Licence SPI deuxième année

Semestre 4

Équations aux dérivées partielles.

Alexandre POPIER

Année : 2018–2019

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) se retrouvent dans de très nombreux domaines, notamment en physique (par exemple mécanique, acoustique), en chimie (cinétique des réactions), ou en biologie (dynamique des populations), etc.

Une ligne électrique est caractérisée au point de vue de la propagation des ondes par les nombres R, L, C et G qui désignent respectivement : R la résistance, L la self (ou inductance), C la capacité, G la conductivité (toutes par unité de longueur). Le voltage E au point x à l'instant t est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial E}{\partial t} + RGE. \tag{1}$$

Cette équation s'appelle équation des télégraphistes. Si $L = G = 0$, cette équation devient $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = RC\frac{\partial E}{\partial t}$. Une telle équation régit de nombreux problèmes de diffusion de la chaleur et s'appelle équation de la chaleur. Si $G = R = 0$ (ce qui est le cas pour les courants à haute fréquence), l'équation (1) devient $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Ce type d'équation correspond à une « propagation par ondes », et est connue sous le vocable équation des ondes.

Définition 0.1 *Une équation comme les précédentes ((1) ou celles de la chaleur ou des ondes), dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables, et qui fait intervenir la solution ainsi que certaines de ces dérivées partielles, est une* équation aux dérivées partielles *(ou EDP en abrégé).*

On appelle ordre *d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.*

Leur résolution est généralement un problème ardu qui nécessite un bagage mathématique important. Il ne s'agit pas ici de développer une théorie complète sur ces problèmes. Nous allons nous restreindre à quelques techniques usuelles : méthodes des caractéristiques, de superposition et de séparation des variables, etc.

En schématisant beaucoup, ces méthodes transforment un problème de résolution d'une équation aux dérivées partielles en un problème de résolution des plusieurs équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé), l'inconnue ne dépendant alors plus que d'une variable. Il reste ensuite encore à traiter le problème des conditions de bord ou aux limites... Le premier chapitre de ce cours sera donc consacré entièrement à la résolution des EDO.

Le chapitre 2 donne quelques notions de base sur les EDP. Le chapitre 3 sera consacrée à la méthode de séparation de variables, méthode de base qui sera complètement développée en L3. La méthode des caractéristiques pour les EDP du premier ordre sera l'objet du chapitre 4. Enfin dans le dernier chapitre nous verrons comment classifier les EDP du second ordre (en dimension 2). À noter que l'outil de base de tous ces chapitres sera les EDO !

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires (rappels)

Les équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé) interviennent naturellement pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. Mais elles sont aussi utilisées directement en physique, en chimie, en mécanique, ou encore en biologie.

Nombres de ces problèmes présentent dans leur modélisation une équation différentielle *ordinaire* du *première ordre* sous forme *résolue*

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t)\right)} \tag{1.1}$$

avec une condition initiale $y(0) = y_0$, où $t \in \mathbb{R}_+$ représente le temps, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ la quantité modélisée en fonction du temps et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la physique du problème. Les exemples du pendule mécanique ou de la chute d'un corps dans l'air sont caractéristiques. Notons tout de suite qu'il y a très peu de cas où l'on sait résoudre *explicitement* ces équations (on peut citer les équations différentielles linéaires, certaines équations à variables séparables, les équations de Bernoulli, les équations de Ricatti, *etc.*). Mais dans le cas du *problème de Cauchy* (1.1), on démontre le théorème 1.4 de Cauchy-Lipschitz, qui donne l'existence et l'unicité d'une solution. De plus, il possible de visualiser toutes les solutions des équations qui satisfont les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz par des méthodes numériques (*schéma d'Euler*).

1.1 Cas linéaires et résolubles

Comme il a été mentionné en tête de ce chapitre, certaines équations différentielles scalaires, sous forme résolue et d'ordre 1, peuvent être résolues explicitement.

1.1.1 Équations linéaires d'ordre 1

On considère le problème de Cauchy sous forme résolue

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.} \tag{1.2}$$

où les coefficients $a(.)$ et $b(.)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.1 *Le système* (1.2) *admet une et une seule solution définie sur* I, *précisément*

$$y(t) = e^{\psi(t)} \int_{t_0}^{t} b(x) e^{-\psi(x)} dx + y_0 e^{\psi(t)}$$

où

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} a(x) dx.$$

En pratique, on utilise rarement le résultat précédent ; on procède formellement de la manière suivante :

1. Résolution de l'équation sans second membre (ESSM (1.2) avec $b(t) = 0$) :

$$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) &\iff \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t), \\ &\iff \ln \frac{y(t)}{C} = \int_{\alpha}^{t} a(x)dx = \phi(t), \\ &\iff y(t) = Ce^{\phi(t)}. \end{aligned}$$

   On remarquera que $\phi(t)$ est une primitive de $a(.)$ qui s'annule en α quelconque (mais fixé). La fonction $\psi(t)$ du Théorème 1.1 est la primitive de $a(.)$ qui s'annule en $\alpha = t_0$.

2. Solution particulière de l'équation avec second membre (EASM) : on cherche une solution particulière évidente qui satisfait l'équation (1.2) avec second membre. Dans le cas contraire, on procède par la méthode de la variation de la constante. Pour cela, on considère une solution de la forme $y_p(t) = C(t)e^{\phi(t)}$ que l'on substitue dans l'équation. En notant $f(t) = e^{\phi(t)}$, on obtient, par un calcul direct,

$$\begin{aligned} y'(t) - a(t)y(t) - b(x) = 0 &\iff C'(t)f(t) + C(t)\underbrace{(f'(t) + af(t))}_{0} - b(t) = 0, \\ &\iff C'(t) = b(t)e^{-\phi(t)}, \\ &\iff C(t) = \int_{\beta}^{t} b(x)e^{-\phi(x)}dx. \end{aligned}$$

3. La solution générale de l'équation avec second membre s'écrit $y_g(t) = y(t) + y_p(t)$. On fixe alors la constante C à partir de la condition initiale $y_g(t_0) = y_0$.

Nombre de problèmes présentent une équation de la forme (non résolue)

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = b(t), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

On procède alors comme suit : on résout les équations sur les intervalles sur lesquels $\alpha(t) \neq 0$. On raccorde les solutions (si possible) en imposant la continuité et la continuité de la dérivée aux points t^* tels que $\alpha(t^*) = 0$.

1.1.2 Quelques équations non linéaires

Équations de Bernoulli, équations de Ricatti

On considère l'équation différentielle d'ordre 1 sous forme résolue suivante (dite de Bernoulli) :

$$(1.4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t)y(t)^n, \quad n > 1, \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

En effectuant le changement de variable $u(t) = y(t)^{1-n}$, on obtient l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & (1-n)a(t)u(t) + (1-n)b(t) \\ u(t_0) & = & u_0 = y_0^{1-n}, \end{array} \right.$$

que l'on sait résoudre.

Dans le cas de l'équation différentielle de Ricatti :

$$(1.5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t) + b(t)y(t) + c(t)y(t)^2, \quad n > 1, \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

où $a(.)$, $b(.)$ et $c(.)$ sont des fonctions continues, si l'on connait une solution particulière $y_p(t)$, on effectue le changement de variable $y(t) = z(t) + y_p(t)$ qui donne l'équation de Bernoulli

$$(1.6) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} z'(t) & = & (b(t) + 2c(t)y_p(t))\, z(t) + c(t)z(t)^2, \quad n > 1, \\ z(t_0) & = & y_0 - y_p(t_0) \end{array} \right.$$

que l'on sait résoudre.

Applications. Dans le cas de la chute d'un corps, le principe fondamental de la dynamique, donne l'équation différentielle

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{m}v(t)^2 + g', \quad v(0) = 0,$$

On a une solution $v^* = \sqrt{\frac{g'}{k'}}$. On effectue le changement de variable $z(t) = v(t) - v^*$. L'équation en z est

$$z' = -2k'v^*z - k'z^2, \quad z(0) = -v^*$$

qui est une équation de Bernoulli. On pose $u(t) = z(t)^{-1}$ et l'équation en u est

$$u' = 2k'v^*u + k', \quad u(0) = -\frac{1}{v^*}.$$

La solution générale de l'ESSM est $u(t) = Ce^{2k_2v^*t}$ et une solution particulière de l'EASM est $u^p(t) = -\frac{1}{2v^*}$. Finalement on a la solution générale $u(t) = Ce^{2k'v^*t} - \frac{1}{2v^*}$. La condition initiale fixe la constante C et finalement

$$u(t) = -\frac{1}{2v^*}(e^{2k'v^*t} + 1).$$

Par remontée,

$$z(t) = \frac{-2v^*}{e^{2k'v^*t} + 1}$$

et

$$v(t) = \frac{-2v^*}{e^{2k'v^*t} + 1} + v^* = v^* \frac{e^{2k'v^*t} - 1}{e^{2k'v^*t} + 1}.$$

□

Équations à variables séparables

Les équations différentielles non linéaires à variables séparables se présentent sous la forme

$$\boxed{y'(t) = f(y(t))g(t).} \tag{1.7}$$

Elles peuvent se résoudre si les quantités

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} \quad \text{et} \quad g(t)$$

admettent des primitives usuelles.

On peut également ramener à la forme précédente les équations différentielles du type

$$y'(t) = f(\frac{y(t)}{t}). \tag{1.8}$$

En posant $u(t) = \frac{y(t)}{t}$, on obtient

$$u' = \frac{(f(u) - u)}{t} \quad \text{ou} \quad \frac{u'}{(f(u) - u)} = \frac{1}{t}$$

qui est à variables séparables.

1.1.3 Système différentiels

On considère les systèmes de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) & = & a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ \vdots & & \\ y_n'(t) & = & a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{array} \right. \tag{1.9}$$

ou sous la forme matricielle

$$y'(t) = A(t).y(t) + b(t)$$

avec

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \ldots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \ldots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 1.4 donne l'existence et l'unicité de la solution qui passe par une condition initiale $y(t_0) = y_0$ fixé dans le cas où les fonctions $A(t)$ et $b(t)$ sont continues. Dans ce cas la fonction $f(t, Y) = A(t)Y + B(t)$ est lipschitzienne en Y de constante $k(t) = |||A(t)|||$.

Théorème 1.2 *Pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il passe une solution maximale unique, définie sur I tout entier.*

Dans le cas général on ne sait pas résoudre explicitement l'équation différentielle pour $A(t)$ et $b(t)$ quelconques. Si le système est dit sans second membre, i.e. $B = 0$, alors l'ensemble des solutions maximales est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n : l'application qui à Y solution maximale associe $Y(t_0)$, est un isomorphisme linéaire. Dans le cas général, si $Y_{(1)}$ est une solution globale du système (1.9), alors l'ensemble des solutions est de la forme $Y_{(1)} + Z$ avec Z solution maximale du système sans second membre.

Le système sans second membre est résoluble explicitement si A est constante.

Définition 1.1 *L'exponentielle d'une matrice A est la matrice*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposition 1.1 *La solution générale de l'équation sans second membre est*

$$y(t) = e^{tA} C$$

où C est un vecteur colonne de constantes de dimension n.

Une solution particulière $y^p(t)$ de l'équation avec second membre se détermine par une méthode de variation de la constante. Il faut pouvoir résoudre (pour chaque coordonnée)

$$C'(t) = e^{-tA} b(t).$$

Ainsi la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y(t) = e^{tA} C + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-uA} b(u) du.$$

Méthodes pratiques du calcul de l'exponentielle

La difficulté réside dans le calcul explicite de l'exponentielle de la matrice tA. Il y a plusieurs méthodes :

— calcul direct de e^{tA} dans le cas où A est la somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente ;

— calcul de e^{tA} (ou résolution du système) dans le cas où A est diagonalisable ;

— résolution du système lorsque A est trigonalisable ;

— méthodes de substitution ou de combinaisons linéaires (hasardeux mais rapide).

Dans la suite, on développe les deux premières méthodes.

Matrices nilpotentes Dans ce cas, on a $A = \lambda I_n + N$ où N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{\lambda t I_n + tN} = e^{\lambda t I_n} e^{tN} = e^{\lambda t} \left(I_n + tN + \dots \frac{t^{p-1} N^{p-1}}{(p-1)!} \right).$$

Matrices diagonalisables Dans la cas où A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $A = P\Delta P^{-1}$ où Δ est diagonale. Alors

$$\begin{aligned} y'(t) = Ay(t) + b(t) &\iff y'(t) = P\Delta P^{-1}y(t) + b(t) \\ &\iff P^{-1}y'(t) = \Delta P^{-1}y(t) + b(t) \\ &\iff z'(t) = \Delta z(t) + b(t) \quad \text{ou } z(t) = P^{-1}y(t). \end{aligned}$$

Le nouveau système est plus simple et on peut résoudre chacune des équations indépendamment. On a alors $y(t) = Pz(t)$. On remarque que dans le cas où il n'y a pas de second membre, il n'y a pas besoin de calculer P^{-1}.

1.1.4 Équations linéaires d'ordre 2

Ici on ne donne de résultat que sur le cas constant. Donc ce sont des équations de la forme :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x),} \tag{1.10}$$

avec a, b et c des nombres réels, $a \neq 0$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions des équations (1.10). L'équation homogène associée est

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1.11}$$

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions des équations (1.11). On a alors

Lemme 1.1 *Pour toute fonction f_0 appartenant à $\mathcal{S}$,*

$$\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_h = \{f_0 + g,\ g \in \mathcal{S}_h\}.$$

Résolution de (1.11) On se ramène au système suivant : $y_1 = y$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -\frac{b}{a}y_2(t) - \frac{c}{a}y_1(t) \end{array} \right.$$

ou sous la forme matricielle

$$y'(t) = Ay(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ dans } \mathbb{C}. \tag{1.12}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont à distinguer suivant Δ.

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Donc A a deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2. Alors on sait que

$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow \exp(xA) = P \begin{pmatrix} e^{r_1 x} & 0 \\ 0 & e^{r_2 x} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Alors les solutions sont combinaison linéaire de deux fonctions exponentielles :

$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $r_0 = -b/(2a)$. Alors A est trigonalisable :

$$A = P \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow \exp(xA) = P \begin{pmatrix} e^{r_0 x} & x e^{r_0 x} \\ 0 & e^{r_0 x} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Alors

$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Enfin si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec α et β dans $\mathbb{R}$. Alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow \exp(xA) = P \begin{pmatrix} e^{r_1 x} & 0 \\ 0 & e^{r_2 x} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Comme on cherche des solutions réelles (A est une matrice réelle), on a

$$e^{xA} = e^{\alpha x} Q \begin{pmatrix} \cos(\beta x) & 0 \\ 0 & \sin(\beta x) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

   Dans ce cas

$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x) \right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dans tous les cas, on retrouve que l'ensemble $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel de dimension deux.

Exemples :

— $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega > 0$: $\mathcal{S}_h = \{x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. On a aussi $\mathcal{S}_h = \{x \mapsto A \cos(\omega x + \phi),\ A \in \mathbb{R}_+,\ \phi \in] - \pi, \pi]\}$.

— $y'' + 2ky' + (k^2 + \omega^2) y = 0$ (oscillateur avec amortissement), avec $k > 0$ et $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h &= \left\{ x \mapsto e^{-kx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto A e^{-kx} \cos(\omega x + \phi),\ A \in \mathbb{R}_+,\ \phi \in] - \pi, \pi] \right\}. \end{aligned}$$

Résolution de (1.10) La présence d'un second membre se résout par variation de la constante. Si (y_1, y_2) est une base de solutions de l'équation homogène, on cherche y sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(t) & = & \lambda(t) y_1(t) + \mu(y) y_2(t) \\ y'(t) & = & \lambda(t) y_1'(t) + \mu(t) y_2'(t) \end{array} \right.$$

ce qui impose

$$\lambda'(t)y_1(t) + \mu'(y)y_2(t) = 0.$$

En réinjectant l'EDO, on obtient de plus

$$a\lambda'(t)y_1'(t) + a\mu'(y)y_2'(t) = f(t).$$

Ainsi on a un système différentiel d'inconnues λ' et μ', que l'on résout. Puis on intègre les fonctions trouvées.

Dans le cas particulier où $f(x) = P(x)e^{dx}$ avec P polynôme et d constante, on a la « règle de cuisine ».

