypoténuse AB vérifie :

$$\frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.$$

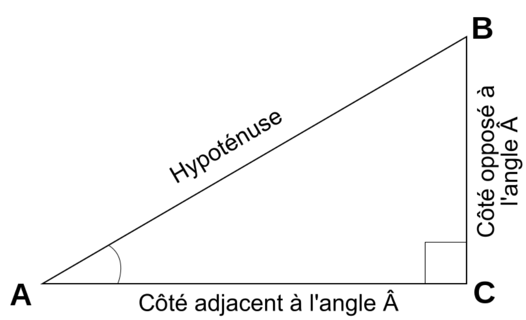


FIGURE 4.1 – Triangle rectangle en C

Si x est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en radians, $0 < x < \pi/2$, alors on pose

$$0 \leq \cos(x) = \frac{a}{h} \leq 1.$$

De même le rapport de la longueur b du côté opposé BC divisé par la longueur h de l'hypoténuse vaut :

$$0 \leq \sin(x) = \frac{b}{h} \leq 1.$$

Définition 4.1 *On appelle* cosinus de x*, noté* $\cos(x)$*, le rapport des longueurs côté adjacent sur hypoténuse et* sinus de x*, noté* $\sin(x)$*, le rapport des longueurs côté opposé sur hypoténuse.*

Toujours avec le théorème de Pythagore,

$$b = \sin(x)h, \ a = \cos(x)h \Longrightarrow h^2 = a^2 + b^2 = [\cos^2(x) + \sin^2(x)]h^2$$

et ainsi

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.}$$

Dans les cas extrêmes où x vaut zéro ou $\pi/2$ (triangle aplati), alors $a = h$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et $b = h$. Donc

$$\boxed{\cos(0) = 1, \ \sin(0) = 0, \qquad \cos(\pi/2) = 0, \ \sin(\pi/2) = 1.}$$

Supposons maintenant que le triangle soit isocèle, c'est-à-dire que $a = b$ et $x = y = \dfrac{\pi}{4}$. Dans ce cas $h^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ et ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{h} = \frac{b}{h} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Si $x = \pi/6$ (30 degrés), alors le triangle ABC est la moitié d'un triangle équilatéral, dont AB est un côté et AC une hauteur. Ainsi $h = 2b$. On en déduit avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$ que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On rappelle que dans un triangle la somme des angles en radians fait π (ou 180 degrés). Donc si y est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ (en radians), alors

$$x + y + \frac{\pi}{2} = \pi \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} - x.$$

La raisonnement précédent appliqué à l'angle $\widehat{ABC}$ montre alors que

$$\cos(y) = \frac{b}{h} = \sin(x) \Longrightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} \tag{4.1}$$

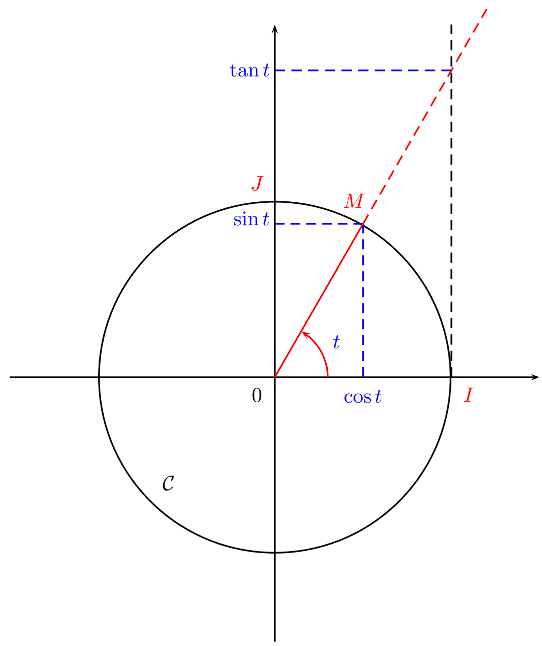


FIGURE 4.2 – Cercle trigonométrique

et

$$\sin(y) = \frac{a}{h} = \cos(x) \Longrightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).} \tag{4.2}$$

Comme $\pi/3 = \pi/2 - \pi/6$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si on résume, la géométrie du triangle rectangle permet de trouver toutes les propriétés usuelles du cosinus et du sinus. La tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ est définie comme le rapport côté opposé sur côté adjacent, soit

$$\tan(x) = \frac{b}{a} = \frac{b/h}{a/h} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

En utilisant le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan, on note $I(1,0)$ et $J(0,1)$. $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique, de centre O et de rayon 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv t[2\pi]$ (l'angle entre les vecteurs vaut t). Ces notations sont illustrées sur la figure 4.2.

Définition 4.2 *On appelle* cosinus de t*, noté* $\cos(t)$*, l'abscisse de* M *et* sinus de t*, noté* $\sin(t)$*, l'ordonnée de* M*.*

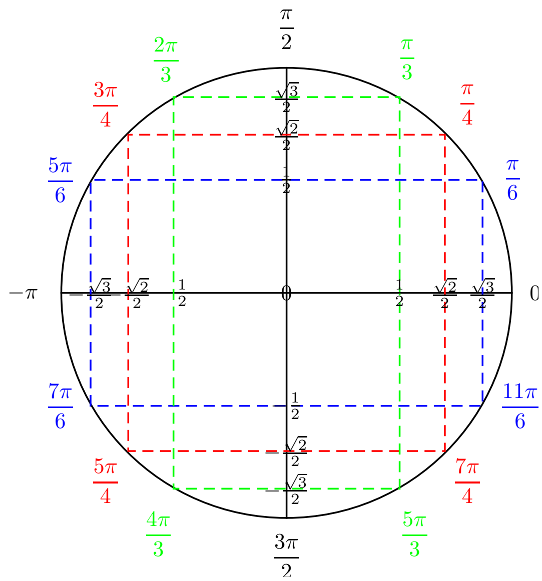


FIGURE 4.3 – Valeurs remarquables

Remarquons que cette définition est équivalente à la définition 4.1 pour $0 \leq t \leq \pi/2$, en considérant le triangle rectangle qui a pour hypoténuse OM de longueur 1 et pour troisième sommet la projection de M sur l'axe des abscisses.

Cette définition permet de voir immédiatement que

$$\boxed{\cos(t + 2\pi) = \cos(t), \qquad \sin(t + 2\pi) = \sin(t).}$$

En effet partant de l'angle t, on a fait un tour complet pour avoir $t+2\pi$ et on est revenu au point de départ.

On note N le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente en I au cercle $\mathcal{C}$ (droite verticale passant par I).

Définition 4.3 *On appelle* tangente de t*, noté* $\tan t$*, l'ordonnée de* N*.*

En appliquant le théorème de Thalès, on a :

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

pour $t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. En effet, les angles pour lesquels le cosinus s'annule sont $\pi/2$ et $-\pi/2$, auxquels cas les droites (OM) et la tangente n'ont pas d'intersection.

À partir du cercle trigonométrique et avec un raisonnement proche de ceux faits avec le triangle rectangle, on trouve toutes les valeurs remarquables des fonctions cos, sin et donc tan (voir figure 4.3).

D'autres propriétés de cosinus, sinus et tangente peuvent être lues sur le cercle trigonométrique. Ainsi si on considère le symétrique du point M par rapport à l'axe des

FIGURE 4.4 – Illustration des propriétés de cosinus et sinus

abscisses, ce point a la même abscisse que M alors que son ordonnée est l'opposée de celle de M (voir figure 4.4). On en déduit

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x).} \tag{4.3}$$

On retrouve la parité du cosinus et l'imparité du sinus. En prenant au contraire le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient un point dont l'angle est $\pi - t$. Et de là

$$\boxed{\cos(\pi - t) = -\cos(t), \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t).} \tag{4.4}$$

4.2 Formules trigonométriques

Certaintes formules ont déjà été vues (et démontrées) précédemment. Deux formules n'ont pas encore été vues :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).}$$

Notons d'abord qu'elles impliquent que **ces fonctions ne sont pas linéaires** ! La preuve de ces formules peut se faire par des considérations géométriques (voir *annexe*). Elle est admise ici. En remplaçant b par $-b$ et en utilisant la parité de cos et l'imparité de sin, on a

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).}$$

En prenant $a = b$ on déduit

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a), \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).}$$

Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a aussi

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a).}$$

En sommant les formules, on obtient

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b),$$

en posant $p = a + b$ et $q = a - b$, $a = (p+q)/2$ et $b = (p-q)/2$, et ainsi

$$\cos(p) + \cos(q) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right].$$

De même

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

implique

$$\sin(p) + \sin(q) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right].$$

Les autres formules se trouvent à la fin du polycopié dans le formulaire (chapitre **??**).

4.3 Fonctions cosinus, sinus et tangente

À partir de la définition géométrique en utilisant les propriétés du triangle rectangle, on a défini pour tout $x \in [0, \pi/2]$. Les formules (4.1) et (4.2) montrent qu'il suffit même de connaître le cosinus et le sinus pour $x \in [0, \pi/4]$. La formule (4.4) permet ensuite de definir cos et sin sur l'intervalle $[0, \pi]$, tandis que (4.3) étend la définition à $[-\pi, 0]$. Ainsi on crée deux fonctions cos et sin définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de longueur 2π. En ajoutant la 2π-periodicité on obtient cos et sin définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ces deux fonctions sont les mêmes que celles vues dans le chapitre 2.5. Ainsi la formule (4.3) montre qu'elles sont paire pour le cosinus et impaire pour le sinus. Remarquons enfin que ces mêmes formules de trigonométrie (avec un peu de géométrie) montrent que cos et sin sont dérivables avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$ (voir *annexe*).

