Licence Acoustique deuxième année

Semestre 4

Mathématiques (encore...).

Alexandre POPIER

Année : 2021–2022

Table des matières

Introduction

A ECRIRE

Chapitre 1

Intégration : rappels et compléments

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut la décomposer en partie réelle et partie imaginaire :

$$f(x) = \Re(x) + i\Im(x),$$

où $\Re$ et $\Im$ sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le module de f, noté $|f|$ est une fonction à valeurs positives :

$$|f(x)| = \sqrt{\Re(x)^2 + \Im(x)^2}.$$

Ainsi tout ce qui est valable pour une fonction à valeurs réelles sera valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.1 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ (sans autre hypothèse a priori), et toutes les fonctions considérées seront supposées définies sur cet intervalle I. On supposera aussi **pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, les fonctions sont intégrables sur ce segment.** Ceci est notamment vrai si les fonctions sont continues ou continues par morceaux sur $[a, b]$, c'est-à-dire dans $\mathcal{C}^0_m([a, b]; \mathbb{K})$. Ce sera toujours le cas pour ce semestre. Autrement dit, si problème d'intégrabilité il y a, ce sera uniquement au bord de l'intervalle I.

Dans la suite, lorsqu'on dit qu'une fonction numérique f est de classe C^k par morceaux sur un intervalle I, on sous-entend $0 \leq k \leq \infty$.

Définition 1.1 *Soit f une fonction, définie sur un segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Pour que f soit C^k par morceaux sur $[a, b]$, il faut et il suffit qu'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b)$ et des fonctions f_i, $i = 0, \ldots, n-1$, telles que f_i soit de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$ et que f restreinte à $]a_i, a_{i+1}[$ soit égale à f_i.*

On rappelle qu'une fonction f, définie sur un intervalle I, à valeurs complexes, est de classe C^k par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I l'est.

Rappel. Si f est continue sur $[a, b[$ (semi-ouvert, borné ou non), alors f est intégrable sur $[a, x]$ pour tout $a \leq x < b$. La fonction $F : [a, b[\to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall a \leq x < b, \ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la **primitive de** f satisfaisant $F(a) = 0$. En particulier $F'(x) = f(x)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Re(x)dx + i \int_a^b \Im(x)dx.$$

1.1.1 Intégrale d'une fonction positive

Dans ce paragraphe, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$.

Définition 1.2 *Une fonction f positive sur un intervalle I est dite* intégrable sur I*, s'il existe un M réel positif tel que pour tout segment $J = [a, b]$ inclus dans I on ait $\int_J f = \int_a^b f \leq M$.*

Pour toute fonction f intégrable sur l'intervalle I on appelle intégrale de f sur I *le nombre*

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_J f, \ J \text{ segment et } J \subset I \right\}.$$

Remarque 1.1 *Comme f est à valeurs positives, son intégrale sur I est un nombre réel positif ! De plus si I est un segment, alors f est intégrable et $\int_I f = \int_{[a,b]} f$.*

Exemple 1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à $x \in \mathbb{R}$, associe $\dfrac{1}{1+x^2}$. f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.*

D'abord cette fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. Donc elle est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$. De plus, pour tout $a \leq b$, $\int_a^b f = \text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a) \leq \pi = M$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus il est facile de voir que pour b tendant vers $+\infty$ et a tendant vers $-\infty$, $\int_a^b f$ tend vers π.

Exemple 1.2 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui à $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\dfrac{1}{1+x}$. f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

En effet cette fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives. Mais pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\int_0^b f = \ln(1 + b)$, qui n'est pas borné. Donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 1.1 *Si f (à valeurs positives) est intégrable sur l'intervalle I, alors pour tout intervalle I' inclus dans I, f est intégrable sur I'.*

Important : il est impératif de toujours préciser **sur quel intervalle** une fonction est intégrable ! Ainsi si I est réduit à un point, toute fonction f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = 0$.

Proposition 1.2 *Si f est continue par morceaux et à valeurs positives sur le segment $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$, sur $[a,b[$, sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$ et les quatre intégrales de f sur ces quatre intervalles sont égales.*

Intégrale de Riemann

Ces cas sont à retenir par cœur.