Lemme 1.2 *L'équation différentielle (1.10) admet une solution particulière de la forme $y_0 = Q(x)e^{dx}$ avec :*
- *P et Q de même degré si d n'est pas racine de l'équation caractéristique (1.12) ;*
- *degré Q égal au degré de P plus un, si d est racine simple de (1.12) ;*
- *degré Q égal au degré de P plus deux, si d est racine double de (1.12).*

Et dans tous les cas, $\mathcal{S} = y_0 + \mathcal{S}_h$.

Exemples :

1. $y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$: $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right) e^{2x} + \mu e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
2. $y'' + y' + y = xe^{-x}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{-x/2}\left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + (x+1)e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1.2 Cas général : existence et unicité

En dehors des cas vus précédemment, il n'est en général pas possible de calculer explicitemment la solution d'une EDO. Néanmoins on peut :
- affirmer ou non qu'il existe au moins une solution, qu'elle est unique ;
- donner quelques propriétés de la solution : ensemble de définitions, régularité, bornitude, comportement en temps grand, etc.

Commençons donc par aborder un point crucial : l'existence et l'unicité des solutions. Pour cela, nous nous plaçons dans la cadre suivant :
- U désigne un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,
- $f : U \to \mathbb{R}^d$ est une application continue.

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \boxed{y' = f(t, y),\ (t, y) \in U,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^d.}$$

1.2.1 Quelques définitions et premières propriétés

Définition 1.2 *Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^d$ telle que*

1. $\forall t \in I,\ (t, y(t)) \in U$,

2. $\forall t \in I,\ y'(t) = f(t, y(t))$.

L'inconnue de (E) est donc une fonction. Ici y ne dépend que d'une seule variable t, on parle d'équation différentielle *ordinaire*. Souvent, concrètement, la variable t représente le temps, et $y = (y_1, \dots, y_d)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné.

Si on décompose en coordonnées et qu'on écrit $y = (y_1, \dots y_d)$ et $f = (f_1, \dots f_d)$, alors (E) est un système différentiel du premier ordre à m fonctions inconnues $y_1, \dots, y_m$:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots y_d(t)), \\ & \vdots \\ y_d'(t) &= f_d(t, y_1(t), \dots y_d(t)). \end{cases}$$

Problème de Cauchy : étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^d$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

Solutions maximales

Définition 1.3 *Soient $y : I \to \mathbb{R}^d$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un* prolongement *de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.*

Définition 1.4 *On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^d$ est* maximale *si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$, avec $I \subsetneq \tilde{I}$.*

Théorème 1.3 *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times U'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.5 *Une solution* globale *est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

Remarque 1.1 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple : (E) : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cherchons les solutions de cette équation.

- Nous avons la solution globale $y(t) = 0$.
- Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit $\dfrac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration
$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$
Cette formule définit deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et $]-C, +\infty[$; ces solutions sont maximales, mais pas globales.
En fait $y(t) = 0$ est la seule solution globale.

1.2.2 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Ici on suppose en plus que f est LOCALEMENT LIPSCHITZIENNE en y. Ceci signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne en y sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Notons que si f est de classe C^1 alors par l'inégalité des accroissements finis, f est localement lipschitzienne.

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ un cylindre sur lequel f est k-lipschitzienne en y et soit $M = \sup_{C_0} \|f\|$.

Théorème 1.4 (Cauchy-Lipschitz) *Si $f : U \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solutions ε_p-approchées avec ε_p tendant vers 0, converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Précisons un peu les choses. Si

$$C = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d ; \ |t - t_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}.$$

et

$$\forall (t, x) \in C, \ \forall (t, y) \in C, \ |f(t, x)| \leq M, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

alors le problème de Cauchy admet une solution

— définie sur $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min(a, b/M)$,

— $y(t_0) = y_0$

— $(t, y(t)) \in C$, pour tout $t \in J$.

Remarque 1.2 *Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste valable si au lieu de $\mathbb{R}^d$, on choisit un espace de Hilbert (ou de Banach) de dimension quelconque. Il « suffit » d'adapter la preuve précédente.*

Unicité globale

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale, au moyen d'un raisonnement de connexité.

Théorème 1.5 *Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to \mathbb{R}^d$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I, alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I.*

Corollaire 1.1 *Si f est localement lipschitzienne en y sur U, pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^d$ et une seule.*

Géométriquement, cela signifie que deux solutions maximales ne peuvent pas se couper.

Condition suffisante d'existence de solutions globales

Donnons d'abord quelques précisions sur l'intervalle de définition de la solution maximale. Supposons en premier lieu que f est définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.6 *Soit (I,y) une solution maximale avec $I=]T_*,T^*[$. Alors,*
- *ou bien $T^*=b$, ou bien $T^*<b$ et $\lim_{t\to T^*}|y(t)|=+\infty$;*
- *ou bien $T_*=a$, ou bien $T_*>a$ et $\lim_{t\to T_*}|y(t)|=+\infty$.*

Corollaire 1.2 *Sous une des hypothèses suivantes :*
1. *$f:]a,b[\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ continue et bornée.*
2. *$f:I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ continue et pour tout compact $K\subset I$ il existe $C_1>0$ et $C_2>0$ tels que : $|f(t,y)|\leq C_1|y|+C_2$, $\forall(t,y)\in K\times\mathbb{R}^d$.*

Alors toute solution maximale est globale.

Supposons maintenant que f est définie sur $]a,b[\times\Omega$ avec Ω ouvert.

Théorème 1.7 *Soit (I,y) une solution maximale avec $I=]T_*,T^*[$. Alors,*
- *ou bien $T^*=b$, ou bien $T^*<b$ et pour tout compact K de Ω il existe $t<T^*$ tel que $x(t)\notin K$.*
- *ou bien $T_*=a$, ou bien $T_*>a$ et pour tout compact K de Ω il existe $t>T_*$ tel que $x(t)\notin K$.*

Ce qui suit est une condition d'existence utile pour les solutions globales, reposant sur une hypothèse de Lipschitz « semi-globale » de $f(t,y)$ relativement à y.

Théorème 1.8 *Soit $f:U\to\mathbb{R}^d$ une application continue sur un ouvert produit $U=J\times\mathbb{R}^d$, où $J\subset\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k:J\to\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t\in J$ fixé, l'application $y\mapsto f(t,y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors toute solution maximale de l'équation $y'=f(t,y)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).

1.2.3 Équations différentielles d'ordre supérieur à un

Un système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^d$ est une équation de la forme

$$y^{(p)}=f(t,y,y',\ldots,y^{(p-1)}), \tag{1.13}$$

où $f:U\to\mathbb{R}^d$ est une application continue définie sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^d)^p$. Une solution de (1.13) sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ est une application $y:I\to\mathbb{R}^d$ p-fois dérivable, telle que

1. $\forall t\in I$, $y(t),y'(t),\ldots,y^{(p-1)}(t)\in U$;
2. $\forall t\in I$, $y^{(p)}(t)=f'(t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(p-1)}(t))$.

Si f est de classe C^k, les solutions y sont de classe C^{k+p}. Ce système (1.13) est équivalent au système différentielle d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{dY_0}{dt} & = & Y_1 \\ \dfrac{dY_1}{dt} & = & Y_2 \\ & \vdots & \\ \dfrac{dY_{p-2}}{dt} & = & Y_{p-1} \\ \dfrac{dY_{p-1}}{dt} & = & f(t, Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \end{array} \right. \tag{1.14}$$

si l'on pose $Y_0 = y$, $Y_1 = y'$, ... Le système (1.14) peut encore s'écrire $Y' = F(t, Y)$ avec

$$\begin{array}{l} Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^d)^p \\ F = (F_0, F_1, \dots, F_{p-1}) : U \to (\mathbb{R}^d)^p \\ F_0(t, Y) = Y_1, \dots, F_{p-2}(t, Y) = Y_{p-1}, \\ F_{p-1}(t, Y) = f(t, Y). \end{array}$$

Tous les résultats énoncés précédemment (théorèmes **??**, 1.4, 1.5 et 1.8, corollaires **??** et 1.1) s'appliquent si la fonction F remplit les hypothèses de ces résultats.

Remarque 1.3 *Pour résoudre le problème de Cauchy lié au système (1.14), il faut connaître* $Y(t_0) = (Y_0(t_0), Y_1(t_0), \dots, Y_{p-1}(t_0))$*, donc disposer des données*

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(p-1)}(t_0),$$

c'est-à-dire les valeurs à l'instant t_0 *des* $p-1$ *premières dérivées de* y*.*

Chapitre 2

Quelques notions sur les équations aux dérivées partielles

Nous allons commencer par rappeler quelques grands principes relatifs aux équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé). Puis nous verrons comment les EDP quasi-linéaires (en dimension 2), qui représentent la majorité des EDP que vous rencontrerez (équation de la chaleur, équation des ondes, équation de Poisson), peuvent se ramener à trois cas canoniques : l'équation de Laplace, l'équation des ondes et l'équation de la chaleur. On notera qu'il existe des EDP célèbres non-linéaires comme les équations de Navier-Stokes de la dynamique des fluides, qui ne seront pas abordées dans ce cours.

2.1 Équations linéaires et principe de superposition

Définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel de fonctions. Un opérateur linéaire sur E est une application A définie sur E et telle que :*

1. $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ *pour tout* $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*
2. $A(u+v) = A(u) + A(v)$ *pour tout u et tout v dans E.*

Souvent $A(u)$ est noté Au. Voyons quelques exemples.
Exemples.

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. L'application A définie par $Au = u'$ est un opérateur linéaire sur E.
2. Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et i compris entre 0 et d. L'application définie par $Au = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ (dérivée partielle de u par rapport à x_i) est linéaire.
3. L'opérateur ∇ (gradient ou nabla) défini par

$$\boxed{\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)}$$

   est linéaire. Remarquer que $\nabla u \in \mathbb{R}^d$.

4. On appelle laplacien de u la fonction Δu définie par

$$\boxed{\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.}$$

   C'est un opérateur linéaire.

5. L'opérateur linéaire div (divergence) est défini sur les fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ par

$$\boxed{\text{div } u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.}$$

On vérifie aisément que

$$\boxed{\Delta = \text{div } (\nabla).}$$

Les opérateurs des exemples 2, 3, 4 et 5 sont dits différentiels, car ils ne font intervenir que la fonction et ses dérivées partielles.

Définition 2.2 *Une équation aux dérivées partielles* linéaire *est une équation de la forme $\mathcal{L}u = 0$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel linéaire. On dit quelquefois que l'équation $\mathcal{L}u = 0$ est une* équation linéaire homogène *ou sans second membre et que $\mathcal{L}u = g$ où g est une fonction non identiquement nulle, est une* équation linéaire avec second membre.

Exemples. Les premières sont les plus classiques et sont celles sur lesquelles nous nous concentrerons.

Équation de la chaleur	$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0}$
Équation des cordes ou membranes vibrantes	$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0}$

Celles qui suivent peuvent être rencontrées également en physique.

Équation de Laplace	$\Delta u = 0$
Équation de Poisson	$\Delta u = g$
Équation de Helmholtz	$\Delta u + \lambda u = 0$
Équation de Klein-Gordon	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \lambda^2 u = 0$
Équation de Schrödinger (E opérateur, V constante)	$\Delta u + (E - V)u = 0$
Équation des ondes bi-harmonique	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta^2 u = 0$
Équation des télégraphistes	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u + \beta^2 u = 0$

Théorème 2.1 (Superposition) *Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel linéaire, soient u_1, u_2, …, u_n n solutions de $\mathcal{L}u = 0$. Alors $u = a_1 u_1 + \dots a_n u_n$ est aussi solution de $\mathcal{L}u = 0$ pour tout choix de $a_1, \dots, a_n$.*

Exemple. $u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\left(-j^2\pi^2 t\right) \sin(j\pi x)$ est une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour tout choix de $a_1, \dots, a_n$.

On peut aussi superposer un nombre infini de solutions (sous réserve de pouvoir justifier certains passages à la limite). Ainsi si on peut montrer que

$$u(t,x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\left(-j^2\pi^2 t\right) \sin(j\pi x)$$

est une fonction bien défine, deux fois dérivable en x et une fois dérivable en t, cette limite est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Autre exemple, la fonction $u(t,x) = \exp(\lambda t)\exp(i(kx - \omega t))$ représente une onde plane monochromatique amortie. Elle est solution de l'équation des télégraphistes

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \beta^2 u = 0$$

si :

$$-c^2k^2 + \omega^2 - \lambda^2 - \alpha^2\lambda - \beta^2 + i(\alpha^2\omega + 2\omega\lambda) = 0.$$

Soit $u(t,x) = \exp(-\frac{\alpha^2}{2}t)\exp(i(kx - \omega(k)t))$ avec $\omega^2(k) = \beta^2 + c^2k^2 - \frac{\alpha^4}{4}$ qu'on supposera strictement positif. Il est alors souvent intéressant d'examiner :

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp(-\frac{\alpha^2}{2}t)\exp(i(kx - \omega(k)t))dk$$

obtenue par superposition d'ondes planes.

2.2 Conditions de bord, initiales, frontières, aux limites

On sait que toutes les solutions de l'équation différentielle ordinaire : $f'' + \omega^2 f = 0$, sont $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. A et B sont des constantes arbitraires. Une solution n'est connue que si ces constantes sont fixées. Par exemple si $f(0)$ et $f'(0)$ sont donnés, alors

$$f(t) = f(0)\cos(\omega t) + \frac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega t).$$

Dans la pratique c'est la nature du problème physique représenté par l'équation qui permettra de fixer ces constantes.

Maintenant reprenons le cas des EDP. Par exemple $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$. u est l'inconnue, fonction de deux variables x et y. Pour y fixé, une solution est une fonction dont la dérivée seconde vaut 1. Donc

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\phi(y) + \psi(y).$$

Les solutions dépendent donc de grandeurs qui devront être fixées par les données du problème physique représenté par l'équation. Celles-ci dépendent en général de certaines variables ; il faudra donc les connaître sur une partie de $\mathbb{R}^2$ non réduite à un point, soit une courbe, soit une surface. Dans l'exemple précédent, si on impose $u(0,y) = F(y)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = G(y)$, alors la solution est

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xG(y) + F(y).$$

Le plus souvent on n'étudie le phénomène que dans un domaine et les conditions qu'on impose sont la donnée de la solution et de certaines de ses dérivées sur le bord du domaine. On qualifie donc ces conditions de conditions au bord.

Si l'une des variables représente le temps, on réserve le terme de condition initiale pour la donnée d'une fonction pour $t = 0$ et pour les autres variables, on parle de conditions frontières.

Exemple. Toute solution de $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ est de la forme $u(t,x) = F(t+x)$ (voir chapitre **??**). La solution du problème de valeur initiale : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(0,x) = f(x)$ est donc $u(t,x) = f(t+x)$. La solution du problème frontière $u(t,1) = g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est $u(t,x) = g(t+x-1)$. Ces deux solutions sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dans certains cas, on peut seulement préciser les limites des solutions et non leur valeur sur le bord du domaine. On parle alors de conditions aux limites. Ainsi pour toute fonction f bornée,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y)dy$$

est solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas définie pour $t < 0$ et on a simplement

$$\lim_{t\to 0,\ t>0} u(t,x) = f(x).$$

On notera enfin la notion suivante.

Définition 2.3 *Un problème est* bien posé *(ou* stable*) si une « petite » variation des conditions de bord entraîne une « petite » variation de la solution.*

Dans l'exemple vu précédemment, on constate que la condition

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| = |f_1(t+x) - f_2(t+x)| \leq \varepsilon.$$

Le problème est bien posé.