Chapitre 5

Nombre complexe

5.1 Forme algébrique

Définition 5.1 *L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini comme l'ensemble de nombres de forme $z = a + ib$, avec a et b dans $\mathbb{R}$, avec une règle de multiplication*

$$\boxed{i \times i = i^2 = -1.}$$

Soit $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels. $a + ib$ est appelée *forme (ou écriture) algébrique* du nombre complexe z.

— a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.

— b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Cette décomposition est unique.

— On note $i\mathbb{R} = \{ib,\ b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres *imaginaires purs.*

Ainsi

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0, \qquad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0.$$

De plus pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z').$$

Opérations algébriques dans $\mathbb{C}$

On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication prolongeant les opérations dans $\mathbb{R}$. Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, a', b et b' dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\boxed{z + z' = (a + a') + i(b + b'), \qquad zz' = z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').}$$

Ces deux opérations vérifient les mêmes propriétés que celles dans $\mathbb{R}$:

$$z + z' = z' + z, \quad 0 + z = z, \quad z + z' = 0 \Leftrightarrow z = -z', \quad z + (z' + \tilde{z}) = (z + z') + \tilde{z},$$

$$zz' = z'z, \quad 1 \times z = z, \quad z(z'\tilde{z}) = (zz')\tilde{z}, \quad z(z' + \tilde{z}) = zz' + z\tilde{z}.$$

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, c'est-à-dire les nombres z tels que $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ ou $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ (ou les deux évidemment). Si $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, on définit $u = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ et on vérifie que

$$uz = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)(a + ib) = \frac{1}{a^2 + b^2}((a^2 + b^2) + i(ab - ba)) = 1.$$

De même $zu = 1$. Ainsi on obtient que u est l'inverse de z pour la multiplication. Et on en déduit que pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$zz' = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

Conjugaison

Définition 5.2 *Pour $z = a + ib$ notons $\bar{z} := a - ib$ le* nombre complexe conjugué*.*

On a alors les propriétés suivantes (le lecteur les justifiera) : pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$

1. conjugué du conjugué : $\bar{\bar{z}} = z$.
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.
3. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$.
4. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et donc $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ pour tout entier n non nul.
5. $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\dfrac{z'}{z}} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Interprétation géométrique et module

L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ qui à un point du plan (a, b) associe le nombre complexe $a + ib$, permet d'identifier le plan à $\mathbb{C}$. La transformation $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

On définit le *module* ou la norme d'un nombre complexe comme suit :

$$\boxed{|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}.}$$

Le module est un nombre réel positif ou nul, qui si z est dans $\mathbb{R}$ est la valeur absolue de z. De plus le module vérifie les mêmes propriétés que la valeur absolue, c'est-à-dire pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$:

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
3. $|zz'| = |z||z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ pour tout entier n non nul.
4. $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

5. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.
6. Si z est non nul, $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Si on identifie $z = a + ib$ avec un point du plan, $|z|$ est la distance entre ce point et l'origine.

5.2 Forme trigonométrique

Si on considère l'ensemble des nombres complexes de module 1

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$

cet ensemble correspond dans le plan au cercle de centre O et de rayon 1. De plus pour tout z et z' dans $\mathbb{U}$ on a

$$zz' \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{z} \in \mathbb{U},\ \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

Notons aussi que si z est un nombre complexe non nul, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}.$$

De plus si z est dans $\mathbb{U}$, alors il existe θ nombre réel tel que

$$\text{Re}(z) = \cos(\theta), \qquad \text{Im}(z) = \sin(\theta).$$

Ce nombre θ n'est pas unique, puisque tous les nombres de la forme $\theta + 2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$, peuvent aussi être utilisé à la place de θ.

Définition 5.3 (Argument) *Un* argument *d'un nombre complexe z non nul est un nombre réel θ tel que*

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

On note $\theta = \arg(z)$.

Si θ' est un autre argument de z, alors il existe un entier k ($k \in \mathbb{Z}$) tel que $\theta - \theta' = 2k\pi$. On dit que l'argument est défini modulo 2π.
Notation importante : pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta).}$$

Les propriétés de cos et sin font que pour tout θ et θ' dans $\mathbb{R}$,

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Définition 5.4 (Forme trigonométrique) *Pour $z \in \mathbb{C}^*$, z est mis sous* forme trigonométrique *lorsque z est écrit sous la forme*

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \quad r > 0, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

La fonction exponentielle définit sur $\mathbb{R}$ s'étend à l'ensemble des nombres complexes :

Définition 5.5 (Exponentielle complexe) *Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle de z, notée $\exp(z) = e^z$ par*

$$\exp(z) = e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Cette fonction est caractérisée par la propriété : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ (comme dans le cas réel).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ mis sous forme algébrique et trigonométrique :

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

avec a, b et θ dans $\mathbb{R}$, r nombre réel strictement positif. Alors

$$\boxed{a = r\cos(\theta), \ b = r\sin(\theta), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \ \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.}$$

Dans tous les cas,

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

Pour déterminer une valeur de l'argument, on utilisera la règle suivante :

1. Si $a = 0$, $\theta = \pi/2$ si $b > 0$ et $\theta = -\pi/2$ si $b < 0$.
2. Si $a > 0$, comme $\tan(\theta) = b/a$, on en déduit que : $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in]-\pi/2, \pi/2[$.
3. Si $a < 0$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \in]\pi/2, 3\pi/2[$.

Maintenant pour tout $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ dans $\mathbb{C}^*$, on a les propriétés suivantes :

1. $z = z'$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')$ modulo 2π.
2. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\theta = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $z \geq 0$ si et seulement si $\theta = 0 + 2k\pi$ et enfin $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement $\theta = \pi/2 + k\pi$.
3. $zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$, donc $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
4. $\dfrac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$ et $-z = re^{i(\theta+\pi)}$.

Terminons ce paragraphe par deux formules. D'abord la *formule de Moivre* (1667–1754) :

$$\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),}$$

qui provient de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Enfin la *formule d'Euler* (1707–1783) :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).}$$

5.3 Utilité des nombres complexes

Lors du cursus en licence acoustique, vous verrez comment utiliser et manipuler les nombres complexes dans de nombreux problèmes physiques. Voici quelques exemples en mathématiques.

Résolution d'équations algébriques

Historiquement les nombres complexes ont été introduits pour résoudre l'équation $X^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution X dans $\mathbb{R}$. Considérons un polynôme de degré 2 à coefficients réels [1] :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

avec a, b et c dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \geq 0$, alors on a des racines réelles de la forme

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Maintenant si $\Delta < 0$, alors on a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{r_1}.$$

Tout polynôme du second degré a donc toujours deux racines complexes ou réelles (éventuellement comptées deux fois si le discriminant est nul). Un résultat beaucoup plus général du à d'Alembert (1717–1783) stipule que tout polynôme non constant (à coefficients réels ou complexes) a au moins une racine complexe. On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos* ou encore que $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Trigonométrie et linéarisation

La formule d'Euler permet de transformer une expression de la forme

$$(\cos(\theta))^k(\sin(\theta))^\ell, \qquad k \in \mathbb{N}^*,\ \ell \in \mathbb{N}^*$$

1. Il est possible de prendre des coefficients complexes sans grosse modification des résultats.

en une somme de termes de la forme $\cos(p\theta)$ et $\sin(q\theta)$ avec p et q entiers naturels. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta)\sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{4i\theta}+2e^{2i\theta}-2e^{-2i\theta}-e^{-4i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\sin(4\theta)+2\sin(2\theta)\right).
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule du binôme de Newton (2.1) avec $n=3$ au passage. Cette technique sera utilisée notamment pour l'intégration (calcul d'énergie en physique).

La formule de Moivre permet d'effectuer l'opération inverse. Par exemple $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(e^{3i\theta})$. De là par développement

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3\\
&= \cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)\\
&= \cos^3(\theta)-3\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))+i\left(3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\right).
\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles on obtient

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta).$$

Troisième partie

Intégration et notions nouvelles d'analyse

Chapitre 6

Intégration

Dans tout ce chapitre, a et b désigneront **deux nombres réels** et f sera une **fonction définie et continue sur** $[a, b]$. Cela implique en particulier que f est bornée sur $[a, b]$, que le minimum m et le maximum M de cette fonction existent sur $[a, b]$, donc qu'il existe $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$ tels que $m = f(x) = \min f$ et $M = f(y) = \max f$ (voir théorème 9.1 dans l'*annexe*).

6.1 Primitives

Définition 6.1 *On dit que f* admet pour primitive *F* sur *$[a, b]$ si F est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f, c'est-à-dire pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.*

Exemple 6.1

1. $[a, b] = [0, 1]$ et $f(x) = \sin(x)$: $F(x) = -\cos(x)$.
2. $[a, b] = [-1, 1]$ et $f(x) = x^2$: $F(x) = 1 + x^3/3$.

Nous admettrons le résultat qui suit :

Théorème 6.1 *Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.*

De plus

Proposition 6.1 *Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Une fonction G est une autre primitive de f sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $G(x) = F(x) + c$.*

Ainsi une fonction continue admet une infinité de primitives, qui diffèrent toutes d'une constante. Si on spécifie une valeur particulière en un point fixé dans $[a, b]$, alors on a unicité de la primitive. Ainsi il existe une seule primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < 1 < b$ qui s'annule en 1 ; c'est la fonction logarithme.
Notation. Une primitive quelconque de f sera notée $\int f$ ou $\int f(t)dt$ ou $x \mapsto \int^x f(t)dt$ (le t ne jouant aucun rôle particulier). Attention, cette notation ne donne aucune information sur l'intervalle $[a, b]$.

Les primitives classiques sont à connaître (voir tableau dans le formulaire (chapitre ??)). Grosso modo, il faut lire le tableau des dérivées dans l'autre sens.