Chapitre 3

Méthode de séparation de variables

3.1 Équation de la chaleur

Commençons par léquation de la chaleur dans une barre avec bord à zéro. On cherche donc à résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

pour $0 < x < L$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires :

— condition initiale :

$$u(0, x) = f(x); \tag{3.2}$$

— conditions frontières (ou de bord) :

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0. \tag{3.3}$$

L'équation (3.1) et les condtions de bord (3.3) sont linéaires et homogènes. La séparation des variables consiste alors à chercher u sous la forme

$$u(t, x) = \phi(t)\psi(x).$$

Alors l'équation (3.1) devient

$$\phi'(t)\psi(x) = \phi(t)\psi''(x) \Longleftrightarrow \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$$

avec (3.2) et (3.3) :

$$\phi(0)\psi(x) = f(x), \qquad \phi(t)\psi(0) = \phi(t)\psi(L) = 0.$$

Si f n'est pas identiquement nulle (sinon $u \equiv 0$ est solution), alors on est conduit au problème suivant :

Problème 3.1 (de Sturm-Liouville) *Trouver tous les nombres λ et toutes les fonctions ψ_λ telles que*

$$\psi''_\lambda(x) + \lambda\psi_\lambda(x) = 0, \qquad \psi_\lambda(0) = \psi_\lambda(L) = 0.$$

Alors on aura : $\phi'_\lambda(t) + \lambda\phi_\lambda(t) = 0$ et $u(t,x) = \phi_\lambda(t)\psi_\lambda(x)$ sera solution de (3.1) avec (3.3).

Les solutions du problème 3.1 dépendent du signe de λ.

— Pour $\lambda = 0$, $\psi_0(x) = ax + b$ avec $\psi_0(0) = \psi_0(L) = 0$, soit $\psi_0(x) = 0$.

— Pour $\lambda < 0$, $\psi_\lambda(x) = a\exp(\sqrt{-\lambda}x) + b\exp(-\sqrt{-\lambda}x)$. Les conditions de bord font que là aussi on doit avoir $a = b = 0$.

— Pour $\lambda > 0$, alors
$$\psi_\lambda(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x).$$
La condition $\psi_\lambda(0) = 0$ implique que $a = 0$. Mais la seconde condition $\psi_\lambda(L) = 0$ impose que
$$b\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Longrightarrow b = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\lambda}L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement les seules solutions non nulles sont données par :
$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \psi_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$
pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et b_n une constante quelconque. Alors
$$\phi_n(t) = \exp(-\lambda_n t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$
et la fonction
$$u(t,x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$
vérifie (3.1) et (3.3). Par superposition toute combinaison linéaire des solutions précédentes est encore solution. Autrement dit
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$
vérifie aussi (3.1) et (3.3). Le choix de N et des b_n est absolument quelconque. La valeur de ces constantes sera fixée par la condition (3.2) :
$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Ainsi si $L = 1$ et $f(x) = \sin(3\pi x) - 2\sin(5\pi x)$, on aura
$$u(t,x) = \sin(3\pi x)e^{-9\pi^2 t} - 2\sin(5\pi x)e^{-25\pi^2 t}.$$

Ici u est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

Pour une fonction f quelconque, il nous faudra considérer des sommes infinies. On dit qu'on décompose f en série de Fourier. Cette généralisation sera au programme du semestre prochain.

On remarquera que la présence de l'exponentielle décroissante en temps fait que la solution est très rapidement nulle. En effet on a

$$|u(t,x)| \leq \exp\left(-\frac{\pi^2}{L^2}t\right)\sum_{n=1}^{N}|b_n|.$$

On peut à loisir modifier les conditions de bord ou initiales. Ainsi si on considère une barre avec extrémités isolées, on aura comme problème (3.1) et (3.2), mais avec comme conditions de bord :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0. \tag{3.4}$$

Dans ce cas la séparation de variables va donner le problème suivant.

Problème 3.2 (de Sturm-Liouville) *Trouver tous les nombres λ et toutes les fonctions ψ_λ telles que*

$$\psi_\lambda''(x) + \lambda\psi_\lambda(x) = 0, \qquad \psi_\lambda'(0) = \psi_\lambda'(L) = 0.$$

Alors il restera à trouver ϕ_λ telle que : $\phi_\lambda'(t) + \lambda\phi_\lambda(t) = 0$. La fonction $u(t,x) = \phi_\lambda(t)\psi_\lambda(x)$ sera solution de (3.1) avec (3.4).

Dans ce cas on obtient $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ et $\psi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\phi_n(t) = \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$ et on aura par superposition :

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

Pour que la condition (3.2) soit satisfaite, il faut que

$$u(0,x) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

D'autres cas seraient traités de la même manière. Par exemple :

$$u(t,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) + hu(t,L) = 0.$$

L'extrémité en zéro est maintenue à température nulle, tandis que celle en L est plongée à l'air libre, l'air étant à température nulle.

3.2 Équation des ondes

La résolution de l'équation des ondes par séparation de variables se fait comme pour l'équation de la chaleur. La seule différence est que la composante de temps va satisfaire une équation différentielle du second ordre, ce qui nécessite pour la résoudre de donner une seconde condition initiale.

Extrémités fixes. Considérons pour commencer une corde vibrante à extrémités fixes. Cela se modélise comme suit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \tag{3.5}$$

pour $0 < x < L$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires :

— condition initiale :

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x); \tag{3.6}$$

— conditions frontières (ou de bord) :

$$u(t,0) = u(t,L) = 0. \tag{3.7}$$

Comme pour l'équation de la chaleur, l'EDP (3.5) et la condition (3.7) sont linéaires et homogènes. On cherche donc la solution sous la forme : $u(t,x) = \psi(x)\phi(t)$, en supposant que ni ψ, ni ϕ ne sont pas la fonction nulle. On obtient alors

$$\frac{1}{c^2}\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\lambda$$

λ étant la constante de séparation. De plus la condition (3.7) donne : $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Ainsi on retrouve le problème de Sturm-Liouville 3.1. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

De là ϕ vérifie : $\phi''(t) + c^2\lambda_n\phi(t) = 0$, ce qui donne :

$$\phi_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

avec A_n et B_n constantes. Par superposition, on suppose que la solution u peut se représenter sous forme d'une somme [1] :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x)\phi_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]. \tag{3.8}$$

Chaque terme de la série satisfait (3.5) et la condition (3.7). Pour que la condition (3.6) soit aussi satisfaite, il faut que

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

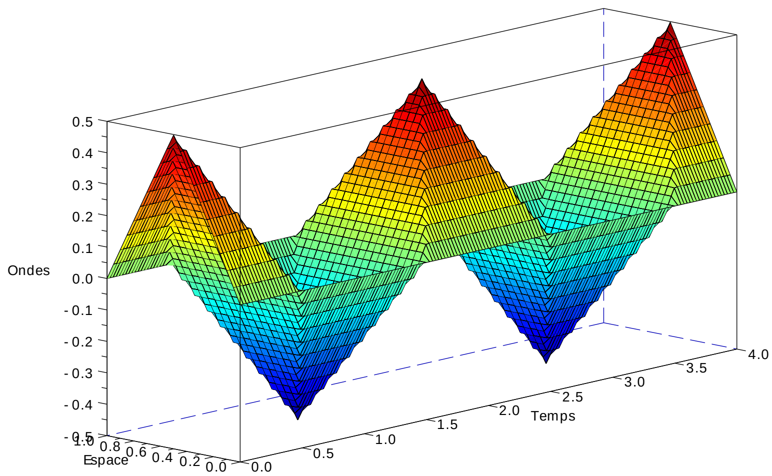
1. Dans le cas général u est sous la forme d'une série, c'est-à-dire d'une somme infinie.

Les termes dans l'expresion (3.8) de u sont appelés modes normaux de vibration.

Prenons par exemple $c = L = 1$, $g(x) = 0$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, 1/2]$ et $f(x) = 1 - x$ sur $]1/2, 1[$. Alors (3.8) devient [2] :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} \sin(n\pi x) \cos(n\pi t).$$

Voici le graphe de u.



On remarque que
- la régularité de u est plus délicate à traiter que dans le cas de l'équation de la chaleur ;
- la fonction f est « propagée », et non pas dissipée ;
- qu'il n'y a pas d'amortissement exponentielle.

Extrémités libres. La corde vibrante a ses extrémités libres. L'équation (3.5) et la condition (3.6) restent identiques, mais la condition de bord devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0. \tag{3.9}$$

La séparation de variables redonne pour ψ le problème de Sturm-Liouville 3.2, avec pour solutions :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \psi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pour λ_0, la fonction ϕ_0 est donc : $\phi_0(t) = \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{2}A_{20}t$, tandis que pour λ_n, $n \geq 1$, on retrouve

$$\phi_n(t) = A_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + A_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

2. Hors programme ici !

Enfin la solution u s'écrira :

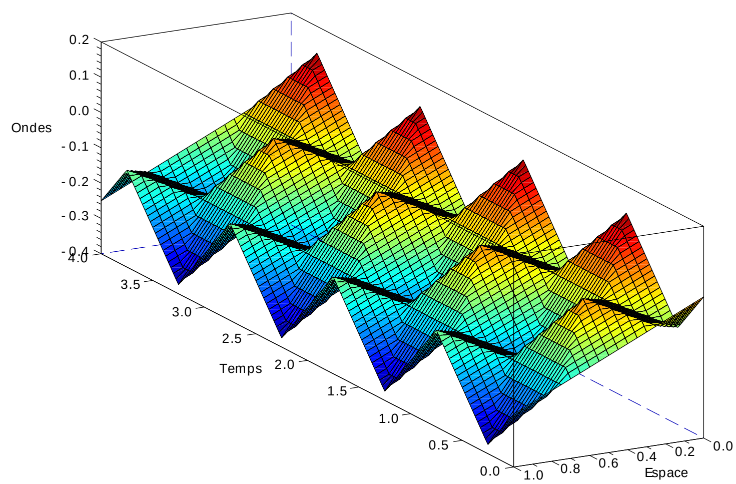
$$(3.10)\quad u(t,x) = \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{2}A_{20}t + \sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_{1n}\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + A_{2n}\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right].$$

Les coefficients sont obtenus en prenant $t = 0$ dans (3.10) et en utilisant (3.6).

Prenons par exemple $c = L = 1$, $f(x) = 0$ et $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$ et $g(x) = 0$ ailleurs. Alors (3.10) devient :

$$u(t,x) = -\frac{1}{2}t - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi x)\sin(n\pi t).$$

Voici le graphe de u.



3.3 Équation de Laplace

On considère le cas de la température d'un rectangle

$$D = \{(x,y),\ 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq K\}$$

en régime stationnaire, sans sources de chaleur, et avec une température fixée au bord (L et K sont des constantes). Ce problème peut être modélisé comme suit :

$$(3.11)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

pour $0 < x < L$ et $0 < y < K$ avec au bord :

— sur x, pour $0 < y < K$:

$$(3.12)\qquad u(0,y) = f_1(y), \quad u(L,y) = f_2(x);$$

— sur y, pour $0 < x < L$:

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u(x, K) = g_2(x). \tag{3.13}$$

Par principe de superposition, on peut chercher u sous la forme :

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

où u_1 satisfait (3.11), (3.13) et (3.12) avec $f_1 = f_2 = 0$, tandis que u_2 vérfie (3.11), (3.12) et (3.13) avec $g_1 = g_2 = 0$. Concentrons nous sur u_1 :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x, y) = 0, \\
&u_1(0, y) = 0, \quad u_1(L, y) = 0, \\
&u_1(x, 0) = g_1(x), \quad u_1(x, K) = g_2(x).
\end{aligned}$$

On cherche u_1 sous la forme $u_1(x, y) = \psi(x)\phi(y)$. On obtient alors

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = -\lambda.$$

On retrouve alors que ψ est encore solution du problème de Sturm-Liouville 3.1 :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

De son côté, ϕ est solution alors de

$$\phi_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \phi_n(y) = 0,$$

qui a pour solution

$$\phi_n(y) = \alpha_n \exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \beta_n \exp\left(-\frac{n\pi}{L}y\right),$$

avec α_n et β_n deux constantes. On préfère utiliser les fonctions trigonométriques hyperboliques (pour des raisons de symétrie et de simplification des conditions de bord) :

$$\phi_n(y) = \gamma_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \delta_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}y\right),$$

ou encore

$$\phi_n(y) = A_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi(y-K)}{L}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

γ_n, δ_n, A_n et B_n sont des constantes. On rappelle que : $\operatorname{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\operatorname{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Ainsi la solution u_1 s'écrit

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi(y-K)}{L}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right]. \tag{3.14}$$

Sous réserve que la série converge, u_1 vérifie donc (3.11) et (3.12) avec $f_1 = f_2 = 0$. Injectons maintenant (3.14) dans (3.13) :

$$\begin{aligned} u_1(x,0) = g_1(x) &= \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \ \mathrm{sh}\left(-\frac{n\pi K}{L}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left[-A_n \ \mathrm{sh}\left(\frac{n\pi K}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

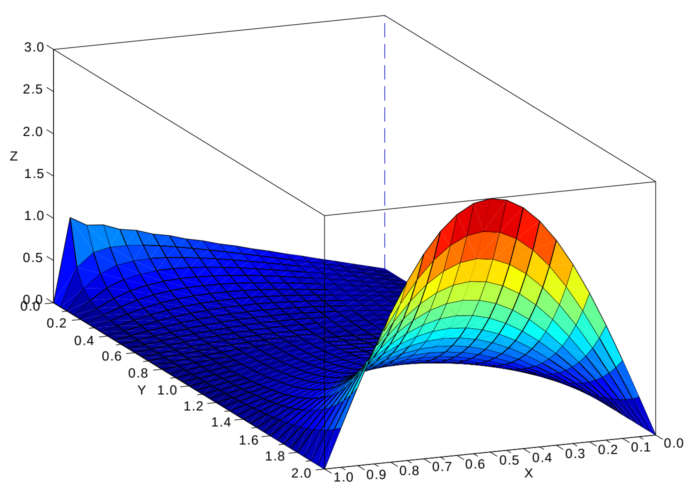
et

$$u_1(x,K) = g_2(x) = \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[B_n \ \mathrm{sh}\left(\frac{n\pi K}{L}\right)\right].$$

Prenons par exemple $L = 1$, $K = 2$, $f_1 = f_2 = 0$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = 3\sin(\pi x)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{n\pi}\frac{1}{\mathrm{sh}\,(2n\pi)}\sin\,(n\pi x)\ \ \mathrm{sh}\,(n\pi(y-2)) \\ &\qquad + \frac{3}{\mathrm{sh}\,(2\pi)}\sin\,(\pi x)\ \ \mathrm{sh}\,(\pi y)\,. \end{aligned}$$

Voici son graphe :



On remarque que u est de classe C^∞ sur $]0,1[\times]0,2[$, mais qu'elle n'est pas continue sur le bord.

3.4 Autres équations

Nous n'avons traité ici que quelques cas, dont la résolution peut se faire par séparation de variables. Bien d'autres exemples peuvent se résoudre de la même manière. De plus nous avons toujours utilisé les coordonnées cartésiennes. Dans le cas d'une membrane circulaire vibrante par exemple on utilisera plutôt les coordonnées polaires. Si la technique est la même, la résolution explicite requiert des fonctions très particulières, appelées fonctions de Bessel. Celles-ci ont à peu près les mêmes propriétés (en plus compliquées). Ces cas ne sont pas au programme ce semestre.

Chapitre 4

Équations aux dérivées partielles du second ordre

Nous ne considérons ici que des EDP du second ordre dont l'inconnue est une fonction réelle u de deux variables définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.1 *Une EDP* quasi-linéaire *du second ordre est une EDP de la forme :*

$$\boxed{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).} \tag{4.1}$$

L'inconnue est u.

Toutes les EDP vues jusqu'à présent sont quasi-linéaires. En revanche l'équation suivante ne l'est pas :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\Delta u)^2.$$

4.1 Caractéristiques

Commençons par un petit retour sur les courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$. Soit $\Gamma : x = \phi(t), y = \psi(t)$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ dont tout point est régulier, c'est-à-dire tel que : $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 > 0$.

On cherche maintenant une solution de (4.1) avec la condition supplémentaire sur Γ : on suppose connue la valeur de u sur Γ, ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. On peut montrer qu'il revient au même de connaître sur Γ, u et $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad} u.\nu$, ν étant le vecteur normal à Γ, c'est-à-dire de coordonnées $(-\psi'(t), \phi(t))$. De plus on peut aussi prouver que si on pose

$$\mathcal{D}(t) = c(\phi(t), \psi(t))\left(\phi'(t)\right)^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)\psi'(t) + a(\phi(t), \psi(t))\left(\psi'(t)\right)^2$$

alors soit $\mathcal{D}(t) \neq 0$ et alors les dérivées secondes de u sur Γ sont déterminées de manière unique, soit $\mathcal{D}(t) = 0$ et alors ces dérivées ne sont pas déterminées (c'est-à-dire elles peuvent être indéterminées ou être déterminées d'une infinité de façons).