6.2 Intégrale d'une fonction.

Dans la suite on considère deux nombres α et β avec $\alpha < \beta$ et f est une fonction continue (et donc bornée) sur $[\alpha, \beta]$.

Définition 6.2 *Soient a et b tels que $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$. On appelle* intégrale de f sur $[a, b]$, *le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et égal à $F(b) - F(a) = [F]_a^b$, où F est une primitive quelconque de f sur $[\alpha, \beta]$:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

Il est important de remarquer que ce nombre est bien *indépendant* du choix de la primitive F. En effet si G est une primitive de F sur $[\alpha, \beta]$, alors $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. Donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 6.2 Soit $[\alpha, \beta] = [a, b] = [0, 1]$ et $f : x \mapsto x^3$. Alors

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, le terme x n'a aucune signification (variable dite *muette*) et peut être remplacée par n'importe quoi : t, u, ν, θ, etc. Suivent maintenant quelques propriétés de l'intégrale.

Proposition 6.2

1. **Formule de la moyenne.** *Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.*
2. *Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$ (ils existent). Alors $m(b - a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.*

Le résultat suivant nous permet de donner une signification géométrique à $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ quand la fonction f est positive.

Théorème 6.2 *Si $f \geq 0$ (c'est-à-dire pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.*

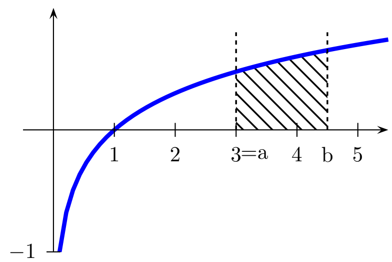


FIGURE 6.1 – Intégrale et aire

Sur la figure 6.1, la fonction logarithme est bien positive sur $[1,5]$ et avec $a=3$ et $b=4,5$, l'aire hachurée vaut $\displaystyle\int_a^b \ln x dx = 4,5\ln(4,5) - 3\ln(3) - 1,5 \approx 1,97$.

Définition 6.3 *Soient a et b dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$ tels que $a>b$. Alors on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Proposition 6.3

1. *Soient a et b deux éléments quelconques de $[\alpha,\beta]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.*
2. **Relation de Chasles.** *Pour tous a, b et c dans $[\alpha,\beta]$, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6.3 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[\alpha,\beta]$, intervalle de $\mathbb{R}$, λ et μ deux nombres réels, et a et b deux éléments de $[\alpha,\beta]$.

Théorème 6.3 (Linéarité de l'intérgale)

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx.$$

Théorème 6.4 (Positivité de l'intégrale) *Supposons que $a\le b$.*

1. *Si $f\ge 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge 0$. De plus s'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)>0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.*

2. *Si* $f \geq g$ *sur* $[a, b]$*, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
3. *Si quel que soit* $x \in [a, b]$*,* $m \leq f(x) \leq M$*, alors* $\displaystyle m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$.
4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

6.4 Procédés d'intégration

Nous allons nous intéresser maintenant au calcul effectif d'intégrale du type $\int f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On commencera toujours par vérifier que la fonction f satisfait toutes les conditions requises.

6.4.1 Tableau des primitives

Pour déterminer une primitive (et par conséquent toutes les primitives) d'une fonction et calculer son intégrale, on lira les tableaux des dérivées en sens inverse : de la dérivée vers la fonction. On renvoie le lecteur au formulaire pour le tableau des primitives. Attention dans ce tableau on ne donne qu'une primitive (pensez à ajouter une constante si besoin).

6.4.2 Intégration par parties

La technique suivante est basée sur la formule de dérivation d'un produit :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Théorème 6.5 (Intégration par parties)
Soient f *et* g *deux fonctions de classe* C^1 *sur* $[\alpha, \beta]$*. Alors :*
1. $\int fg' = fg - \int f'g$;
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Exemple 6.3
1. La fonction $x \mapsto x\cos x$ est continue (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$. Et $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin = x\sin x + \cos x + c$, c étant une constante réelle quelconque (une primitive est toujours déterminée à constante près). Si on demande la primitive de $x \mapsto x\cos x$ qui s'annule en 0, alors il faut choisir $c = -1$.
2. La fonction $x \mapsto xe^x$ est continue (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - (e-1) = 1$.

6.5 Intégration par changement de variable

Théorème 6.6
Soient f et g deux fonctions définies et continues respectivement sur $[u, v]$ et sur $[\alpha, \beta]$ et telles que g est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ avec $g([\alpha, \beta]) \subset [u, v]$. Alors pour tous a et b dans $[\alpha, \beta]$, on a

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

avec $z = g(x)$ et $dz = g'(x)dx$.

Attention : les valeurs aux bornes changent !

Exemple 6.4

1. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$. D'abord la fonction $g : x \mapsto \tan x$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, de dérivée $x \mapsto 1/(\cos^2 x)$. Et la fonction $f : x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant ce qui précède on obtient

$$\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\tan 1} xdx = \frac{(\tan 1)^2}{2}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx$. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $[1, 2]$. Donc

$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} x^2 dx = \frac{(\ln 2)^3}{3}.$$

6.6 Primitives d'une fraction rationnelle

On a vu au chapitre sur les fonctions usuelles qu'une fraction rationnelle est une fonction de la forme P/Q, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. On rappelle qu'elles ne sont pas définies en général sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. D'abord on commence par factoriser le polynôme Q :

$$Q(x) = A \prod_{i=0}^{r} (x - a_i)^{n_i} \prod_{j=0}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j},$$

avec n_i et m_j entiers supérieurs à 1, et $b_j^2 - 4c_j < 0$. Par exemple :

$$Q(x) = 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 24x + 24 = 3(x + 2)^2(x^2 + 2).$$

On admet ici le résultat suivant :

Théorème 6.7 (Décomposition en éléments simples) *Toute fraction rationnelle est la somme :*

1. *d'un polynôme R, appelé partie entière de P/Q ;*
2. *de fractions de la forme $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$, où a et α sont des nombres réels et n un entier strictement positif (a est alors une racine de Q, c'est-à-dire $Q(a)=0$) ;*
3. *de fractions du type $\dfrac{\beta X+\gamma}{(X^2+bX+c)^m}$, où β et γ, b et c sont des nombres réels tels que $b^2-4c<0$, m un entier strictement positif.*

Ainsi avec les notations précédentes pour la factorisation de Q :

$$f(x) = R(x) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\beta_{jk}x+\gamma_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k},$$

Par exemple :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}.$$

Pour calculer une primitive de P/Q, il suffit de savoir calculer les primitives des éléments simples, c'est-à-dire du type 2 ou 3.

Pour le type $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$

On remarque que c'est une fonction de la forme $\alpha u(x)^{-n}u'(x)$ avec $u(x)=x-a$. Ainsi

$$\int \frac{\alpha}{(t-a)^n}dt = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \\[2ex] \alpha \ln|x-a| & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Le résultat est donné à une constante additive près...

Pour le type $\dfrac{\beta X+\gamma}{(X^2+bX+c)^m}$

Ce cas est plus compliqué que le précédent, surtout quand m est grand. Cherchons une primitive d'abord pour $m=1$.

$$\begin{aligned} \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} &= \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \frac{\gamma-\frac{\beta b}{2}}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

Or $b^2-4c<0$. On pose $\nu^2 = c - \dfrac{b^2}{4} > 0$. Ainsi

$$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} = \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\nu^2}.$$

Le but de cette manipulation est d'obtenir un premier terme de la forme u'/u. En effet

$$\int \frac{\beta}{2}\frac{2t+b}{t^2+bt+c}dt = \frac{\beta}{2}\ln(x^2+bx+c).$$

Pour le terme restant on fait un changement de variable $t = \left(u + \dfrac{b}{2}\right)$, qui donne

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+\nu^2}dt &= \int^{x+b/2}\frac{du}{u^2+\nu^2} = \frac{1}{\nu}\int^{x+b/2}\frac{d(r/\nu)}{1+(r/\nu)^2}\\ &= \frac{1}{\nu}\int^{(x+b/2)/\nu}\frac{ds}{1+s^2}\end{aligned}$$

par changement de variable $r=\nu s$. Ainsi

$$\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+\nu^2}dt = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+(b/2)}{\nu}\right),$$

et pour conclure en une formule

$$\int \frac{\beta t+\gamma}{t^2+bt+c}dt = \frac{\beta}{2}\ln(x^2+bx+c) + \left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+(b/2)}{\sqrt{c-(b^2/4)}}\right).$$

Attention : il est inutile (et contre-productif) d'apprendre une telle formule ! En revanche il faut savoir refaire le raisonnement en faisant attention aux changements de variable et à leur implication sur les bornes d'intégration.

Finalement il ne reste plus qu'à intégrer des termes de la forme $\dfrac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^m}$ avec $m>1$ et $b^2-4c<0$. En suivant le même cheminement que pour $m=1$:

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^m}dx = \frac{\beta}{2}\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^m}dx + \left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}.$$

La première intégrale se calcule facilement en reconnaissant à une constante près, la dérivée de la fonction $(x^2+bx+c)^{1-m}$. Pour la seconde, on procède comme précédemment :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^m}dt &= \int \frac{1}{((t+b/2)^2+c-b^2/4)^m}dt\\ &= \int^x \frac{1}{((t+b/2)^2+\nu^2)^m}dt\\ &= \int^{x+b/2}\frac{1}{(r^2+\nu^2)^m}dr = I_m(x+b/2).\end{aligned}$$

Ensuite commence une *récurrence*, d'autant plus longue que m est grand.