Définition 4.2 *Les* courbes caractéristiques *sont les courbes* Γ *régulières qui annulent la quantité :*

$$\boxed{\mathcal{D}(t) = c(\phi(t), \psi(t)) \left(\phi'(t)\right)^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)\psi'(t) + a(\phi(t), \psi(t)) \left(\psi'(t)\right)^2.}$$

On dit que Γ *n'est* caractéristique en aucun point *si pour tout* t, $\mathcal{D}(t) \neq 0$.

Proposition 4.1

1. *Si* $a \neq 0$, *les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle*

$$a(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0.$$

2. *Si* $c \neq 0$, *ce sont les solutions de l'EDO*

$$c(x, y) \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dx}{dy} + a(x, y) = 0.$$

3. *Si* $a = c = 0$, *ce sont les droites* $x =$*constante et* $y =$ *constante.*

Preuve. Soit $\Gamma : x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ une courbe caractéristique. Supposons que $a(\phi(t), \psi(t)) \neq 0$ au voisinage de t_0. Si $\phi'(t) = 0$, alors $\psi'(t)$ doit être nul aussi et donc au voisinage de t_0, la courbe n'est pas régulière. Ainsi dans un domaine où $a(x, y) \neq 0$, $\phi'(t) \neq 0$, la tangente à Γ n'est pas verticale et Γ est définie par une fonction $y = f(x)$, c'est-à-dire $x = x$, $y = f(x)$. De là $\psi'(t)/\phi'(t) = f'(x)$ et $\mathcal{D}(t) = 0$ est équivalent à

$$a(x, y) \left(f'(x)\right)^2 - 2b(x, y)f'(t) + c(x, y) = 0.$$

On raisonne de façon analogue au voisinage d'un point où $c \neq 0$. Dans un domaine où $a = c = 0$, $\mathcal{D}(t) = 0$ devient :

$$2b(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)\psi'(t) = 0.$$

Comme il s'agit d'une équation du second ordre, $b \neq 0$ et soit $\phi'(t)$, soit $\psi'(t)$ est nul. □

Définition 4.3 *La recherche d'une solution* u *de* (4.1), *connaissant* u *et* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *sur une courbe* Γ *s'appelle le* problème de Cauchy relatif à Γ.

On montre que cela revient à connaître sur Γ, u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Et grosso modo, les courbes caractéristiques d'une équation linéaire sont celles pour lesquelles le problème de Cauchy n'est pas résoluble.

Soit Γ une courbe qui partage le plan en deux parties. On suppose que dans chaque partie on connait une solution de classe C^2 de (4.1), que sur Γ, $u_1 \equiv u_2$ et $\dfrac{\partial u_1}{\partial n} \equiv \dfrac{\partial u_2}{\partial n}$ pour les deux solutions u_1 et u_2. Si Γ n'est pas une courbe caractéristique, alors $u_1 \equiv u_2$. Si Γ est caractéristique, il se peut que les dérivées secondes et d'ordre supérieur de u_1 et de u_2 soient différentes, ce qui donne naissance à un phénomène physique appelé propagation des singularités.

4.2 Classification

Définition 4.4 *Une équation telle que $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$ dans un domaine D est dite* hyperbolique *dans ce domaine. Elle admet alors deux familles de courbes caractéristiques dans D.*

Une équation telle que $b^2(x,y) = a(x,y)c(x,y)$ dans un domaine D est dite parabolique *dans ce domaine. Elle n'admet dans D qu'une famille de courbes caractéristiques.*

Une équation telle que $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$ dans un domaine D est dite elliptique *dans ce domaine. Elle admet pas de courbes caractéristiques dans D.*

Parmi les EDP linéaires vues précédemment, les équations de Laplace ou Poisson sont elliptiques, celle de la chaleur est parabolique, tandis que les équations des cordes vibrantes ou des télégraphistes sont hyperboliques.

Exemples.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$. Est telle que $b^2 - ac = 1$, donc hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$. Les caractéristiques sont solutions de $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$. Donc il en existe deux familles, ce sont les droites $y = x + k_1$ et $y = -x + k_2$.
2. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$. Est telle que $b^2 - ac = x^2y^2$. Elle est donc hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$ privé des axes. Les caractéristiques sont solutions de $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$. Donc il en existe deux familles, ce sont les courbes $y^2 - x^2 = k_1$ et $y^2 + x^2 = k_2$.
3. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$. Est telle que $b^2 - ac = 0$, donc parabolique sur $\mathbb{R}^2$. Les caractéristiques sont les droites $y = kx$.
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$. Est telle que $b^2 - ac = -1$, donc elliptique sur $\mathbb{R}^2$.

Voici un autre exemple tiré d'un problème physique. Dans des conditions adiabatiques et isentropiques, un fluide dont l'écoulement est stationnaire dans le temps et qui n'a pas de tourbillon a une vitesse V qui dépend d'un potentiel Φ. En dimension 2 cela signifie que les composantes V_x et V_y de V sont $V_x = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $V_y = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ (on suppose que $V_z = 0$ et que V ne dépend pas de z).

Soit $C^2 = \frac{dp}{d\rho}$ la dérivée de la pression p par rapport à la masse volumique ρ. C^2 est la vitesse du son dans le fluide. On démontre que Φ est solution de l'équation :

$$0 = \left[1 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2}{C^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}.$$

Pour cette équation $b^2 - ac = \dfrac{1}{C^4}\left[\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(C^2 - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(C^2 - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right)\right]$.

Soit $M = \dfrac{|V|}{C}$ le nombre de Mach. Alors $b^2 - ac = \frac{1}{C^2}(V^2 - C^2) = M^2 - 1$.

Si $M < 1$, l'écoulement est subsonique et l'équation elliptique. Si $M > 1$, l'écoulement est supersonique et l'équation hyperbolique. Les phénomènes sont complètement différents dans l'un et l'autre cas.

4.3 Réduction à la forme standard

Il convient d'abord de faire quelques rappels sur les changements de variables. Si (x, y) sont les « anciennes » variables, on note $X = \xi(x, y)$ et $Y = \eta(x, y)$ les nouvelles. On suppose que pour tout (x, y) dans un certain ouvert Ω,

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si ξ et η sont de classe C^1 sur Ω, on sait qu'il existe dans un ouvert O, f et g de classe C^1 également telles que $x = f(X, Y)$ et $y = g(X, Y)$ pour tout $(X, Y) \in O$.

Soit u une quantité qui dépend de x et y. Elle peut être exprimée en fonction de X et Y. Naturellement les fonctions ne sont pas les mêmes mais on convient le plus souvent de toujours noter u la quantité exprimée soit en fonction de x et y, soit en fonction de X et Y :

$$u(x, y) = u(f(X, Y), g(X, Y)) = u(X, Y).$$

De là on a pour les dérivées premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Si $J \neq 0$, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial X}$ et $\frac{\partial u}{\partial Y}$ s'écrivent en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial X}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right] + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial Y}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right] + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Ainsi en exprimant $a(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ avec les nouvelles coordonnées, on a

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= a\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2, \\
B &= a\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + b\left(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + c\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}, \\
C &= a\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + c\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

On note que $B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$. Donc

Lemme 4.1 *Le type d'équation est conservé par changement de variables.*

On peut toujours choisir X et Y de façon à annuler l'un au moins des termes A, B et C. Supposons par exemple $a \neq 0$ et cherchons un changement de variables tel que $A = 0$, c'est-à-dire

$$0 = a\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2.$$

Comme $a \neq 0$, $\frac{\partial X}{\partial y}$ ne peut être nul sans que $\frac{\partial X}{\partial x}$ le soit. Mais alors le déterminant J serait nul. Donc $\frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$. Soit alors $X(x,y) = constante$, la définition implicite d'une courbe Γ. Puisque $\frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial y}}$$

et l'équation voulue s'écrit :

$$0 = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c.$$

Γ est donc une courbe caractéristique.

Soit $\phi(x,y) = k$ l'équation d'une courbe caractéristique. Si l'on pose $X = \phi(x,y)$, l'équation obtenue par ce changement de variables aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$. S'il existe deux familles de courbes caractéristiques, si $\psi(x,y) = l$ est l'équation d'une caractéristique de la seconde famille et si on pose $Y = \psi(x,y)$, l'équation obtenue aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$.

Cette technique permet de ramener les EDP quasi-linéaires à leur forme dite standard.

Théorème 4.1 *Soient $\phi_1(x,y) = k_1$ et $\phi_2(x,y) = k_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique. En posant : $X_1 = \phi_1(x,y)$ et $X_2 = \phi_2(x,y)$ l'équation hyperbolique deviendra :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}, \frac{\partial u}{\partial X_2}, u, X_1, X_2\right). \tag{4.2}$$

En posant $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$, elle deviendra :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = H\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}, \frac{\partial u}{\partial Y_2}, u, Y_1, Y_2\right).} \tag{4.3}$$

Cette équation est celle des ondes.

Théorème 4.2 *Soit $\phi(x,y) = c$ la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique. Soit $X_1 = \phi(x,y)$ et X_2 une fonction indépendante de X_1. Avec ces nouvelles variables,* (4.1) *devient :*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}, \frac{\partial u}{\partial X_2}, u, X_1, X_2\right).} \tag{4.4}$$

C'est l'équation de la chaleur.

Théorème 4.3 *Soient $\phi_1(x,y) = k_1$ et $\phi_2(x,y) = k_2$ les solutions (à valeurs complexes). On pose $Y_1 + iY_2 = \phi_1(x,y)$ et $Y_1 - iY_2 = \phi_2(x,y)$. Alors* (4.1) *devient :*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}, \frac{\partial u}{\partial Y_2}, u, Y_1, Y_2\right).} \tag{4.5}$$

C'est l'équation de Poisson.

Voyons sur un exemple ce qui se passe. Considérons l'équation suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0.$$

Ici $a(x,y) = x^2$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = -y^2$. Donc $b^2 - ac = x^2y^2 > 0$ si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Ainsi dans le domaine $\{x > 0,\ y > 0\}$, l'EDP est hyperbolique. Les courbes caractéristiques sont solutions de l'EDO :

$$0 = x^2(y')^2 - y^2 = (xy' - y)(xy' + y),$$

soit $y = kx$ ou $yx = k$. On pose donc $X_1 = y/x$ et $X_2 = xy$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial X_1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial X_2} y, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial X_1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial u}{\partial X_2} x,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial X_1}\left(\frac{2y}{x^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} y^2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} x^2.
\end{aligned}$$

De là on obtient que

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y} = -4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial u}{\partial X_1}\left(\frac{2y}{x}\right) = -4X_1X_2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + 2X_1 \frac{\partial u}{\partial X_1} = 0.$$

On a donc bien la forme réduite standard :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{1}{2X_2}\frac{\partial u}{\partial X_1}.$$

Nous pouvons ensuite intégrer des deux côtés par rapport à X_1, soit

$$\frac{\partial u}{\partial X_2} = \frac{1}{2X_2} u + f(X_2).$$

X_1 étant fixé, nous avons ainsi une EDO de la forme $u' = u/(2t) + f$, dont les solutions sont de la forme $Ct^2 + g$, où g est une fonction obtenue par variation de la constante à partir de f. Ainsi

$$u(X_1, X_2) = X_2^2 C(X_1) + g(X_2).$$

Ou en revenant aux variables initiales avec F et G fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^2 y^2 F\left(\frac{y}{x}\right) + G(xy).$$

4.4 À retenir

Une EDP quasi-linéaire **du second ordre** est une EDP de la forme (4.1) :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

1. Les courbes caractéristiques s'obtiennent via des EDO (voir Proposition 4.1). Le long d'une courbe caractéristique, le problème de Cauchy n'a pas de solution unique (comme pour les EDP d'ordre 1).
2. Les EDP (4.1) sont classées en trois groupes : hyperbolique, parabolique, elliptique, suivant le signe de $b^2 - ac$.
3. Les courbes caractéristiques permettent de se ramener à la forme réduite standard (4.2) ou (4.3) pour le cas hyperbolique, (4.4) pour le cas parabolique et (4.5) pour le cas elliptique.
4. La résolution des EDP sous forme réduite a été traitée dans certains cas par séparation de variables. La généralisation par développement en série de Fourier sera vue en L3, ainsi que les méthodes basées sur les transformées de Fourier ou de Laplace.

Chapitre 5

Équations des ondes

Cette équation est l'exemple typique d'équation hyperbolique. Commençons par les cas du premier ordre.

5.1 Équations du premier ordre

5.1.1 Méthode des caractéristiques

On veut résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{5.1}$$

Ici c est une constante fixée. On suppose de plus que

$$u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Si on mesure les variations de u le long d'une courbe $y = x(t)$, les règles de dérivation nous donnent :

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))x'(t).$$

Si on suppose que $x'(t) = c$, alors l'équation (5.1) impose :

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))c = 0.$$

Ainsi u est constante le long des courbes $y = x(t)$ telles que $x'(t) = c$, autrement dit

$$x = ct + x_0, \quad x_0 = x(0).$$

Cette famille de courbes définissent les courbes caractéristiques de (5.1).

Pour trouver la valeur de u au point (t_1, x_1) fixé, on considère une caractéristique d'équation $x = ct + x_0$, passant par (t_1, x_1). Nécessairement $x_0 = x_1 - cT_1$. Elle intersecte l'axe des x au point $(0, x_0)$. Comme u est constante le long de cette courbe, on a d'après (5.2) :

$$u(t_1, x_1) = u(0, x_0) = f(x_0) = f(x_1 - ct_1).$$

Ainsi la solution de (5.1) vérifiant (5.2) est

$$u(t,x) = f(x - ct),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{5.3}$$

Supposons que t représente le temps, la relation $u(t,x) = f(x-ct)$ implique que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, $u(t, x_0 + ct) = u(0, x_0)$. u est une onde qui se propage à vitesse c.

Exemple 5.1 On choisit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

avec

$$u(0,x) = \sin(x),\ x \in [0,\pi], \quad u(0,x) = 0 \text{ sinon.}$$

Alors

$$u(t,x) = \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{1}{2}t\right), & \text{si } t/2 \leq x \leq t/2 + \pi, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit Γ une courbe non caractéristique (courbe dont aucune tangente a pour pente c). L'ensemble des droites paralléles à la droite $x = ct$ qui coupent Γ forment une bande G du plan. En un point P de G, la valeur de u est la même qu'un point d'intersection M de la droite de pente c passant par P avec Γ.

Exemple 5.2 Pour $c = 1$, soit Γ la courbe $y = 1 - x$ pour $x \in [0,1]$. Soit $F(x_0)$ la valeur de $u(x_0, 1-x_0)$. La bande G est formée des points (t,x) comprise entre les droites $t = x+1$ et $t = x-1$, c'est-à-dire $G = \{(t,x),\ x - 1 \leq t \leq x + 1\}$. En un point (t_1, x_1) de G, $u(t_1, x_1) = u(x_0, 1-x_0)$, le point $(x_0, 1-x_0)$ étant l'intersection de $t = 1-x$ et $t - t_1 = x - x_1$, soit $x_0 = \frac{1+x_1-t_1}{2}$. Donc dans G :

$$u(t_1, x_1) = F\left(\frac{1 + x_1 - t_1}{2}\right).$$

Pour résumer :

Théorème 5.1 *Pour $c \neq 0$, soit l'EDP*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5.4}$$

1. *Toute solution de* (5.4) *est de la forme $u(t,x) = F(x - ct)$ où F est de classe C^1.*

2. *Une courbe caractéristique est une droite $x - ct = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Si u est donnée sur une courbe Γ, elle est connue dans toute la bande délimitée par les caractéristiques qui coupent Γ en un seul point.*

   La relation $u(t, x_0 + ct) = u(0, x_0)$ pour tout $t \geq 0$, exprime que u se propage le long de l'axe Ox à vitesse c. Si $c > 0$, u se propage vers la droite ; si $c < 0$, u se propage vers la gauche.

3. *$u(t, x) = f(x - ct)$ est la solution de (5.4) dont la valeur au point x à l'instant 0 est $f(x)$; c'est la solution du problème de valeur initiale f.*

5.1.2 EDP quasi-linéaires du premier ordre

D'autres cas se traitent de façon similaire à l'équation (5.1).