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{r^2+\nu^2-r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr \\ &= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{1}{(r^2+\nu^2)^{m-1}}dr - \frac{1}{2\nu^2}\int^{x+b/2} \frac{2r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr. \end{aligned}$$

Ensuite on intègre par parties : $u(r) = r$ et $v'(r) = \dfrac{2r}{(r^2+\nu^2)^m}$, et $u'(r) = 1$, $v(r) = \dfrac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}$. Donc

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}I_{m-1}(x) - \frac{1}{2\nu^2}\left[x\frac{(x^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m} - \int^x \frac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}dr\right] \\ &= I_{m-1}(x)\left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{(m-1)}\frac{1}{2\nu^2}\right] + \frac{1}{2\nu^2(m-1)}\frac{x}{(x^2+\nu^2)^{m-1}}. \end{aligned}$$

L'intégrale se calcule donc par récurrence sur m puisqu'on a diminué d'une unité le degré du dénominateur sous l'intégrale définissant I_m.

Ce calcul s'avère rapidement fastidieux si m est grand. Il faut donc garder à l'idée la méthode : faire apparaître un maximum de dérivées (faciles à intégrer), et avec les termes restants, intégrer par parties de façon à diminuer le degré des dénominateurs en jeu, jusqu'à aboutir à la dérivée d'Arctan.

À titre d'entraînement, on pourra vérifier

Exemple 6.5

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}.$$

Chapitre 7

Fonctions composées

Jusqu'à présent toutes les fonctions ont pour argument une variable, qu'elle s'appelle x, t ou truc. Néanmoins en physique comme les variables ont une dimension, les fonctions vont dépendre de la variable d'intérêt mais de façon plus compliquée.

On a déjà vu qu'on pouvait sommer, multiplier ou diviser des fonctions. Voici une nouvelle opération sur les fonctions.

Définition 7.1 (Composition) *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in U$, $f(x) \in V$. La* composée de g par f *est la fonction $h : U \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in U$, $h(x) = g(f(x))$. On la note $g \circ f$.*

Attention : cette définition n'est pas symétrique. La composée $g \circ f$ peut exister sans que $f \circ g$ existe. De plus, même si $g \circ f$ et $f \circ g$ existent, en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Ainsi si on considère $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \ln(x)$, la fonction $f \circ g$ existe pour $x > 0$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\ln(x))^2 - 1$. En revanche $g \circ f$ n'existe pas toujours car $(g \circ f)(x) = \ln(x^2 - 1)$ n'est bien défini que si $x^2 - 1 > 0$, soit pour $x < -1$ ou $x > 1$. En particulier $(f \circ g)(1)$ a un sens, mais pas $(g \circ f)(1)$. Il est clair aussi qu'en général pour $x > 1$, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Si maintenant $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1 \neq x^2 + 2x + 1 = (g \circ f)(x),$$

sauf pour $x = 0$.

7.1 Bijection

Définition 7.2 (Bijectivité) *Une fonction f est* bijective *de U sur V si tout élément $y \in V$ a un et un seul antécédent $x \in U$ par f ; autrement dit, pour tout $y \in V$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in U$ a une seule solution.*

Définition 7.3 *Soit $f : U \to V$ une bijection de U sur V. On appelle* bijection réciproque *la fonction, notée f^{-1}, de V dans U définie par : quel que soit $y \in V$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans U de y par f.*

Proposition 7.1 *Soit $f : U \to V$ une bijection de U sur V. On a*
- *Pour tout $(x, y) \in U \times V$, $x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y$.*
- *f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Enfin on peut donner du coup une définition équivalente de la bijectivité d'une fonction.

Définition 7.4 *Soit $f : U \to V$ une fonction. On dit que f est* bijective de U sur V *s'il existe une fonction $g : V \to U$ telle que*
- *les fonctions composées $f \circ g : V \to V$ et $g \circ f : U \to U$ existent,*
- *et*
$$\forall x \in U,\ (g \circ f)(x) = x, \qquad \forall y \in V,\ (f \circ g)(y) = y.$$

Dans ce cas, la fonction g est unique et est la bijection réciproque de f. Terminons par une propriété concernant la composition de bijections.

Proposition 7.2 *Soient $f : U \to V$ et $g : V \to W$ des fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Exemple 7.1 Considérons l'application $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x \tan x}$. Soient x et y des nombres réels tels que $0 < x < y$. Puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $] - \pi/2, \pi/2[$, nous avons les inégalités $\tan 0 = 0 < \tan x < \tan y$, donc $0 < x \tan x < x \tan y < y \tan y$. Ainsi la fonction f est strictement décroissante. D'autre part f est continue en tant qu'inverse d'une fonction continue ne prenant pas la valeur 0. Puisqu'on a $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$, il vient $\lim_{x \to (\pi/2)^-} x \tan x = +\infty$ et par suite $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = 0$. La fonction $x \mapsto x \tan x$ étant continue en 0, on a $\lim_{x \to 0} x \tan x = 0$, et puisque f est positive, on en déduit $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

En appliquant le théorème précédent, on obtient que l'intervalle $f(]0, \pi/2[)$ est égal à l'intervalle ouvert $] \lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x), \lim_{x \to 0} f(x)[=]0, +\infty[$ et que la fonction f définit une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$.

Graphes d'une bijection et de sa bijection réciproque. Soient I et J des intervalles et soit $f : I \to J$ une application. Rappelons que le *graphe* de f est la partie G de $\mathbb{R}^2$ formée de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \in I$. Supposons que f est bijective. Le graphe de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est la partie G' de $\mathbb{R}^2$ formée de tous les couples $(x, f^{-1}(x))$ où $x \in J$. Il est clair que par définition de f^{-1} pour tout élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence
$$(x, y) \in G \Longleftrightarrow (y, x) \in G'.$$
Autrement dit, on a une symétrie par rapport à la première bissectrice du plan : *les graphes de f et de f^{-1} sont donc symétriques par rapport à cette bissectrice* (voir figure 7.1 : la fonction et sa réciproque sont en trait plein (simple ou double)).

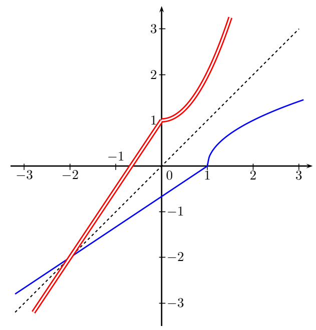


FIGURE 7.1 – Fonction réciproque

7.2 Dérivée des fonctions composées

Dérivée d'une composée. Soient f et g deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ est définie. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)}\ .$$

Dérivée d'une fonction réciproque. Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Posons $J = f(I)$ et notons $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque de $f : I \to J$. Si l'on a $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur J et l'on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}\ .$$

Exemple 7.2 Reprenons l'exemple 7.1. Soit la fonction $f\ :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(x \tan x)$. On a montré que f est une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$. En utilisant les résultats précédents, f est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x \tan x)^2}\left(\tan x + x\frac{1}{(\cos x)^2}\right) \neq 0.$$

Donc la bijection réciproque g de f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

7.3 Retour sur les primitives

Pour une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$, on a défini la primitive F qui s'annule en a par la formule :

$$\forall x \in [a, b],\ \ F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Cette fonction F est dérivable avec : $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

On peut définir alors d'autres fonctions en composant F avec les fonctions usuelles. Ainsi si u est une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $[a, b]$, alors on définit

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ G(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt = F(u(x)).$$

Si cette fonction u est dérivable, alors G est dérivable et sa dérivée est

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ G'(x) = f(u(x)) \times u'(x).$$

Exemple 7.3 *Étudier la fonction G définie sur $[0, 2]$ par*

$$\forall x \in [0, 2],\ G(x) = \int_1^{x^2} \exp(2t)dt.$$

On peut aussi s'intéresser à la fonction suivante

$$\forall x \in [a, b],\ H(x) = \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = F(b) - F(x).$$

Ainsi la dérivée de H est la fonction $-f$. Et on peut combiner le tout, en considérant deux fonctions u et v définies sur $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $[a, b]$, et en posant :

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

Si u et v sont dérivables, alors H est dérivable et

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

7.4 Intégration par changement de variable

Théorème 7.1
Soient f et g deux fonctions définies et continues respectivement sur $[u, v]$ et sur $[\alpha, \beta]$ et telles que g est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ avec $g([\alpha, \beta]) \subset [u, v]$. Alors pour tous a et b dans $[\alpha, \beta]$, on a

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

avec $z = g(x)$ et $dz = g'(x)dx$.

Attention : les valeurs aux bornes changent !

Exemple 7.4

1. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$. D'abord la fonction $g : x \mapsto \tan x$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, de dérivée $x \mapsto 1/(\cos^2 x)$. Et la fonction $f : x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant ce qui précède on obtient
$$\int_0^1 \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\tan 1} x dx = \frac{(\tan 1)^2}{2}.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx$. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $[1,2]$. Donc
$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} x^2 dx = \frac{(\ln 2)^3}{3}.$$

7.4.1 Primitives d'une fraction rationnelle

On a vu au chapitre sur les fonctions usuelles qu'une fraction rationnelle est une fonction de la forme P/Q, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. On rappelle qu'elles ne sont pas définies en général sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. D'abord on commence par factoriser le polynôme Q :
$$Q(x) = A\prod_{i=0}^{r}(x-a_i)^{n_i}\prod_{j=0}^{s}(x^2+b_jx+c_j)^{m_j},$$
avec n_i et m_j entiers supérieurs à 1, et $b_j^2 - 4c_j < 0$. Par exemple :
$$Q(x) = 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 24x + 24 = 3(x+2)^2(x^2+2).$$

On admet ici le résultat suivant :

Théorème 7.2 (Décomposition en éléments simples) *Toute fraction rationnelle est la somme :*

1. *d'un polynôme R, appelé partie entière de P/Q ;*
2. *de fractions de la forme $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$, où a et α sont des nombres réels et n un entier strictement positif (a est alors une racine de Q, c'est-à-dire $Q(a) = 0$) ;*
3. *de fractions du type $\dfrac{\beta X + \gamma}{(X^2+bX+c)^m}$, où β et γ, b et c sont des nombres réels tels que $b^2 - 4c < 0$, m un entier strictement positif.*

Ainsi avec les notations précédentes pour la factorisation de Q :
$$f(x) = R(x) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{\alpha_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\beta_{jk}x+\gamma_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k},$$

Par exemple :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}.$$

Pour calculer une primitive de P/Q, il suffit de savoir calculer les primitives des éléments simples, c'est-à-dire du type 2 ou 3.

Pour le type $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$

On remarque que c'est une fonction de la forme $\alpha u(x)^{-n} u'(x)$ avec $u(x) = x - a$. Ainsi

$$\int \frac{\alpha}{(t-a)^n} dt = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \\ \\ \alpha \ln|x-a| & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Le résultat est donné à une constante additive près...

Pour le type $\dfrac{\beta X + \gamma}{(X^2 + bX + c)^m}$

Ce cas est plus compliqué que le précédent, surtout quand m est grand. Cherchons une primitive d'abord pour $m = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + bx + c} &= \frac{\beta}{2} \frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \frac{\gamma - \frac{\beta b}{2}}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right) \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

Or $b^2 - 4c < 0$. On pose $\nu^2 = c - \dfrac{b^2}{4} > 0$. Ainsi

$$\frac{\beta x + \gamma}{x^2 + bx + c} = \frac{\beta}{2} \frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right) \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \nu^2}.$$

Le but de cette manipulation est d'obtenir un premier terme de la forme u'/u. En effet

$$\int \frac{\beta}{2} \frac{2t+b}{t^2+bt+c} dt = \frac{\beta}{2} \ln(x^2 + bx + c).$$

Pour le terme restant on fait un changement de variable $t = \left(u + \dfrac{b}{2}\right)$, qui donne

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 + \nu^2} dt &= \int^{x+b/2} \frac{du}{u^2+\nu^2} = \frac{1}{\nu} \int^{x+b/2} \frac{d(r/\nu)}{1 + (r/\nu)^2} \\ &= \frac{1}{\nu} \int^{(x+b/2)/\nu} \frac{ds}{1+s^2} \end{aligned}$$

par changement de variable $r = \nu s$. Ainsi

$$\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+\nu^2}dt = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+(b/2)}{\nu}\right),$$

et pour conclure en une formule

$$\int \frac{\beta t+\gamma}{t^2+bt+c}dt = \frac{\beta}{2}\ln(x^2+bx+c)+\left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+(b/2)}{\sqrt{c-(b^2/4)}}\right).$$

Attention : il est inutile (et contre-productif) d'apprendre une telle formule ! En revanche il faut savoir refaire le raisonnement en faisant attention aux changements de variable et à leur implication sur les bornes d'intégration.

Finalement il ne reste plus qu'à intégrer des termes de la forme $\dfrac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^m}$ avec $m > 1$ et $b^2-4c<0$. En suivant le même cheminement que pour $m = 1$:

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^m}dx = \frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^m}dx+\left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}.$$

La première intégrale se calcule facilement en reconnaissant à une constante près, la dérivée de la fonction $(x^2+bx+c)^{1-m}$. Pour la seconde, on procède comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^m}dt &= \int \frac{1}{((t+b/2)^2+c-b^2/4)^m}dt \\
&= \int^x \frac{1}{((t+b/2)^2+\nu^2)^m}dt \\
&= \int^{x+b/2} \frac{1}{(r^2+\nu^2)^m}dr = I_m(x+b/2).
\end{aligned}$$

Ensuite commence une *récurrence*, d'autant plus longue que m est grand.

$$\begin{aligned}
I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{r^2+\nu^2-r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr \\
&= \frac{1}{\nu^2}\int^x \frac{1}{(r^2+\nu^2)^{m-1}}dr-\frac{1}{2\nu^2}\int^{x+b/2}\frac{2r^2}{(r^2+\nu^2)^m}dr.
\end{aligned}$$

Ensuite on intègre par parties : $u(r) = r$ et $v'(r) = \dfrac{2r}{(r^2+\nu^2)^m}$, et $u'(r) = 1$, $v(r) = \dfrac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}$. Donc

$$\begin{aligned}
I_m(x) &= \frac{1}{\nu^2}I_{m-1}(x)-\frac{1}{2\nu^2}\left[x\frac{(x^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}-\int^x \frac{(r^2+\nu^2)^{1-m}}{1-m}dr\right] \\
&= I_{m-1}(x)\left[\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(m-1)}\frac{1}{2\nu^2}\right]+\frac{1}{2\nu^2(m-1)}\frac{x}{(x^2+\nu^2)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale se calcule donc par récurrence sur m puisqu'on a diminué d'une unité le degré du dénominateur sous l'intégrale définissant I_m.

Ce calcul s'avère rapidement fastidieux si m est grand. Il faut donc garder à l'idée la méthode : faire apparaître un maximum de dérivées (faciles à intégrer), et avec les termes restants, intégrer par parties de façon à diminuer le degré des dénominateurs en jeu, jusqu'à aboutir à la dérivée d'Arctan.

À titre d'entraînement, on pourra vérifier

Exemple 7.5

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}.$$

Chapitre 8

Développements limités

8.1 Généralités

8.1.1 Définitions

Définition 8.1
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant x_0, $I \neq \{x_0\}$, et $f : D = I$ ou $I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ (f peut ne pas être définie en x_0). Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre *n* en *x_0 (un $DL_n(x_0)$) s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels et $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in D,\ f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Ceci est équivaut à l'existence d'une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

On dit que $f - P(. - x_0)$ est négligeable devant $(. - x_0)^n$ au voisinage de x_0.

Définition 8.2 *Sous les conditions précédentes, $P(x - x_0)$ (ou $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$) est la* partie régulière *du $DL_n(x_0)$ et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est le* terme complémentaire.

Attention : comme le terme complémentaire a juste pour propriété d'être « petit », on le note toujours sous la forme d'une puissance de x multipliée par $\varepsilon(x)$. Mais il faut bien comprendre que cette fonction ε dépend de f, de x_0, de n, et donc n'est jamais la même !

On a déjà vu que toute fonction f dérivable en x_0 admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Plus précisément

Proposition 8.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.*

1. *f est continue en x_0 si et seulement si f admet un $DL_0(x_0)$ donné par $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*
2. *f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $DL_1(x_0)$ donné par $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

Autrement dit, si f est dérivable en x_0, « autour » de x_0, la fonction se comporte pratiquement comme une fonction affine (graphiquement une droite tangente à la courbe). Aussi compliquée soit la fonction, si elle est dérivable, alors près d'un point c'est une droite !

Exemple 8.1

1. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc au voisinage de 0, $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$. Donc la fonction sin admet un $DL_1(0)$ donné par $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
2. Pour tout x, $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2/2} = 1$. Ainsi la fonction cos admet un $DL_2(0)$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = -1/2$.
3. La fonction $f : x \mapsto 1/(1 - x)$ est défini sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in D$, $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Donc $\dfrac{1}{1 - x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1 - x}$. Soit $\varepsilon :] - \infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(x) = x/(1 - x)$. On a

   $$\forall x \in] - \infty, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   Donc f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Illustration graphique du premier exemple : sur la figure 8.1, la fonction sinus est en noire, sa tangente en bleu. Évidemment sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (à gauche) ce ne sont pas les mêmes. Mais sur l'intervalle $[-0,5; 0,5]$ (à droite) elles se confondent presque.

Sur la figure 8.2, on a fait les mêmes dessins avec cos et $x \mapsto 1 - x^2/2$.

Attention : si f admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 2$, f n'est pas forcément n fois dérivable en x_0.

Exemple 8.2 Ainsi la fonction $f : 1 - 2x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un $DL_2(0)$ donné par $f(x) = 1 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

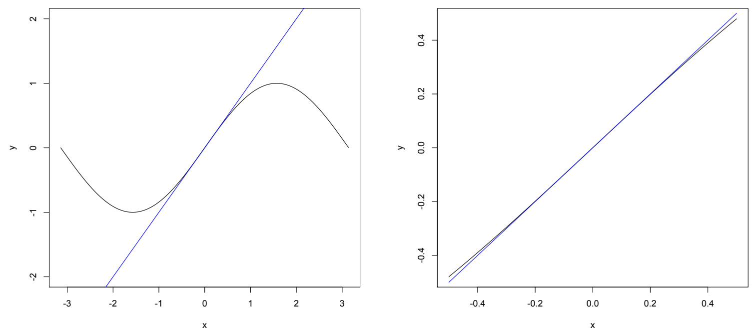


FIGURE 8.1 – Fonction sinus et sa tangente en zéro

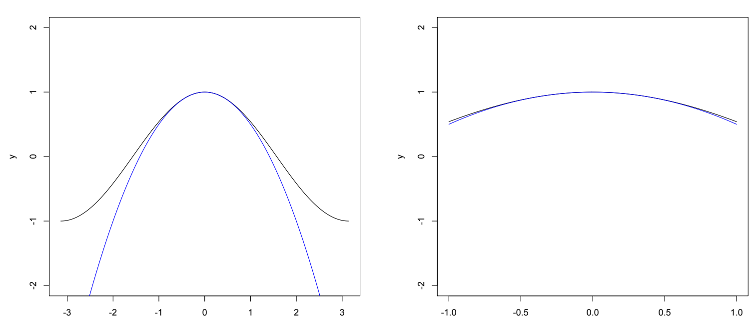


FIGURE 8.2 – Fonction cosinus et le polynôme de degré 2

Remarque 8.1 *Le changement de variable $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + h$ si $x_0 \in \mathbb{R}$ permet de ramener le développement limité en 0.*

f admet un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$g(h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h).$$

Dans la suite on énoncera les propriétés uniquement des développements limités en 0. Mais elles sont valables pour tout $DL(x_0)$.