Définition 5.1 *On appelle* EDP quasi-linéaire *du premier ordre une équation du type :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c(t, x, u)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = q(t, x, u). \tag{5.5}$$

Bien que non linéaire en u, elle est linéaire par rapport aux dérivées premières de u. La procédure reste la même.

Exemple 5.3

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = x, \quad x > 0,\ t > 0,$$

avec

$$u(0, x) = \sin(x),\ x > 0, \quad u(t, 0) = t,\ t > 0.$$

Les courbes caractéristiques sont $x = t + k$ avec k constante. Or si on a un point (t_1, x_1) avec $t_1 > x_1$, la caractéristique passant par ce point, cette courbe ne coupe pas l'axe des abscisses pour $x > 0$. Il faut donc distinguer trois cas.

1. Supposons que $x_1 > t_1$. Le long de la caractéristique d'équation $x = t + k$, passant par (t_1, x_1), on a

   $$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = x(t) = t + k,$$

   soit : $u(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + kt + C$, avec C constante. Ainsi

   $$C = u(t_1, x_1) - \frac{1}{2}t_1^2 - kt_1 = u(0, x_0) - 0 - 0 = \sin(x_0).$$

   Or $k = x_1 - t_1$ et $x_0 = k = x_1 - t_1$. Ainsi

   $$u(t_1, x_1) = \sin(x_1 - t_1) + \frac{1}{2}t_1^2 + (x_1 - t_1)t_1.$$

2. Maintenant $x_1 < t_1$. La droite caractéristique passant par (t_1, x_1) a pour équation $x = t - (t_1 - x_1)$. Elle coupe l'axe du temps t en $t_0 = t_1 - x_1$. On a toujours

   $$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = x(t) = t + (t_1 - x_1) \Longleftrightarrow u(t, x(t)) = \frac{1}{2}t_1^2 + (t_1 - x_1)t_1 + C$$

avec C constante. De là

$$C = u(t_1,x_1) - \frac{1}{2}t_1^2 - (t_1 - x_1)t_1 = u(t_0,0) - \frac{1}{2}t_0^2 - (t_1 - x_1)t_0 = t_0 + \frac{1}{2}t_0^2.$$

Ainsi

$$u(t_1,x_1) = \frac{1}{2}t_1^2 + (t_1 - x_1)t_1 + t_0 + \frac{1}{2}t_0^2 = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + t_1.$$

3. On voit que dans les deux cas précédents, quand (t_1, x_1) se rapproche de $x = t$, on obtient la même limite : $u(t_1, x_1) = x_1^2/2$. Donc la solution est continue sur cette droite.

Finalement

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + t, & \text{si } x \leq t \text{ ;} \\ xt - \frac{1}{2}t^2 + \sin(x-t), & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Exemple 5.4

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u^3(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

avec

$$u(0,x) = x^{1/3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Les courbes caractéristiques satisfont alors :

$$x'(t) = u^3(t, x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Le long d'une courbe caractéristique, on a

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = 0,$$

ce qui implique que

$$u(t,x) = C = u(0,x_0) = x_0^{1/3}.$$

Donc l'équation différentielle satisfaite par x est : $x'(t) = x_0$, soit encore $x = x_0 t + x_0 = x_0(1+t)$. La solution est donc

$$u(t,x) = \left(\frac{x}{1+t}\right)^{1/3}.$$

Dans le cas de système d'EDP comme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + c_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

si on connaît f_1 la valeur de u_1 sur l'axe $t = 0$ et f_2 celle de u_2, alors les solutions du système sont $u_1(t, x) = f_1(x - c_1 t)$ et $u_2(t, x) = f_2(x - c_2 t)$. Il s'agit de deux ondes se propageant aux vitesses c_1 et c_2. Si f_1 et f_2 ne sont données que sur un segment $[A, B]$ de $t = 0$, le couple (u_1, u_2) n'est défini que dans l'intersection des bandes déterminées par les caractéristiques $x - c_1 t = k_1$ et $x - c_2 t = k_2$. Cette intersection est un losange, donc un domaine borné. Si on considère seulement $t \geq 0$, les solutions u_1 et u_2 sont définies toutes les deux dans un triangle.

Le système (5.6) se rencontre en acoustique. Dans certaines conditions, la vitesse u et la pression p d'un fluide de densité ρ et de coefficient de compressibilité c sont solutions du système suivant :

$$(5.7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système on pose $u_1 = u + \frac{p}{\rho c}$ et $u_2 = u - \frac{p}{\rho c}$. On vérifie alors que (u_1, u_2) est solution de (5.6) avec $c_1 = c$ et $c_2 = -c$. Donc on obtient

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(f(x - ct) + g(x + ct) \right), \quad p(t, x) = \frac{\rho c}{2} \left(f(x - ct) - g(x + ct) \right).$$

Ainsi $u + \frac{p}{\rho c}$ se déplace avec l'onde $f(x - ct)$ vers la droite et $u - \frac{p}{\rho c}$ se déplace avec l'onde $g(x + ct)$ vers la gauche. Ces quantités s'appellent les invariants de Riemann de (5.7).

On notera qu'en dérivant les deux équations du système (5.7) par rapport à t et x, on obtient que u et p sont solutions de l'équation

$$(5.8) \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

Nous reviendrons sur cette équation par la suite. Ainsi on peut remarquer que les deux solutions du système (5.7) avec des EDP d'ordre 1 sont solutions d'une EDP d'ordre 2. Ce résultat peut aussi s'inverser : pour résoudre une équation d'ordre p, on se ramène à p équations du premier ordre.

Voyons d'abord comment cela se fait sur notre exemple. Soit ϕ une fonction solution de (5.8). Posons $\psi = \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - c \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$. Alors on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

On écrit donc l'équation (5.8) ainsi :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0.$$

Pour le résoudre on cherche d'abord ψ. Comme $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + c \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, alors $\psi(t, x) = g(x - ct)$ et on a : $g(x - ct) = \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - c \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$. Pour trouver une solution de cette nouvelle EDP linéaire, on additionne une solution particulière à la solution générale de $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - c \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$.

Soit G une primitive de g et $\eta(t,x) = \frac{-1}{2c} G(x-ct)$. Alors on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - c\frac{\partial \eta}{\partial x} = g(x-tc);$$

c'est donc une solution particulière. Et finalement on obtient :

$$u(t,x) = f(x+ct) - \frac{1}{2c} G(x-ct).$$

Théorème 5.2 *Soit l'EDP suivante :*

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_1\right)^{m_1} \left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2\right)^{m_2} \dots \left(\alpha_p \frac{\partial}{\partial x} + \beta_p \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_p\right)^{m_p} u(x,y) = g(x,y).$$

Toute solution est de la forme $u = v + G$ où G est une solution particulière et v est de la forme suivante :

1. $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_p$ *;*
2. *si* $m_k = 1$, $v_k(x,y) = \exp\left(-x\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right) f_k(\beta_k x - \alpha_k y)$ *;*
3. *si* $m_k > 1$, *alors*

$$v_k(x,y) = \exp\left(-x\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right) \sum_{j=1}^{m_k} x^{j-1} \phi_j(\beta_k x - \alpha_k y).$$

En particulier toute solution de l'équation des ondes (5.8) *est de la forme* $u(t,x) = F(x-ct) + G(x+tc)$ *dans le domaine où elle est définie.*

5.2 Équation des ondes en dimension 1

Nous rappelons ici que l'équation des ondes est l'EDP (5.8) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

Toute solution est de la forme $u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$ avec F et G de classe C^2. En fait cette condition de régularité sur F et G peut être supprimée, auquel cas on parle de solution faible. Mais nous n'en parlons pas ici.

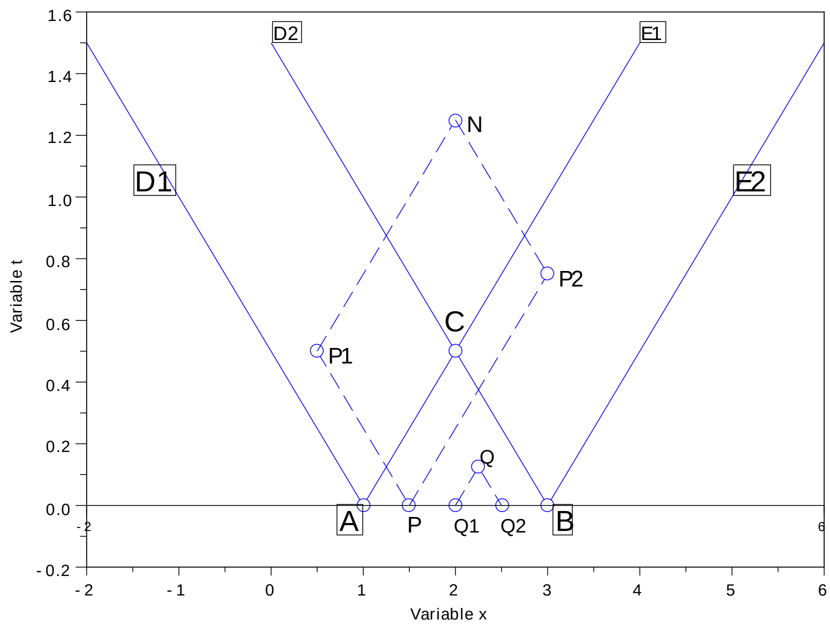
Dans ce qui suit, nous allons résoudre (5.8) sur le domaine suivant : $\{(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$, étant entendu que l'équation est vérifiée pour $t > 0$. L'origine des temps est choisie à l'instant où l'on commence à observer le phénomène régi par (5.8).

5.2.1 Propagation des ondes

Toute solution u de (5.8) est de la forme $F(x+ct) + G(x-ct)$. F est constante le long des caractéristiques $x + ct = k_1$, tandis que G est constante le long des caractéristiques $x - ct = k_2$. Soit $ABCD$ un parallélogramme dont les côtés sont portés par des caractéristiques. Alors $F(A) = F(C)$ si AC est parallèle à $x + ct = 0$. De même $F(D) = F(B)$, $G(A) = G(B)$ et $G(C) = G(D)$. On obtient donc en additionnant la

$$\text{formule du parallélogramme :} \quad \boxed{u(A) + u(D) = u(B) + u(C).}$$

Soit maintenant $[AB]$ un segment de l'axe $t = 0$ et supposons $c > 0$ dans (5.8).



Avec les notations précédentes, on a

$$F(P_1) = F(P), \quad G(P_2) = G(P), \quad F(Q_1) = F(Q), \quad G(Q_2) = G(Q).$$

Dans la bande délimitée par les droites $E1$ et $E2$, G est déterminé par sa valeur sur $[AB]$ et dans la bande délimitée par $D1$ et $D2$, F est déterminée par sa valeur sur $[AB]$.

Ainsi la valeur $u(Q)$ en tout point du triangle ABC est complètement déterminé. Le triangle ABC s'appelle domaine de détermination de u par le segment ABC. Réciproquement, le segment $[AB]$ s'appelle domaine de dépendance de u au point C.

La valeur de u sur le segment $[AB]$ influe sur un domaine plus grand que le triangle ABC. Elle influe sur le domaine compris entre les droites $D1$ et $E2$ qui s'appelle domaine d'influence du segment $[AB]$. En effet en un point N de ce domaine,

$$u(N) = u(P_2) + u(P_1) - u(P).$$

5.2.2 Formule de d'Alembert

Comme on regarde l'équation (5.8) pour $x \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de condition frontière, mais uniquement des conditions initiales.

Théorème 5.3 *La solution de* (5.8) *telle que* $u(0,x) = f(x)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$ *est :*

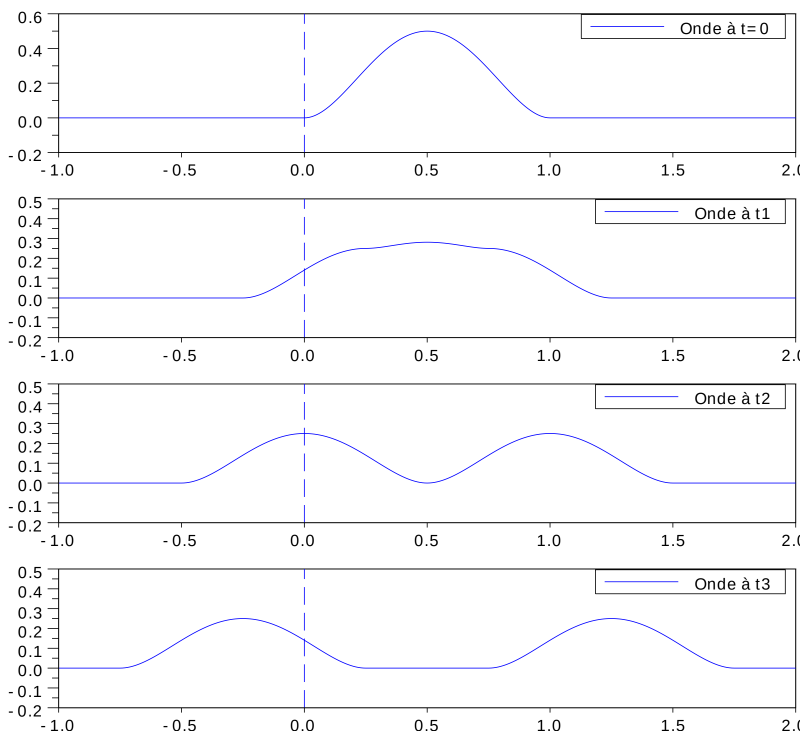
$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.}$$

Cette formule s'appelle la formule de d'Alembert.

Remarquez que l'on retrouve la formule (**??**). **Preuve.** On sait que u est de la forme $u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$, puis on identifie F et G en utilisant les conditions initiales. □

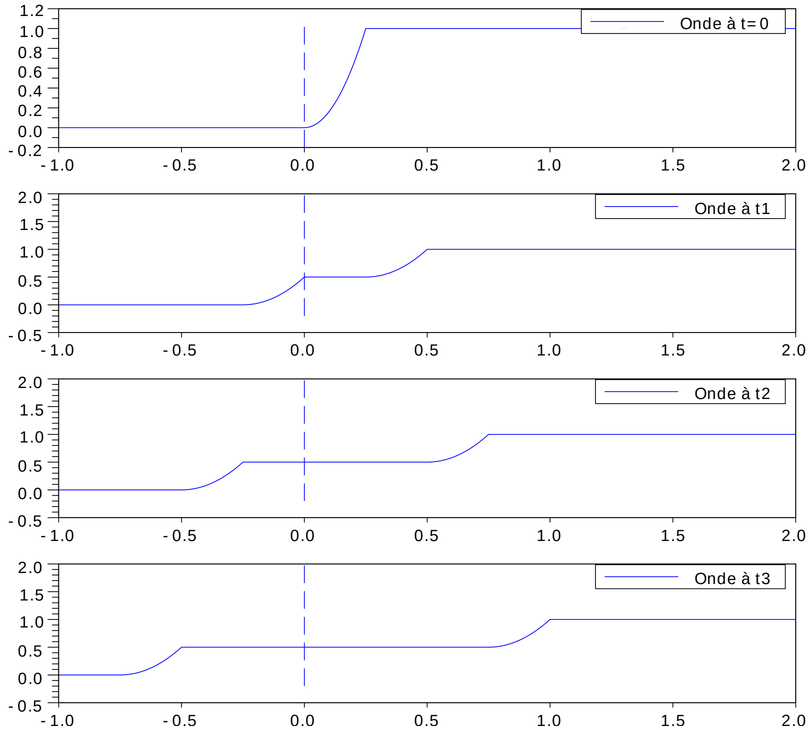
Voyons quelques exemples qui illustrent le comportement de u suivant la nature de f ou de g. Supposons d'abord que g est nulle. Donc $u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)$.

1. Supposons que f est à support borné. Les dessins suivants indiquent le comportement de u à quatre instants $t = 0 < t_1 < t_2 < t_3$.



   Si on se place en un point x qui n'appartient pas au support de f, on constate que pour $t = 0$, u est nulle, puis qu'il existe un instant où u n'est plus nulle : l'onde atteint le point x. Puis après le passage de l'onde, u est de nouveau nulle. Il existe ainsi deux ondes se déplaçant en sens inverse et qui sont de même intensité et de même signe.

2. Supposons f à support non borné. Nous indiquons la situation aux instants $0 < t_1 < t_2 < t_3$.

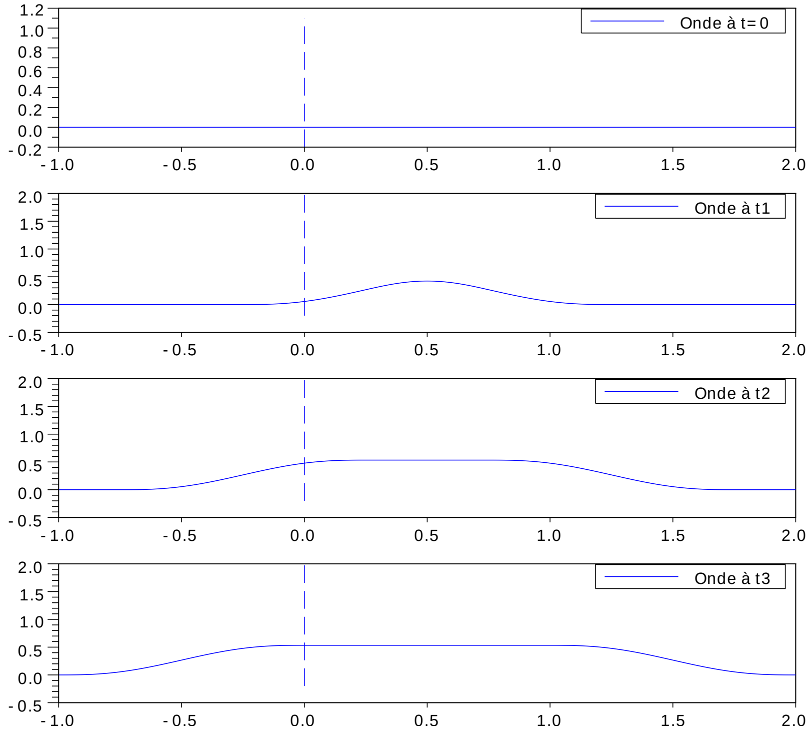


Il s'agit de deux ondes se déplaçant en sens opposé. Elles sont de même amplitude mais de signe différent et après le passage du « front d'onde », il subsiste un « déplacement résiduel ».

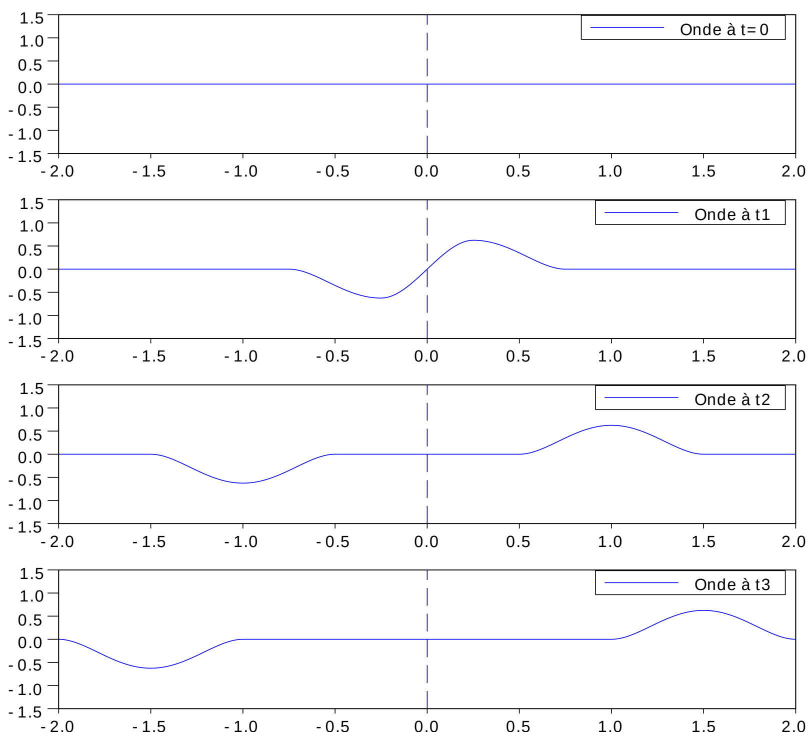
Supposons maintenant que f est nulle et posons $G(x) = \int_0^x g(y)dy$. Alors

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\left(G(x+ct) - G(x-ct)\right).$$

1. Soit g à support borné $[a,b]$ et telle que $\int_a^b g(y)dy \neq 0$. Ce cas est comparable au cas où f est à support non borné, puisqu'alors on a deux ondes qui se déplacent en sens opposé et qu'il existe un déplacement résiduel.



2. On suppose g à support borné et $\displaystyle\int_a^b g(y)dy = 0$. Ce cas diffère du précédent par un retour à l'état initial après le passage de l'onde.



3. Si g est à support non borné, mais et d'intégrale nulle, alors on retrouve un cas presque identique au précédent pour t assez grand, tandis que si l'intégrale n'est pas nulle, il reste un déplacement résiduel.

D'autres cas peuvent s'obtenir en superposant ceux évoqués.

5.2.3 Équation dans $\mathbb{R}^+$

On cherche à résoudre l'équation (5.8) pour $x \geq 0$. Il faut alors préciser le comportement de la solution u au point $x = 0$, c'est-à-dire se donner une condition frontière relative à $u(t, 0)$ ou à $\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0)$ ou toute autre condition. Nous allons détailler cela dans le cas d'une extrémité fixe. L'onde est alors réfléchie. Il s'agit donc de résoudre :

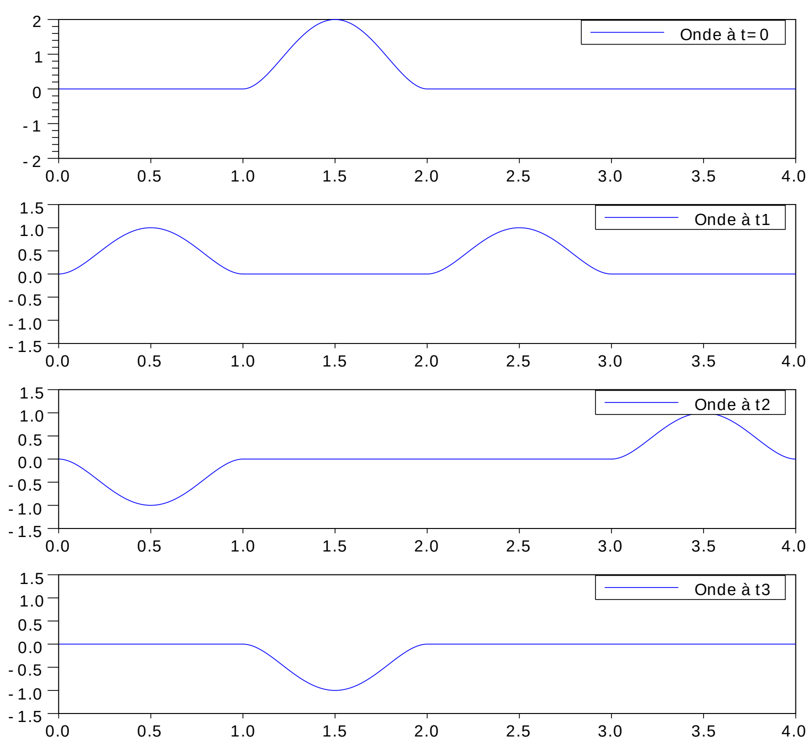
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) = 0, \qquad \text{pour } (t, x) \in]0, +\infty[^2,$$

avec la condition frontière $u(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et les conditions initiales : pour tout $x \geq 0$, $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$. On suppose que $f(0, 0) = 0$ (pour concilier toutes les conditions). Comme la forme générale de la solution u reste $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$, on peut identifier la forme de u :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy, & \text{si } x \geq ct, \\ \\ \frac{1}{2}\left(f(x + ct) - f(ct - x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(y)dy, & \text{si } x < ct. \end{cases}$$

Cette formule est à rapprocher de celle obtenue par transformée de Laplace (**??**).Voyons ce qui se passe sur quelques exemples. Supposons d'abord que g est nulle.

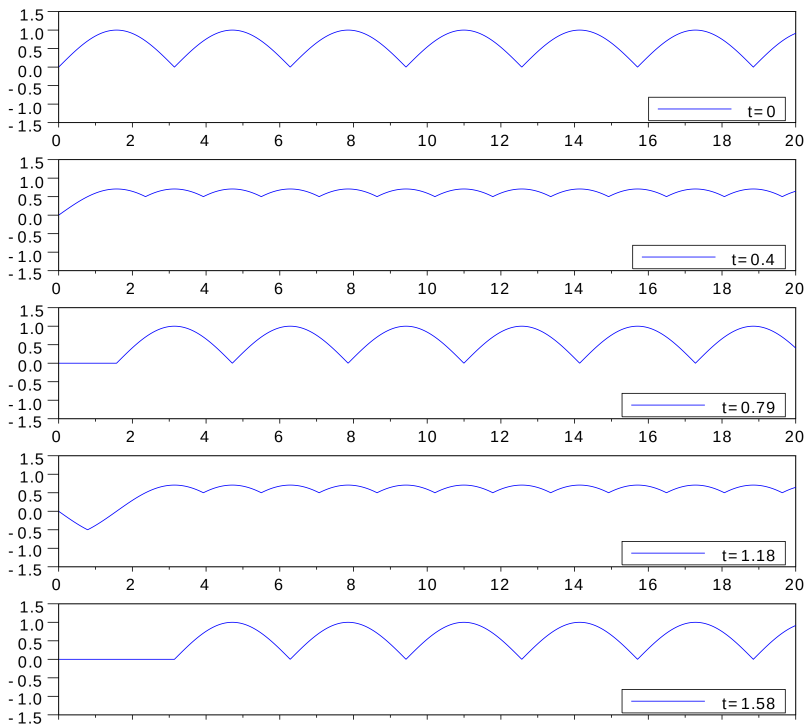
1. Soit f est à support borné $[a, b]$.



Pour $t < a/c$ le phénomène est identique à celui sur $\mathbb{R}$ puisque l'onde vers la gauche n'a pas encore atteint l'origine. Quand elle l'atteint son signe change, l'amplitude se conserve et l'onde se propage vers la droite. On dit qu'elle se réfléchit.

Si on se place en un point x on voit passer successivement deux ondes, une onde positive qui se propage vers la gauche si $x < a$ ou vers la droite si $x > b$, puis une onde de même amplitude mais négative qui se propage vers la droite.

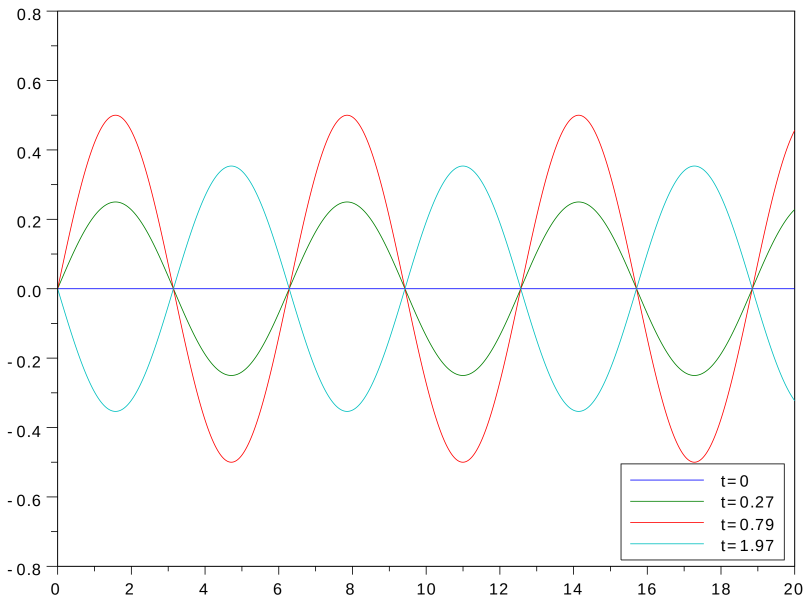
2. Si le support de f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors l'onde réfléchie va influer sur l'onde directe. Nous allons le voir sur l'exemple suivant : $c = 2$ et $f(x) = |\sin(x)|$. On peut alors calculer u explicitement, notamment pour les valeurs de t égales à 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$ et $\pi/2$.



Maintenant si f est nul et en prenant $g(x) = \sin(x)$, on a pour tout $x \geq 0$,

$$u(t, x) = \frac{1}{2c}\left(\cos(x - ct) - \cos(x + ct)\right) = \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct).$$

Il s'agit de $\sin(x)$ modulé par $\sin(ct)$.



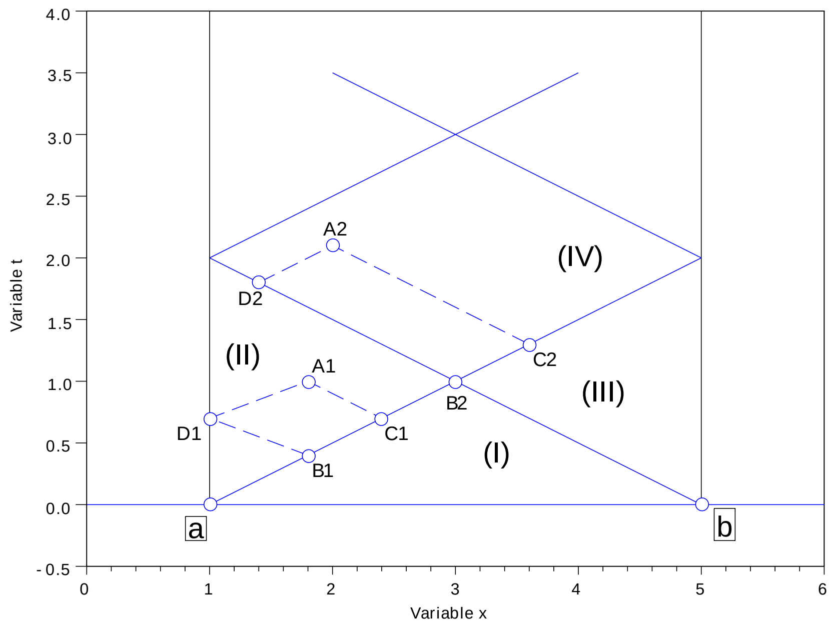
5.2.4 Équation dans un intervalle borné $[a, b]$

On peut procéder comme pour $\mathbb{R}_+$. On cherche à déterminer les fonctions F et G telles que $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$ en utilisant les conditions imposées à $u(t, a)$ et $u(t, b)$ et les conditions initiales $u(0, x) = f(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$, pour $a \leq x \leq b$. On trouvera d'abord

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

pour $a \leq x + ct \leq b$ et $a \leq x - ct \leq b$. C'est encore la formule de d'Alembert qui permet de connaître F et G sur $[a, b]$. Ensuite en appliquant la condition frontière en a on trouvera F et G sur $[a - (b - a), a]$; en l'appliquant en b on les trouvera sur $[b, b + (b - a)]$ et il faudra faire cela une infinité de fois !

Il faut comprendre qu'à une condition frontière donnée en a, correspond un comportement de l'onde lorsqu'elle change de sens de propagation au point a. Géométriquement on a :



Les régions (I), (II), (III), (IV), ... sont délimitées par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et les caractéristiques $x + ct = k_1$ et $x - ct = k_2$. Dans la région (I), u est déterminée par la formule de d'Alembert.

Dans les régions (II) et (III), u est déterminée par la formule du parallélogramme. Ainsi au point $A1$, u en $D1$ est déterminée par la condition frontière, et $u(B1)$, $u(C1)$ sont connus. Donc $u(A1) = u(C1) + u(D1) - u(B1)$.

On peut trouver alors u dans la région (IV). Ainsi $u(A2)$ est déterminé par : $u(A2) = u(C2) + u(D2) - u(B2)$.

Enfin on gardera à l'esprit que la méthode de séparation des variables et de superposition permet de résoudre ce problème (en général sous forme d'une série de Fourier).

5.3 Équation en dimension 1, avec second membre

On considère maintenant l'équation (5.8) pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}$ avec un second membre, soit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = h(t, x). \tag{5.9}$$

Théorème 5.4 *Soit h une fonction continue de $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La solution de l'équation (5.9), qui vérifie $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est donnée par :*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t+\tau)} h(\tau, y)dyd\tau.$$

On peut remarquer que c'est la somme d'une solution particulière correspondant à $f = g = 0$ et de la solution générale de l'équation où $h = 0$.