8.1.2 Propriétés

Théorème 8.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D = I$ ou $D = I \setminus \{0\}$ avec I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un $DL_n(0)$, celui-ci est unique (les coefficients de la partie régulière sont uniques).*

Conséquence : si f est une fonction paire (resp. impaire) et si elle admet un $DL_n(0)$, alors la partie régulière de ce $DL_n(0)$ est un polynôme dont tous les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Théorème 8.2 (Troncature) *Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, alors pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, elle admet un $DL_p(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$.*

Proposition 8.2 *On suppose que f admet un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Si la partie régulière de ce $DL_n(0)$ n'est pas nulle, on pose $p = \min\{k \in \{0, \ldots, n\}$ t.q. $a_k \neq 0\}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{a_p x^p} = 1$.*

Le terme $a_p x^p$ est appelé partie principale du $DL_n(0)$.

Avec ces notations, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$.

8.2 Existence des développements limités, formule de Taylor-Young

Théorème 8.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I intervalle. Soit $x_0 \in I$. Alors il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour $x_0 = 0$ on parle de formule de MacLaurin, sinon de formule de Taylor-Young.

On savait déjà qu'une fonction dérivable pouvait être approchée localement par sa tangente. Si on a un peu plus de régularité (une dérivée seconde), alors près de x_0, f se comporte comme un polynôme de degré deux. Or pour les fonctions affines ou polynomiales de degré deux, on sait tout calculer ! Et en pratique on va très rarement au delà d'un développement à l'ordre deux.

8.3 Exemples classiques

Fonction polynomiale

Une fonction polynomiale f est de classe C^∞, donc admet un $DL_n(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$. De plus si f est de degré n, on a une formule « exacte » :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Fonction exponentielle

Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc admet un développement limité en tout point et à tout ordre. Pour $x_0 = 0$, sachant que $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x).}$$

Fonctions sin et cos

Ce sont deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc pour $k \in \mathbb{N}$,

— si k est impair, $\cos^{(k)}(0) = 0$ et si k est pair, $k = 2p$, $\cos^{(k)}(0) = (-1)^p$;

— si k est pair, $\sin^{(k)}(0) = 0$ et si k est impair, $k = 2p+1$, $\sin^{(k)}(0) = (-1)^p$.

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \cos(x) & \underset{x \to 0}{=} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x), \\ \sin(x) & \underset{x \to 0}{=} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x). \end{array}}$$

Fonctions puissance

On considère les fonctions $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Elles sont de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$. Donc elles admettent un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Donc on en déduit

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Cas particuliers :

— Si α est un entier positif ou nul, on retrouve les coefficients binomiaux

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k.$$

— Si $\alpha = -1$, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k$. Donc

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x).}$$

On en déduit également que

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x).}$$

8.4 Intégration des développements limités

Théorème 8.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I avec $0 \in I$. On suppose que f admet un $DL_n(0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ donné par :*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_n(0)$ donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + x^{n+1} \varepsilon(x).$$

Exemple 8.3 La fonction $F : I =]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui à $x \in I$ associe $F(x) = \ln(1+x)$ est une primitive sur I de la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x)$. La fonction f est continue sur I et admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Donc F admet pour $DL_n(0)$:

$$F(x) = \boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x).}$$

Et de même pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x).}$$

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive la fonction Arctan. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n+2} + x^{2n+2}\varepsilon(x^2) \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\left((-1)^{n+1} x + x\varepsilon(x^2)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x).}$$

8.5 Opérations sur les développements limités

Pour calculer un DL, on peut toujours utiliser la formule de Taylor-Young en calculant les dérivées successives de la fonction. Mais c'est souvent long. Aussi préfère-t-on utiliser les opérations décrites ci-dessous (un peu comme pour les calculs de limite ou de dérivée).

Somme

Proposition 8.3 *Soient f et g deux fonctions définies sur I, admettant des $DL_n(0)$ donnés par*

$$\begin{cases} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) \\ &= P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0, \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) \\ &= Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0. \end{cases}$$

Alors $f+g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $R(x) = P(x) + Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k$.

Multiplication par scalaire

Proposition 8.4 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors λf admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k)x^k$.*

Produit

Proposition 8.5 *Soient f et g deux fonctions définies sur I et $n \in \mathbb{N}$, admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P(x)$ et $Q(x)$. Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme $R(x)$ obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le développement du produit $P(x)Q(x)$.*

Exemple 8.4 Le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x \cos(x)$ est

$$e^x \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Composition

Théorème 8.5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que $f(0) = 0$ (d'où $0 \in I$ et $0 \in J$). On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ ($a_0 = 0$). Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme $R(x)$ obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le développement du polynôme $Q((P(x)) = b_0 + \sum_{k=0}^{n} b_k(a_1x + \ldots + a_nx^n)^k$.*

Exemple 8.5 Le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ est

$$\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

Quotient

Théorème 8.6 *Soient f et g définies sur I avec $0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et si $g(0) \neq 0$, alors f/g admet un $DL_n(0)$.*

Exemple 8.6 Le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$ est

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).}$$

8.6 Applications des développements limités

8.6.1 À la recherche des limites

Exemple 8.7 *Déterminer la limite en 0 de* $f : \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \quad \sin(x) = x + x^2\varepsilon_2(x).$$

Donc

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) - (x + x^2\varepsilon_2(x))}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

8.6.2 Étude locale au voisinage d'un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité en a de la forme

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_p(x-a)^p + (x-a)^p\varepsilon(x-a)$$

avec $p \geq 2$, $\lambda_p \neq 0$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda_0$. Donc f est définie et continue en a avec $f(a) = \lambda_0$. On suppose désormais $a \in I$ et $f(a) = \lambda_0$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan et $A = (a, f(a))$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

Au voisinage de a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda_1 + \lambda_p(x-a)^{p-1} + (x-a)^{p-1}\varepsilon(x-a).$$

Donc f est dérivable en a avec $f'(a) = \lambda_1$. La tangente T en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, soit $y = \lambda_0 + \lambda_1(x-a)$. Et comme $\lambda_p \neq 0$,

$$f(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a)) = \lambda_p(x-a)^p + (x-a)^p\varepsilon(x-a).$$

Ainsi au voisinage de a, $f(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a))$ est du signe de $\lambda_p(x-a)^p$ ce qui donne la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T au voisinage de a.
Deux cas de figure se présentent :

1. Si p est pair : $\mathcal{C}$ reste du même côté de T.
2. Si p est impair : $\mathcal{C}$ traverse T et on dit que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

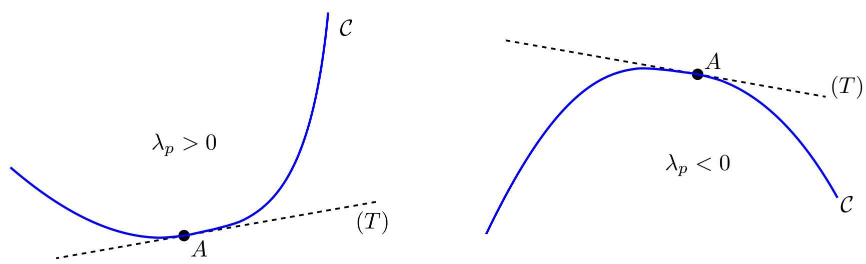


FIGURE 8.3 – p pair : $\mathcal{C}$ ne traverse pas T

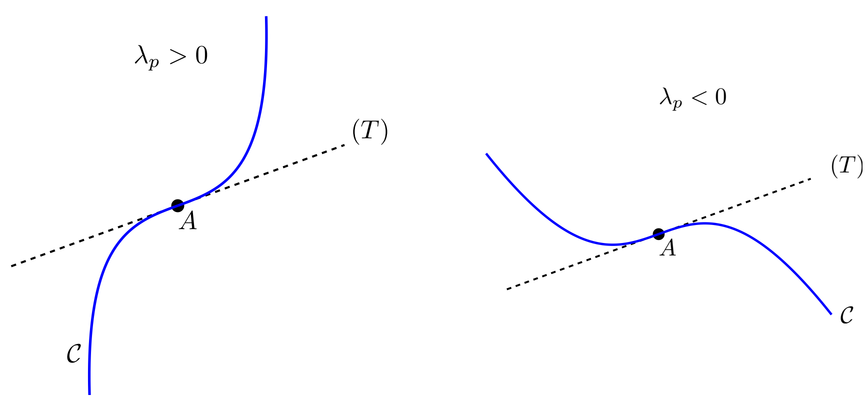


FIGURE 8.4 – p impair : $\mathcal{C}$ traverse T

Quatrième partie

Annexe

Chapitre 9

Annexe

9.1 Définitions précises des limites

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou bien est une extrémité de I.

Définition 9.1 (Limite) *Soit l un nombre réel. On dit que f* a pour limite l en x_0*, ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \quad x \neq x_0, \quad \text{et } |x - x_0| \leq \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l.}$

Intuitivement cette définition signifie que $f(x)$ est aussi près que l'on veut de l à condition de choisir x assez près de x_0, mais différent de x_0.

Par définition il revient au même de dire que $f(x)$ tend vers l ou que $f(x) - l$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On a ainsi les équivalences très utiles

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0.$$

Remarque 9.1 *Dans la définition de la limite en x_0, la fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 et si elle l'est, la valeur $f(x_0)$ n'a aucune influence sur l'existence ou la valeur de la limite.*

Ainsi il est possible de chercher si $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ a une limite quand x tend vers 1.