Le problème de Goursat est le suivant : résoudre (5.9) avec les conditions $u(t,x) = f(x)$ pour $x = ct$ et $u(t,x) = g(x)$ pour $x = -ct$. Il s'agit d'un problème où les conditions aux bords sont des conditions sur les caractéristiques. Il ne relève donc pas des méthodes précédentes. Néanmoins en mettant l'équation sous sa forme réduite, on peut résoudre ce problème.

En effet si on pose $X = x + ct$ et $Y = x - ct$, l'EDP (5.9) devient :

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = h(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}).$$

De plus $X = 0$ si et seulement si $x + ct = 0$ et $Y = 0$ si et seulement si $Y = 0$. Donc $u(X,0) = f(X/2)$ et $u(0,Y) = g(Y/2)$. Ainsi en intégrant on obtient :

$$u(t,x) = f\left(\frac{x+ct}{2}\right) + g\left(\frac{x-ct}{2}\right) - \frac{1}{4c^2}\int_0^{x+ct}\left(\int_0^{x-ct} h\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right) dv\right) du.$$

Dans le cas où on souhaite résoudre (5.9) sur un intervalle borné, on utilisera la méthode de séparation des variables.

5.4 Équations dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^2$

La résolution de l'équation dans $\mathbb{R}^3$ repose sur la formule de Green. L'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{5.10}$$

On fera également le changement de variables en coordonnées sphériques : $\alpha = \sin\theta\cos\phi$, $\beta = \sin\theta\sin\phi$ et $\gamma = \cos\theta$. On obtient alors

Théorème 5.5 *Pour toute fonction g de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution u de (5.10) telle que :*

$$u(0,x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = g(x,y,z).$$

En notant P_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et $S(P_0, ct)$ la sphère de centre P_0 et de rayon ct, cette solution vérifie

$$\begin{aligned} u(t,x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S(P_0,ct)} g \\ &= \frac{t}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} g(x_0 + ct\sin\theta\cos\phi, y_0 + ct\sin\theta\sin\phi, z_0 + ct\cos\theta)\sin\theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Autrement dit, la valeur de u en P_0 à l'instant t est égale à t fois la moyenne de g sur la sphère de centre P_0 et de rayon ct.

Théorème 5.6 (Formule de Kirchoff) *Pour toute fonction g de classe C^2 et toute fonction f de classe C^3 dans $\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution u de (5.10) telle que :*

$$u(0,x,y,z) = f(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = g(x,y,z).$$

Cette solution est donnée par la formule de Kirchoff :

$$\boxed{u(t,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S(P_0,ct)} g + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S(P_0,ct)} f\right).} \tag{5.11}$$

Autrement dit, la valeur de u en P_0 à l'instant t est égale à t fois la moyenne de g sur la sphère de centre P_0 et de rayon ct.

Supposons que f et g, les valeurs initiales, soient nulles hors d'un domaine de frontière ∂D. Alors d'après la formule de Kirchoff, $u(t,x_0,y_0,z_0)$ est non nul seulement si $S(P_0,ct)\cap D \neq \emptyset$. Soit un point P_0 de coordonnées (x_0,y_0,z_0) extérieur à D et d_1 et d_2 le minimum et le maximum de la distance entre Q et P_0 lorsque Q parcourt D. Alors

1. si $ct < d_1$, $u(t,x_0,y_0,z_0) = 0$;
2. si $d_1 < ct < d_2$, $u(t,x_0,y_0,z_0) \neq 0$;
3. si $ct > d_2$, $u(t,x_0,y_0,z_0) = 0$.

Ceci se résume par le principe de Huyghens : tout se passe comme si chaque point de ∂D émettait une onde qui se propage à la vitesse c ; tant qu'aucune de ces ondes n'a atteint P_0, $u(P_0)$ est nul, puis lorsque toutes les ondes ont dépassé P_0, $u(P_0)$ est de nouveau nul. Il y a ainsi deux fronts d'onde : un front avant et un front arrière.

Exemples.

1. Soit $f = 0$ et $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Alors la formule de Kirchoff donne :
$$u(t,x,y,z) = t(x^2+y^2+z^2) + c^2t^3.$$
2. Soit $g = 0$ et $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Alors
$$u(t,x,y,z) = x^2+y^2+z^2+3c^2t^2.$$

5.4.1 Ondes sphériques et planes

Définition 5.2 *Une* onde sphérique *est une solution de* (5.10)*, qui ne dépend que de r et de t (dans cette définition $r^2 = x^2+y^2+z^2$).*

Si ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^3$, ne dépendant que de r, alors on montre que : $\Delta\phi = \dfrac{d^2\phi}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{d\phi}{dr}$. Une onde sphérique est donc solution de

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

À cette onde u, nous associons $v(t,r) = ru(t,r)$. Alors v est solution de : $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. Donc il existe deux fonctions F et G de classe C^2 telles que : $v(t,r) = F(r+ct)+G(r-ct)$.

Théorème 5.7 (Onde sphérique) *Une onde sphérique est de la forme :*

$$u(t,r) = \frac{1}{r}\left(F(r+ct) + G(r-ct)\right).$$

On notera que contrairement à une onde de dimension 1, $u(t,r) \neq u(t+a/c, r+a)$. Ainsi le long d'une rayon une onde sphérique n'est pas une onde de dimension 1 ; il y a amortissement du fait que l'onde « s'étale » sur une surface $4\pi c^2 t^2$ de plus en plus grande lorsque t augmente.

Définition 5.3 *On appelle* onde plane *une solution de* (5.10) *qui pour chaque valeur de* t *est constante sur chacun des plans parallèles à une direction donnée.*

On appelle onde plane monochromatique *une fonction de la forme suivante :* $u(t,x,y,z) = A\exp\left(\frac{2i\pi}{cT}(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)\right)$.

On vérifie facilement que la fonction précédente est solution de (5.10). Il est clair que u est constante sur chaque plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, lorsque t est fixé. Le vecteur $\overrightarrow{V}$ de composantes (α, β, γ) est orthogonal au plan d'onde. On dit que l'onde se propage dans la direction $\overrightarrow{V}$ perpendiculaire aux plans précédents.' Voici quelques caractéristiques de cette onde.

— Longueur d'onde. À t fixé, sur la direction $\overrightarrow{V}$ la longueur d'onde est cT. Cela signifie que pour une valeur donnée de t, $u(t,x_0,y_0,z_0) = u(t,x_1,y_1,z_1)$ si et seulement si :

$$\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1) = kcT, \quad k \in \mathbb{N}.$$

— Périodicité. Pour un point M_0 de coordonnées (x_0,y_0,z_0) fixé, $u(t,x_0,y_0,z_0)$ a pour période T.

— Dans la direction $\overrightarrow{V}$, $u(t,l) = F(l+ct) + G(l-ct)$ est une onde à une dimension.

Comme l'équation des ondes est linéaire, on peut superposer des solutions, et sous réserve d'avoir existence et la régularité requise, considérer :

$$u(t,x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(T)\exp\left(-\frac{2i\pi t}{T}\right)\exp\left(\frac{2i\pi}{cT}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right) dT.$$

5.4.2 Potentiels retardés

La solution de l'EDP (5.10) avec second membre $F(t,x,y,z)$, de condition initiale : $u(0,x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = 0$, est donné par

$$u(t,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi c^2}\iiint_{B(P_0,ct)} \frac{F(t-r/c,x,y,z)}{r} dxdydz.$$

Ici r est la distance entre les points (x,y,z) et $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $B(P_0,ct)$ est la boule de centre P_0 et de rayon ct. Cette formule est connue sous le nom de « formule des potentiels retardés ». Elle fait intervenir une intégrale de volume.

Si on met des conditions initiales autres que zéro, la solution est la somme de la solution donnée par la formule de Kirchoff et celle donnée par la formule précédente.

5.4.3 Ondes dans $\mathbb{R}^2$, ondes cylindriques

Considérons une fonction g qui ne dépend pas de z. Et posons :

$$u(t,x_0,y_0) = \frac{t}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} g(x_0+ct\sin\theta\cos\phi, y_0+ct\sin\theta\sin\phi)\sin\theta d\theta d\phi \tag{5.12}$$

la solution correspondante de (5.10) dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u(0,x,y) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = g(x,y)$. Une telle onde est dite cylindrique. Cette onde vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{5.13}$$

Théorème 5.8 (Formule de Poisson) *La solution de* (5.13) *telle que*

$$u(0,x,y) = f(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = g(x,y)$$

est donnée par

$$u(t,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi c}\iint_{D(P_0,ct)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}dxdy + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\iint_{D(P_0,ct)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}dxdy\right].$$

Ici $P_0 = (x_0,y_0)$*,* $r^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ *et* $D(P_0,ct)$ *est le disque de centre* P_0 *et de rayon* ct*.*

Ici il n'y a plus de principe d'Huyghens. Si f et g sont nulles hors de D, lorsque $ct > d_2$, le disque $D(P_0,ct)$ englobe D et $u(t,P_0)$ est en général non nul. Cependant si f et g sont bornés sur D, alors la formule de Poisson montre que $\lim_{t\to+\infty} u(t,P_0) = 0$.

5.4.4 Exemple de méthode de séparation des variables

On veut résoudre l'EDP (5.10) avec $c = 1$ sur le parallélépipède $\mathcal{P} = \{0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$ avec les conditions suivantes :
- $u = 0$ sur les faces de $\mathcal{P}$ (condition frontière) ;
- $u(0,x,y,z) = f(x,y,z)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = g(x,y,z)$ dans V (condition initiale) ;
- f et g sont nulles sur les faces de $\mathcal{P}$ (condition de compatibilité).

On pose $u(t,x,y,z) = \tau(t)\phi(x)\psi(y)\eta(z)$. Alors on obtient :

$$\frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} + \frac{\eta''(z)}{\eta(z)} = k.$$

Ainsi il existe trois constantes λ, μ et ν telles que $\lambda+\mu+\nu = k$ et

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \lambda, \quad \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \mu, \quad \frac{\eta''(z)}{\eta(z)} = \nu.$$

Donc

$$\lambda = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad \phi(x) = A_m \sin \tfrac{m\pi x}{a},$$
$$\mu = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \psi(y) = B_n \sin \tfrac{n\pi y}{b},$$
$$\nu = -\frac{p^2\pi^2}{c^2}, \quad \eta(z) = C_p \sin \tfrac{p\pi z}{c}.$$

Donc

$$k = -\alpha^2 = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) = \frac{\tau''(t)}{\tau(t)},$$

soit

$$\tau(t) = D_k \cos(\alpha t) + E_k \sin(\alpha t).$$

Finalement avec $\dfrac{\alpha^2}{\pi^2} = \dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} + \dfrac{p^2}{c^2}$, on a

$$u(t,x,y,z) = \sum_{m,n,p} (A_{m,n,p} \cos(\alpha t) + B_{m,n,p} \sin(\alpha t)) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}.$$

Les coefficients $A_{m,n,p}$ et $B_{m,n,p}$ sont déterminés par les développements de f et g :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \sum_{m,n,p} A_{m,n,p} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}, \\
g(x,y,z) &= \sum_{m,n,p} \alpha B_{m,n,p} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}, \\
A_{m,n,p} &= \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(u,v,w) \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{p\pi w}{c} du dv dw, \\
\alpha B_{m,n,p} &= \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c g(u,v,w) \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{p\pi w}{c} du dv dw.
\end{aligned}$$

Par exemple si $a = b = c = \pi$, $g = 0$ et $f(x,y,z) = x(x-\pi)(y-\pi)(z-\pi)$, alors $B_{m,n,p} = 0$ et

$$A_{m,n,p} = -\frac{8^3}{\pi^3 m^3 n^3 p^3}, \quad \text{pour } m,n,p \text{ pairs.}$$

Chapitre 6

Annexe

6.1 Topologie de $\mathbb{R}^d$

Définition 6.1 *La* norme euclidienne *sur* $\mathbb{R}^d$*, notée* $\|.\|$*, est définie par si* $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$*,*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}.$$

$B(x,r)$ est la boule (ouverte) de centre x et de rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des points y éloignés au plus de ε du point x :

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d,\ \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

Définition 6.2 *Une partie* Ω *de* $\mathbb{R}^d$ *est* bornée *s'il existe* $R > 0$ *telle que* $\Omega \subset B(0,R)$*, c'est-à-dire*

$$\forall x \in \Omega, \quad \|x\| < R.$$

Définition 6.3 *Une partie de* $\mathbb{R}^d$*,* Ω*, est* ouverte *si :*

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d,\ \|y - x\| < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

$B(x,\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ε, c'est-à-dire l'ensemble des points y éloignés au plus de ε du point x.

Définition 6.4 *Une partie de* $\mathbb{R}^d$ *est* fermée *si son complémentaire* $\Omega^c = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x \notin \Omega$ *est ouvert.*

La fermeture *de* Ω*, noté* $\overline{\Omega}$*, est le plus petit fermé contenant* Ω*. L'*intérieur *de* Ω*, noté* $\overset{\circ}{\Omega}$*, est le plus grand ouvert contenu dans* Ω*. Le* bord *de* Ω*, noté* $\partial\Omega$*, est défini par :* $\overline{\Omega} \cap \left(\overset{\circ}{\Omega}\right)^c$.

Remarquons que l'on a toujours

Lemme 6.1 — *les inclusions :* $\overset{\circ}{\Omega} \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$ *;*

— Ω *ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$ *;*
— Ω *fermé si et seulement si* $\Omega = \overline{\Omega}$.

Enfin on a le résultat suivant.

Théorème 6.1 *Dans* $\mathbb{R}^d$*, les* compacts *sont les ensembles fermés et bornés.*

Pour les autres espaces, on a simplement que les compacts sont des ensembles fermés et bornés, mais l'inverse est faux. Il existe des ensembles fermés, bornés et non compacts.

Voyons quelques exemples pour fixer les idées.

1. $\mathbb{R}^d$ est à la fois ouvert et fermé. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la boule de centre x et de rayon 1 est incluse dans $\mathbb{R}^d$, donc il est ouvert. Son complémentaire est l'ensemble vide $\emptyset$, qui est ouvert, car $\forall x \in \emptyset$, ... est toujours vrai.

   On a du coup : $\overline{\mathbb{R}^d} = \overset{\circ}{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d$ et $\partial \mathbb{R}^d = \emptyset$.
2. $B(x,r)$, avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Un dessin aide souvent à comprendre.
   — Une boule ouverte est ouverte ! En effet si $y \in B(x,r)$, alors en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - \|x-y\|)$, on a
   $$\forall z \in B(y,\varepsilon),\ \|z-x\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < \|x-y\| + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\|x-y\| < r.$$
   Donc $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.
   — Si cette boule était fermé, son complémentaire serait ouvert. Or pour $y \in B(x,r)^c$ tel que $\|x-y\| = r$, la boule de centre y et de rayon ε n'est pas incluse dans $B(x,r)^c$, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. En effet, soit $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ avec $\alpha = \min(1, \varepsilon/(2r))$. Alors
   $$\|z-y\| = \alpha\|x-y\| = \alpha r < \varepsilon, \quad \text{et } \|x-z\| = (1-\alpha)r < r.$$
   Ainsi $z \in B(y,\varepsilon) \cap B(x,r)$.
   — Comme $B(x,r)$ est ouverte, on a $\overset{\circ}{B(x,r)} = B(x,r)$.
   — Montrons que $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|x-y\| \leq r\}$. D'abord cet ensemble est fermé. En effet son complémentaire $\{y \in \mathbb{R}^d,\ \|x-y\ > r\}$ est ouvert. Si y est tel que $\|x-y\| > r$, alors pour tout z dans la boule de centre y et de rayon $\varepsilon = (\|x-y\| - r)/2 > 0$, on a $\|x-z\| > r$. De plus cet ensemble contient $B(x,r)$. Enfin si F était un ensemble fermé contenant $B(x,r)$ et strictement contenu dans $\{y \in \mathbb{R}^d,\ \|x-y\| \leq r\}$, il existerait $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x-y\| = r$ et$y \notin F$. Donc y serait dans le complémentaire de F, ensemble ouvert, et il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre y et de rayon ε soit incluse dans le complémentaire de F. Or $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ avec $\alpha = \min(1, \varepsilon/(2r))$ est dans $B(x,r) \subset F$ et dans $B(y,\varepsilon)$. Ceci est impossible. Donc $\{y \in \mathbb{R}^d,\ \|x-y\| \leq r\}$ est bien le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant $B(x,r)$.
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |x-2| < 2\}$. Il faut faire un dessin ! A est la réunion de deux bandes verticales.