Par ailleurs en ce qui concerne la limite en x_0, seules comptent les valeurs que prend la fonction aux points x assez proches de x_0, mais différents de x_0. Aussi si on crée une fonction g en modifiant la fonction f au point x_0 et en dehors d'un intervalle $]a, b[$ tel que $x_0 \in]a, b[$, alors f a pour limite l en x_0 si et seulement si g a pour limite l en x_0.

Définition 9.2 (Limite à l'infini) *Soit I l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si l est un nombre réel, on dit que f* a pour limite l en $+\infty$, *ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $r > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, et\ x > r) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Soit I l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si l est un nombre réel, on dit que f a pour limite l en $-\infty$, *ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $r < 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, et\ x < r) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Corollaire 9.1 *Si une fonction a une limite, cette limite est unique.*

Nous parlerons désormais de **la** limite d'une fonction en x_0, en $+\infty$ ou $-\infty$. Mais attention la limite d'une fonction en un point n'existe pas toujours.

Définition 9.3 (Limite infinie)

— *On dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0, *et l'on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \in I, \quad x \neq x_0, \quad et\ |x - x_0| < \eta) \Longrightarrow f(x) > A.$$

— *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, *et l'on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $r > 0$ tel que*

$$x > r \Longrightarrow f(x) > A.$$

— *Si I est l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$ où a est un nombre réel, on dit que $f(x)$* tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, *et l'on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $r < 0$ tel que*

$$x < r \Longrightarrow f(x) > A.$$

— *On dit que $f(x)$* tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 *(ou bien* quand x tend vers $+\infty$, *ou bien* quand x tend vers $-\infty$*), si $-f(x)$ tend vers $+\infty$. Cette propriété se note $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ dans le cas, par exemple, de la limite en x_0.*

Utilisons maintenant ces définitions pour prouver les propriétés vues au paragraphe 3.1.1. Le jeu consiste à couper des ε en morceaux. Considérons trois constantes ℓ, ℓ' et $\lambda \neq 0$, ainsi qu'un reel x_0 et deux fonctions f et g telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'.$$

Montrons que $\lim_{x \to x_0} (f(x) + \lambda g(x)) = \ell + \lambda \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque (1492 ; π ; 10^{-9} ; $6,6 \times 10^{-34}$, bref n'importe quel nombre strictement positif). Par définition des limites de f et de g, la valeur ε est quelconque. Donc avec $\varepsilon/2$ pour f, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2.$$

Et comme $|\lambda| > 0$ avec $\varepsilon/(2|\lambda|) > 0$ pour g, il existe η' tel que

$$|x - x_0| \leq \eta' \Rightarrow |g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/(2|\lambda|).$$

Alors avec l'inégalité triangulaire, dès que $|x - x_0| \leq \min(\eta, \eta') = \nu$ avec $\nu > 0$,

$$|f(x) + \lambda g(x) - (\ell + \lambda \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |\lambda||g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2 + |\lambda|\varepsilon/(2|\lambda|) = \varepsilon.$$

Ainsi on a vérifié que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\nu > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq \nu \Rightarrow |f(x) + \lambda g(x) - (\ell + \lambda \ell')| \leq \varepsilon.$$

Et la preuve est terminée.

Un peu plus complexe : $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \ell\ell'$. Démarrons comme suit :

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| = |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\ell'| \leq |g(x)||f(x) - \ell| + |\ell||g(x) - \ell'|.$$

Pour arriver à notre conclusion on voit qu'il faut contrôler $|f(x) - \ell|$ multiplié par $|g(x)|$. Il ne faudrait pas que $g(x)$ parte en vrille près de x_0, sinon on ne pourra pas estimer le produit. Mais comme g tend vers ℓ' près de x_0, g reste borné près de x_0. Plus précisément, choisissons un ε particulier, par exemple (au hasard) 1998. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - x_0| \leq \eta$, on ait

$$|g(x) - \ell'| \leq 1998 \Rightarrow |g(x)| = |g(x) - \ell' + \ell'| \leq |g(x) + \ell'| + |\ell'| \leq 1998 + |\ell'|.$$

Notons $M = 1998 + |\ell'| > 0$. Choisissons maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque (9,58 ou 222×10^6 par exemple). Il existe η' tel que

$$|x - x_0| \leq \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/(2M).$$

Pour $|x - x_0| \leq \min(\eta, \eta')$, on obtient alors

$$|g(x)||f(x) - \ell| \leq M\varepsilon/(2M) = \varepsilon/2.$$

Pour le second morceau, si $\ell \neq 0$, alors il existe η'' tel que

$$|x - x_0| \leq \eta'' \Rightarrow |g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/(2|\ell|).$$

Et donc

$$|\ell||g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2,$$

inégalité encore vraie si $\ell = 0$. Finalement en rassemblant tous les morceaux, on finit par obtenir que pour $\nu = \min(\eta, \eta', \eta'') > 0$, si $|x - x_0| \leq \nu$, alors $|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leq \varepsilon$. Et c'est gagné !

Au passage on a prouvé le résultat suivant :

Corollaire 9.2 *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et l un nombre réel. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $\eta > 0$ tel que f est bornée sur l'ensemble $A = \{x \in I \mid x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \eta\}$. Autrement dit il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|f(x)| \leq M$.*

À titre d'exercice vous pouvez aussi montrer ce qui suit :

Corollaire 9.3 *Soient f une fonction et a, ℓ des nombres réels tels que $\ell > a$.*

— *Supposons que x_0 est un nombre réel et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Alors il existe un nombre $\eta > 0$ ayant la propriété suivante :*

$$(x \neq x_0 \quad \text{et } |x - x_0| < \eta) \Longrightarrow f(x) > a.$$

— *Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $r > 0$ tel que $f(x) > a$ pour tout $x > r$.*

— *Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $r < 0$ tel que $f(x) > a$ pour tout $x < r$.*

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et ℓ un nombre réel.

— *Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $\eta > 0$ tel que f est bornée sur l'ensemble $\{x \in I \mid x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \eta\}$.*

— *Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que f est bornée sur $]r, +\infty[$.*

— *Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, alors il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que f est bornée sur $]-\infty, r[$.*

9.2 Formules trigonométriques : quelques preuves par la géométrie

Nous avons donné quelques preuves géométriques simples des formules de trigonométrie. Montrons maintenant que

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Sur le cercle trigonométrique, on nomme

— E, le point d'intersection du cercle avec les abscisses,

— A, le point tel que l'angle $\widehat{EOA}$ égale a,

— B, le point tel que l'angle $\widehat{EOB}$ égale b,

— D, le point tel que l'angle $\widehat{EOD}$ égale $a-b$.

Un dessin aide beaucoup à la compréhension ! Il s'ensuit que les coordonnées de E sont $(1\,;0)$, de A sont $(\cos(a)\,;\sin(a))$, de B sont $(\cos b\,;\sin b)$, de D sont $(\cos(a-b)\,;\sin(a-b))$. D'autre part, $\widehat{BOA} = a-b = \widehat{EOD}$. Donc, $ED = AB$ (des angles au centre de même amplitude interceptent des cordes de même longueur.). Ou encore $ED^2 = AB^2$. Ce qui donne, en utilisant la formule de distance entre deux points (voir chapitre **??**), dans un repère orthonormé :

$$(\cos(a-b)-1)^2 + (\sin(a-b)-0)^2 = (\cos(b)-\cos(a))^2 + (\sin(b)-\sin(a))^2$$

soit en développant

$$\begin{aligned}&\cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \sin^2(a-b)\\ &\quad = \cos^2(b) - 2\cos(a)\cos(b) + \cos^2(a) + \sin^2(b) - 2\sin(a)\sin(b) + \sin^2(a).\end{aligned}$$

Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, le résultat s'en déduit.

En remplaçant b par $-b$ on a alors

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

où on a utilisé la parité de cos et l'imparité de sin.

Pour trouver les formules en sinus, on peut utiliser les angles complémentaires :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos(\pi/2-(a-b)) = \cos((\pi/2-a)+b)\\ &= \cos(\pi/2-a)\cos(b) - \sin(\pi/2-a)\sin(b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Enfin avec $-b$ à la place de b, on aura $\sin(a+b)$.

Venons en maintenant aux dérivées de cos et sin. Commençons par montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-\cos(0)}{t-0} = 0,$$

c'est-à-dire que cos est dérivable en zéro avec pour dérivée 1, et en même temps que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)-\sin(0)}{t-0} = 1,$$

c'est-à-dire que sin est dérivable en zéro avec pour dérivée 1.

Par cela considérons le cercle trigonométrique. Soit E le point de coordonnées $(1,0)$ et M le point tel que l'angle entre OM et l'axe des abscisses soit t avec $0 \le t \le \pi/2$

(encore une fois faites le dessin ou regardez la figure 4.2). t est la longueur de la corde tandis que $\sin(t)$ est l'ordonnée de M. Donc en comparant les longueurs de la corde et de sa hauteur, $0 \le \sin(t) \le t$. Pour aller de E à M, on peut rester sur le cercle ou monter de la hauteur $\sin(t)$ puis se décaler à gauche de $1 - \cos(t)$. Mais ce second chemin est plus long :

$$0 \le t \le \sin(t) + (1 - \cos(t)).$$

Finalement on obtient l'encadrement :

$$0 \le \sin(t) \le t \le \sin(t) + (1 - \cos(t)) \Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \le 1 \le \frac{\sin(t)}{t} + \frac{1 - \cos(t)}{t}.$$

Mais $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$, d'où avec un peu de manipulations d'inégalités

$$1 - \frac{1 - \cos(t)}{t} = 1 - \frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)} = 1 - \frac{\sin(t/2)}{(t/2)} \sin(t/2) \le \frac{\sin(t)}{t} \le 1.$$

Maintenant avec ce qu'on vient de faire en utilisant $t/2$ au lieu de t :

$$0 \le \frac{\sin(t/2)}{(t/2)} \le 1$$

et $\lim_{t \to 0} \sin(t/2) = 0$. Le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t/2)}{(t/2)} \sin(t/2) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(t)}{t} = 0,$$

et on obtient le résultat voulu ensuite pour sin. Certains remarqueront qu'on a raisonné que pour $t \ge 0$ donc la démonstration n'est pas complète. Ils ont raison : il faut juste ajouter que les fonctions étant paire ou impaire on peut remplacer par $t \le 0$ sans problème.

Maintenant prenons x_0 quelconque dans $\mathbb{R}$ et calculons :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\cos(x_0 + (x - x_0)) - \cos(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\cos(x_0)\cos(x - x_0) - \sin(x_0)\sin(x - x_0) - \cos(x_0)}{x - x_0} \\
&= \cos(x_0)\frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0} - \sin(x_0)\frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Posons $t = x - x_0$ et on a

$$\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0)\frac{\cos(t) - 1}{t} - \sin(x_0)\frac{\sin(t)}{t}.$$

Quand x tend vers x_0, t tend vers 0. Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = -\sin(x_0).$$

Pour la fonction sinus c'est pareil :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sin(x_0+(x-x_0))-\sin(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{\sin(x_0)\cos(x-x_0)+\cos(x_0)\sin(x-x_0)-\sin(x_0)}{x-x_0} \\
&= \sin(x_0)\frac{\cos(t)-1}{t}+\cos(x_0)\frac{\sin(t)}{t}.
\end{aligned}$$

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée respective $-\sin$ et cos.

9.3 Théorèmes fondamentaux de l'analyse

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A.

1. f est majorée (respectivement minorée) sur A, si l'ensemble $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$ est majoré (respectivement minoré), c'est-à-dire qu'il existe une constante M (resp. m) telle que pour tout $x \in A$, $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq m$).
2. On dit que f présente un maximum (respectivement minimum) absolu en a, si pour tout $x \in A$, $f(a) \geq f(x)$ (respectivement $f(a) \leq f(x)$). On note $f(a) = \max f(A)$ (resp. $\min f(A)$).
3. On dit que f présente un maximum (respectivement minimum) relatif en a, s'il existe un intervalle ouvert I contenant a, tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$), pour tout $x \in I \cap A$.

Théorème 9.1 *Soit f définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes Ce qui signifie que f présente sur $[a,b]$ un maximum absolu M en $x_1 \in [a,b]$ et un minimum absolu m en $x_2 \in [a,b]$.*

Le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer de diverses façons.

Théorème 9.2 (des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que k est un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = k$.*

Si f est continue, tout «nombre intermédiaire» entre $f(a)$ et $f(b)$ est donc une valeur de la fonction f.

Corollaire 9.4 *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors il existe au moins un élément $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Corollaire 9.5 *Un polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.*

Corollaire 9.6 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. De plus si I est fermé et borné alors $f(I)$ est un intervalle fermé et borné.*

En particulier pour deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f([a, b])$ est un segment. Ainsi il existe deux nombres réels M (*maximum de f* sur $[a, b]$) et m (*minimum de f* sur $[a, b]$) tels que pour tout $x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$ et M et m sont des valeurs de f.

Si à la continuité on ajoute la monotonie alors on obtient une fonction bijective vue au chapitre 7.1.

Théorème 9.3 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.*

1. *$f(I)$ est un intervalle et l'application f est une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *Si a et b sont les bornes de I, où a et b sont des nombres réels ou bien l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, alors les bornes de l'intervalle $f(I)$ sont $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.*
3. *La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Jusqu'à présent les fonctions sont simplement continues. Ajoutons un peu de régularité en les supposant dérivables. Tout d'abord rappelons que pour I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, si $x_0 \in I$, on dit que

- f a un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 et contenu dans I, tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout nombre x appartenant à J ;
- f a un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 et contenu dans I, tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout nombre x appartenant à J ;
- f a un extremum local en x_0 si f a un maximum local ou un minimum local en x_0.

Exemple 9.1

1. Si une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ a un maximum (ou un minimum) en un point $x_0 \in]a, b[$, alors f a aussi un maximum local (ou un minimum local) en x_0.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |1 - x^2|$. Si $x \in] - 1, 1[$, on a $x^2 < 1$, donc $f(x) = 1 - x^2$. On en déduit que si $x \in] - 1, 1[$, alors $f(x) \leq 1$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$. La fonction f a donc un maximum local en 0. Hors de cet intervalle, la fonction f peut prendre des valeurs supérieures à 1 : ainsi $f(4) = 15$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $f(1) = f(-1) = 0$. Donc la fonction f atteint son minimum global (par opposition à local) en 1 et -1. En ces points f a aussi un minimum local.
3. La fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |1 - x^2|$ a encore un minimum local (et global) en 1, mais n'a pas de maximum local en 0.

Lorsqu'une fonction f est dérivable, le théorème suivant donne une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en un point.

Théorème 9.4 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f a un extremum local en un point $x_0 \in I$ et que f est dérivable en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Dans l'exemple 9.1, cas 2, la fonction f a un maximum local en 0, et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = 1 - x^2$. Donc $f'(x) = -2x$ et ainsi $f'(0) = 0$, conformément au théorème. En revanche au point 1, f a un minimum local mais n'est pas dérivable en ce point. En effet si $x > 0$ et $x \neq 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|1 + x||1 - x|}{x - 1} = (1 + x)\frac{|1 - x|}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 1 \\ -(x + 1) & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

Le résultat précédent implique alors :

Théorème 9.5 (de Rolle) *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *$f(a) = f(b) = 0$.*

Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Physiquement cela signifie que si on se déplace sur un rail (le tramway par exemple), si on passe deux fois par le même endroit, alors la vitesse s'est annulée au moins une fois pendant le trajet.

Le théorème des accroissements finis est alors une conséquence du théorème précédent.

Théorème 9.6 (des accroissements finis) *Soient a et b des nombres tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Le nombre $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un point $(c, f(c))$ du graphe de f où la tangente est parallèle à cette droite.

Il permet de montrer rigoureusement l'équivalence entre signe de la dérivée et monotonie.

Corollaire 9.7 *Soient a et b des nombres tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

— *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.*
— *Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.*
— *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.*

On peut même préciser que les deux premières assertions sont des équivalences (voir lemme 3.1). Pour la troisième on a :

Proposition 9.1 *Soit Z l'ensemble des points x de $]a, b[$ tels que $f'(x) = 0$. f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et Z ne contient aucun intervalle ouvert $]u, v[$ avec $u < v$.*

Une classe importante de fonctions (notamment pour les équations différentielles ou pour la convergence d'algorithmes numériques) est celle des fonctions dites lipschitziennes.

Définition 9.4 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est* lipschitzienne sur *I s'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Il est important de souligner que K ne dépend pas du choix des points x et y. Ainsi les accroissements de f sont contrôlés par les accroissements de la variable elle-même. Une telle fonction est alors continue.

Exemple 9.2
— Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ et la fonction valeur absolue sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
— La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur tout segment $[a, b]$.
— La fonction valeur absolue est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, mais sans être dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant affirme qu'une fonction dérivable, à dérivée bornée est lipschitzienne.

Théorème 9.7 (Inégalité des accroissements finis) *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un nombre $K > 0$ tel que $|f'(t)| \leq K$ pour tout $t \in I$. On a alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ quels que soient les nombres x et y appartenant à I.*

Méthode : pour encadrer une expression de la forme $f(x) - f(y)$, pensez au théorème et à l'inégalité des accroissements finis.

Nous allons voir une application à l'étude de la dérivabilité en un point.

Théorème 9.8 (Prolongement de la dérivée) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b]$.*

1. *Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = l$ et f est de classe C^1 sur $[a,b]$.*
2. *Si $\lim_{x \to a^+} |f'(x)| = +\infty$, f n'est pas dérivable en a et sa courbe admet une tangente verticale d'abscisse a.*

Ce résultat peut être commode pour affirmer qu'une fonction possède en un point une dérivée à droite ou à gauche. Mais la réciproque est fausse : une fonction f peut être dérivable en un point a sans que $f'(a)$ soit égal à la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a. Autrement dit, la fonction dérivée n'a aucune raison d'être continue.

Exemple 9.3 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Par composition, f est continue sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs, $\lim_{x \to 0^+}(-1/x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0$. Donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en zéro et ainsi sur $[0,+\infty[$.

Cette fonction est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x \to +\infty} t^2 \exp(-t) = 0$ (par comparaison des limites). Donc $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.

Finalement f est de classe C^1 sur $[0,\infty[$, car dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0)$.

Exemple 9.4 Ce qui suit est un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Les résultats précédents montrent que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire sur $]-\infty,0[$ $]0,+\infty[$. De plus pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Pour tout $x \neq 0$, on a $|\sin(1/x)| \leq 1$. Donc $|f(x)| \leq x^2$, d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

De même si $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\sin(1/x)$ et $|x\sin(1/x)| \leq |x|$. Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Ainsi la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Mais f' n'a pas de limite en 0. Autrement dit, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_{x \to 0} f'(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto 2x\sin(1/x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, alors on en déduit (limite d'une somme) :

$$\lim_{x \to 0} \cos(1/x) = \lim_{x \to 0}(2x\sin(1/x) - f'(x)) = -l.$$

Or ceci est absurde car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Chapitre 10

Alphabet grec

Lettre minuscule	Lettre majuscule	Français	Valeur
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	é
ζ	Z	zéta	z
η	H	éta	e
θ	Θ	théta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p

Lettre minuscule	Lettre majuscule	Français	Valeur
ρ	P	rho	r,rh
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	u
ϕ	Φ	phi	f
χ	X	khi	kh
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	omega	o