— A est un ensemble ouvert, non fermé, égal à son intérieur et dont la fermeture est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-2| \leq 2\}$. Les justifications ressemblent à celles faites sur la boule.
— Son bord est la réunion de trois droites : $x = 2$, $x = 4$ et $x = 0$.

4. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y < 3\}$. Là aussi un dessin est vivement recommandé. B est une bande horizontale.
   — B est un ensemble ni ouvert, ni fermé. En effet le point $(0,-1)$ est dans B, mais toute boule $B((0,-1),\varepsilon)$ contient un point tel que $y < -1$. Donc il n'est pas ouvert. S'il était fermé son complémentaire serait un ouvert. Or $(0,3)$ est dans le complémentaire et toute boule $B((0,3),\varepsilon)$ contient un point tel que $y < 3$. Donc le complémentaire n'est pas ouvert. B n'est donc pas fermé.
   — On vérifie que $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < y < 3\}$ et $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq y \leq 3\}$. De plus $\partial B = \{(x,y),\ y = -1\} \cup \{(x,y),\ y = 3\}$.
5. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$. C'est une couronne.
   — C est un ensemble ouvert, non fermé. En effet si $(x,y) \in C$, alors pour $\varepsilon = (1/2)\min(3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 1)$, la boule de centre (x,y) et de rayon ε est dans C. On vérifie sans difficulté que le complémentaire n'est pas ouvert.
   — De plus $\overset{\circ}{C} = C$ et $\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4\}$. De plus $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 4\}$. C'est la réunion de deux cercles.
6. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| \leq 1\}$. C'est un carré.
   — D n'est ni ouvert, ni fermé.
   — De plus $\overset{\circ}{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| < 1\}$ et $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$. Le bord de D est la réunion de quatre segments :

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| = 1,\ |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 1,\ |y| = 1\}.$$

6.2 Courbes

L'étude des courbes planaires est un élément essentiel dans l'analyse du portrait de phase $((y(t), y'(t)), t \geq 0)$ d'une solution d'équation différentielle scalaire

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \geq 0,$$

avec une condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. On se place donc dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien canonique, euclidien et orienté. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \end{array} \tag{6.1}$$

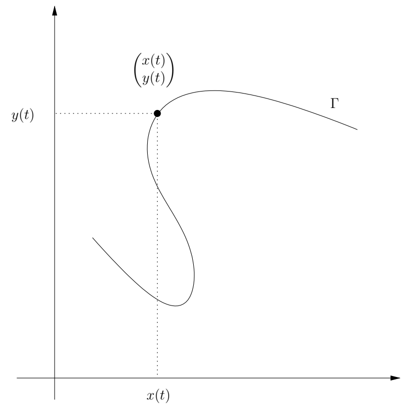


FIGURE 6.1 – Courbe planaire paramétrée.

6.2.1 Arcs paramétrés de classe C^k

Définition 6.5 *On dit que f est* de classe C^k sur I *($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) si et seulement si les fonctions coordonnées $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k sur I.*

Définition 6.6 *On appelle* arc paramétré de classe C^k *tout couple (I, f) avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k. L'ensemble $\Gamma = \{f(t),\ t \in I\}$ est le* support *de l'arc (I, f).*

Une courbe plane peut être définie de multiples façons. Dans ce cours on se limite à deux (équations cartésiennes et paramétriques) et on laisse de côté les représentations implicites ou en coordonnées polaires (voir Section **??**).

6.2.2 Étude locale en un point

Étude locale au voisinage d'un point pour un paramétrage cartésien

On considère une courbe sous forme d'équation cartésienne, c'est-à-dire $f : x \in I \longmapsto (x, y(x))$ où $y : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que y admet un développement limité en a de la forme

$$y(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec $p \geq 2$, $\lambda_p \neq 0$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$.

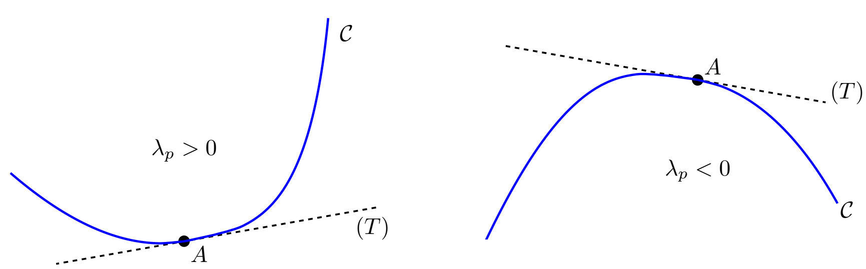


FIGURE 6.2 – p pair : $\mathcal{C}$ ne traverse pas (T)

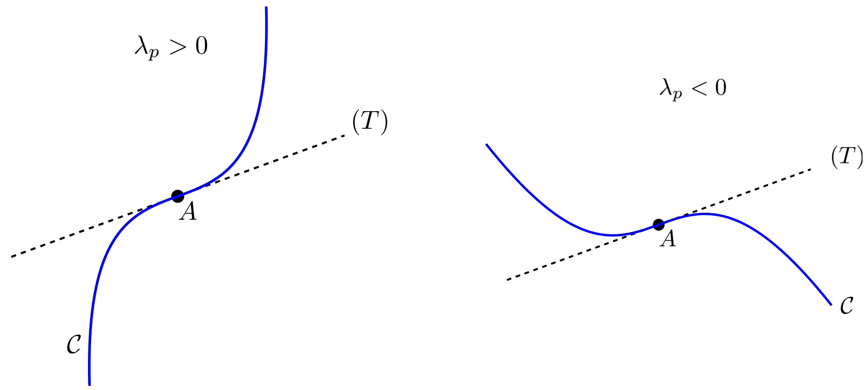


FIGURE 6.3 – p impair : $\mathcal{C}$ traverse (T)

Alors $\lim_{x \to a} y(x) = \lambda_0$. Donc y est définie et continue en a ou prolongeable par continuité en a en posant $y(a) = \lambda_0$. On suppose désormais $a \in I$ et $y(a) = \lambda_0$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan et $A = (a, y(a))$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

Au voisinage de a,

$$\frac{y(x) - y(a)}{x - a} = \lambda_1 + \lambda_p (x-a)^{p-1} + o((x-a)^{p-1}) = \lambda_1 + o(1).$$

Donc y est dérivable en a avec $y'(a) = \lambda_1$. La tangente (T) en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $z = y(a) + y'(a)(x-a)$, soit $z = \lambda_0 + \lambda_1(x-a)$. Et comme $\lambda_p \neq 0$,

$$y(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a)) \underset{a}{\sim} \lambda_p (x-a)^p.$$

Ainsi au voisinage de a, $y(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a))$ est du signe de $\lambda_p(x-a)^p$ ce qui donne la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T) au voisinage de a^+ et a^-.
Deux cas de figure se présentent :

1. Si p est pair : $\mathcal{C}$ reste du même côté de (T).
2. Si p est impair : $\mathcal{C}$ traverse (T) et on dit que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Applications. Dans le cas de la chute verticale d'un corps pesant dans l'air lâché sans vitesse (voir équation (**??**) page (**??**)), la solution est $v(t) = v^* \tanh(k'v^*t)$. La dérivée s'exprime comme l'équation $v'(t) = -k'v(t)^2 + g'$. Dans le cas des équations autonomes scalaires, on peut toujours poser $x = v(t)$ et la dérivée est une fonction de x. Ainsi le portrait de phase sous forme cartésienne est

$$x \longmapsto (x, y(x)) = (x, -k'x^2 + g').$$

□

Étude local au voisinage d'un point pour une courbe paramétrique

Soient (I, f) un arc paramétré de classe C^k $(k \geq 1)$, Γ son support et $t_0 \in I$ où f est définie par l'équation (6.1).

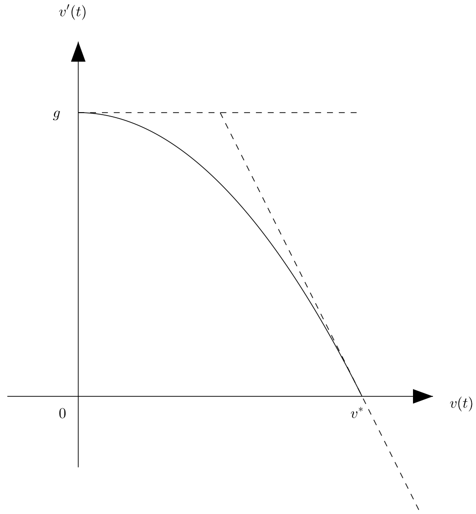


FIGURE 6.4 – Portrait de phase de la vitesse d'un corps en chute dans l'air

Théorème 6.2 *On suppose que les vecteurs dérivés successifs de f en t_0 ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire qu'il existe $h \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $f^{(h)}(t_0) \neq (0,0)$. Soit $p = \min\{h \in \{1, \ldots, k\},\ f^{(h)}(t_0) \neq (0,0)\}$. On a donc $f'(t_0) = \ldots = f^{(p-1)}(t_0) = (0,0)$ et $f^{(p)}(t_0) \neq (0,0)$. Alors Γ admet une tangente en $f(t_0)$ et cette tangente est dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.*

Définition 6.7 *On dit que $f(t_0)$* un point régulier de Γ *si $f'(t_0) \neq (0,0)$ et* un point stationnaire de Γ *si $f'(t_0) = (0,0)$.*

Corollaire 6.1 *En tout point régulier de Γ la tangente est dirigée par $f'(t_0)$.*

Classification des points

Soient (I, f) un arc paramétré de classe C^k $(k \geq 2)$, Γ son support et $t_0 \in I$.

On suppose qu'il existe $h \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $f^{(h)}(t_0) \neq (0,0)$. On pose $p = \min\{h \in \{1, \ldots, k\},\ f^{(h)}(t_0) \neq (0,0)\}$. Alors $f^{(p)}(t_0 \neq (0,0)$ dirige la tangente à Γ en $f(t_0)$.

Théorème 6.3 *On suppose qu'il existe $j \in \{p+1, \ldots, k\}$ tel que $f^{(j)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$. Soit*

$$q = \min(\{j \in \{p+1, \ldots, k\},\ f^{(j)}(t_0) \text{ n'est pas colinéaire à } f^{(p)}(t_0)\}).$$

Alors $\left(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et on a les quatre cas suivants (on note $M_0 = f(t_0)$) :

- *si p est impair et q est pair, alors M_0 est* un point ordinaire de Γ *et Γ ne traverse pas sa tangente, mais traverse toute autre droite passant par M_0.*

— *Si p est impair et q est impair, alors M_0 est* un point d'inflexion de Γ *et* Γ *traverse toute droite passant par M_0 y compris sa tangente en M_0.*
— *Si p est pair et q est impair, alors M_0 est* un point de rebroussement de première espèce de Γ *et* Γ *traverse sa tangente, mais ne traverse aucune autre droite passant par M_0.*
— *si p est pair et q est pair, alors M_0 est* un point de reroussement de deuxième espèce de Γ *et* Γ *ne traverse aucune droite passant par M_0.*

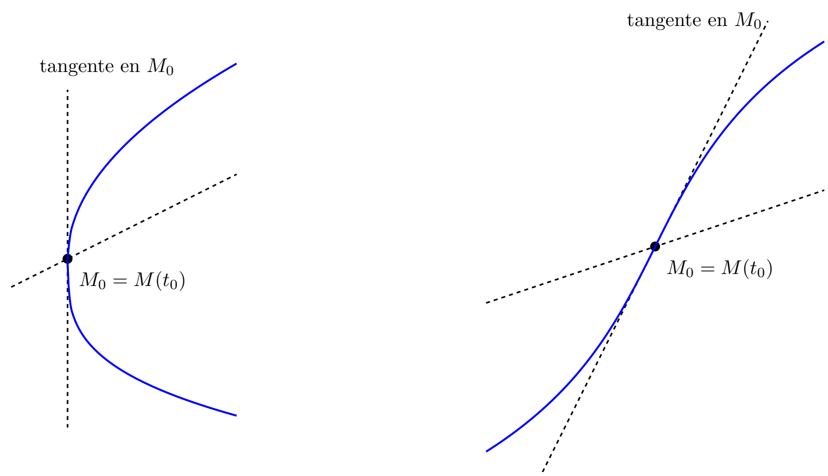


FIGURE 6.5 – Points ordinaires et d'inflexion (p impair)

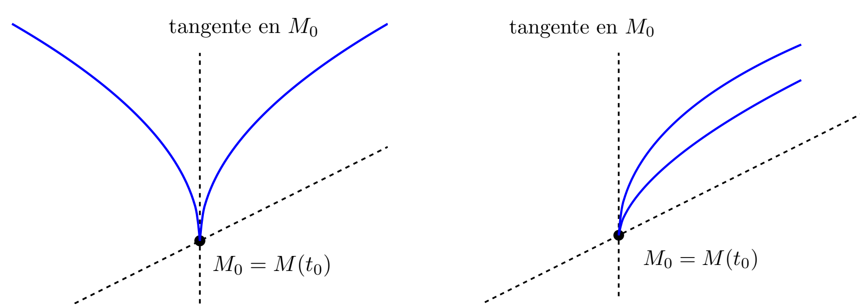


FIGURE 6.6 – Points de rebroussement de première et deuxième espèce (p pair)

Définition 6.8 *Soient (I, f) un arc paramétré de classe C^k $(k \geq 2)$, Γ son support et $t_0 \in I$. On dit que M_0 est un* point birégulier de Γ *si la famille $(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre $(p = 1, q = 2)$. La courbe Γ est* birégulière *si tout point $M_0 \in \Gamma$ est birégulier.*

On remarquera que les points biréguliers sont ordinaires.

6.2.3 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

On doit étudier une courbe Γ donnée par $x = x(t)$ et $y = y(t)$. Les quatre premiers points de l'étude sont indispensables, le derniers est optionnel et à faire au cas par cas.

1. On détermine les domaines de définition D_x et D_y de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$; le domaine de définition de Γ est $D = D_x \cap D_y$. On obtient
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists t \in D,\ x = x(t) \text{ et } y = y(t)\}.$$
Généralement Γ est une réunion de courbes Γ_i, D étant une réunion d'intervalles disjoints.
2. Réduction des intervalles d'étude : on cherchera si les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ périodiques, paires ou impaires.
Par exemple si pour tout $t \in D$, $-t \in D$ et $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, alors $M(-t) = (x(-t), y(-t))$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie par rapport à la droite des ordonnées. On obtient donc toute la courbe en faisant varier t dans $\mathbb{R}_+ \cap D$, puis en complétant par symétrie.
3. On calcule $x'(t)$ et $y'(t)$ et on dresse un tableau de variations.
4. On cherche les points stationnaires (ceux tels que $x'(t) = y'(t) = 0$) et éventuellement on en fait l'étude. Ce qui suppose de calculer les dérivées successives de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
5. On étudie les branches infinies : Γ présente une branche infinie en t_0 (resp. en t_0^+, resp. en t_0^-) si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$ (resp. pour la limite à droite, resp. à gauche).
Dans ce cas on regarde les limites respectives de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$. Si l'une des deux est finie, on a une asymptote verticale ou horizontale. Si les deux sont infinies, on étudie la limite de $t \mapsto x(t)/y(t)$.

Définition 6.9 *Une* abscisse curviligne *est une application $s : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :*
$$\forall t \in I,\ s'(t) = \|f'(t)\|.$$

Ainsi pour $t_0 \in I$ fixé, les abscisses curvilignes de Γ orienté par (I, f) sont les fonctions $s : I \to \mathbb{R}$ de la forme :
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

L'abscisse curviligne est une primitive de $\left(\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2\right)^{1/2}$.

Définition 6.10 *Soit (I, f) un arc paramétré et soit Γ son support. Soit (J, g) un paramétrage admissible de Γ. On dit que (J, g) est un* paramétrage normal de Γ *si quel que soit $u \in J$, $\|g'(u)\| = 1$ (la norme de la vitesse est constante).*

Proposition 6.1 *Si Γ est régulier (si pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq (0, 0)$), alors toute abscisse curviligne s est un changement de paramétrage normal de Γ.*