Théorème 1.1 *La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $(a,b) > 0$,

$$\int_a^b \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) & \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\,; \\ \\ \ln b - \ln a & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Comme $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha}$ vaut $+\infty$ si $1-\alpha > 0$, et 0 si $1-\alpha < 0$, et comme $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$, on en déduit que l'intégrale existe sur $[a,+\infty[$ si et seulement $\alpha > 1$ et

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\, a^{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha > 1; \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

□

Corollaire 1.1 *La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Plus généralement,

Corollaire 1.2 *si $-\infty < a < b < +\infty$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ sont intégrales sur $]a,b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Remarque 1.2

1. *La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0, et ainsi prolongée, est intégrable sur $[0,x_0]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{x_0} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est une intégrale « ordinaire ».*

Propriétés

Proposition 1.3 *Si f et g sont à valeurs positives sur un intervalle I et intégrables sur I, alors $f+g$ est intégrable sur I et pour tout λ de $\mathbb{R}_+$, λf est intégrable sur I.*

Théorème 1.2 *Une fonction* **continue***, à valeurs positives et intégrable sur un intervalle I est nulle si et seulement si son intégrale sur I est nulle.*

Proposition 1.4 *Pour f fonction à valeurs positives sur un intervalle I et pour tout a de I, f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $I_1 = I \cap]-\infty, a]$ et sur $I_2 = I \cap [a, +\infty[$ et en cas d'intégrabilité on a $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.*

Théorème 1.3 *Soit f une fonction positive sur un intervalle $I = [a, b[$. Pour que f soit intégrable sur I, il faut et il suffit que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ soit majorée sur I.*

Caractérisation. Soit f une fonction à valeurs positives sur l'intervalle $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie à gauche en b et en cas d'intégrabilité on a

$$\int_I f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt = \sup_{x \in [a,b[} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Caractérisation. Soit f une fonction à valeurs positives sur l'intervalle $I =]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si l'application $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie à droite en a et en cas d'intégrabilité on a

$$\int_I f = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt = \sup_{x \in]a,b]} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Ces caractérisations sont **importantes** : elles ramènent l'intégrabilité d'une fonction au calcul de la limite d'une primitive de cette fonction. Par ailleurs c'est généralement le seul moyen pour trouver la valeur de l'intégrale de f sur I : on se ramène à un calcul de primitive, puis de limite.

De plus d'après la proposition 1.4, pour étudier l'intégrabilité d'une fonction, on peut découper l'intervalle I en deux et utiliser ces caractérisations.

Utilisation des relations de comparaison

Proposition 1.5 *Soit f et g à valeurs positives sur l'intervalle I telles que pour tout t de I on ait $f(t) \leq g(t)$. Si g est intégrable sur I alors f l'est aussi. Par contraposition, si f n'est pas intégrable, g ne l'est pas.*

Proposition 1.6 (Règle de Riemann) *Soit f définie sur $I = [a, +\infty[$.*

1. *Si pour un réel α, $\alpha > 1$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}_+$, alors f est intégrable sur I.*

2. *Si pour un réel α, $\alpha \leq 1$, $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = L \in]0,+\infty]$, alors f n'est pas intégrable sur I.*

Exemple 1.3 *Nature de $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$ pour $f(t) = \dfrac{t^2+3}{t^4+1}$.*

Ici f est rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. On coupe $\mathbb{R}$ en deux : $\mathbb{R} =]-\infty,0] \cup [0,+\infty[$. Par ailleurs, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De même $f(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_-$. D'après la proposition 1.4, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4 *Nature de $\int_1^\infty f(t)dt$ pour $f(t) = \dfrac{2+\sin t}{t}$.*

La fonction f est continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus

$$\forall t \geq 1,\ \ f(t) \geq \frac{1}{t} > 0,$$

et $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable, donc d'après la proposition 1.5, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Dans le cas où l'intervalle d'intégration I est semi-ouvert et borné, d'extrémités a et b, $-\infty < a < b < +\infty$, on a les règles suivantes.

Proposition 1.7 *On suppose que f est définie sur $I = [a,b[$.*
- *Si $\lim_{t\to b}(b-t)^\alpha f(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur I.*
- *Si $\lim_{t\to b}(b-t)^\alpha f(t) = L \in]0,+\infty]$ et $\alpha \geq 1$, alors f n'est pas intégrable sur I.*

On a un résultat analogue pour des fonctions définies sur un intervalle $]a,b]$, avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.5 *Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. f est intégrable sur $[0,1[$.*

En effet cette fonction f est continue sur $[0,1[$ et à valeurs positives. De plus,

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{1-x} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ici $\alpha = 1/2 < 1$, donc f est intégrable sur $[0,1[$.

1.1.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes

Ici on ne suppose plus f positive. En revanche on a toujours que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, f est intégrable sur $[a,b]$. Si f est continue ou continue par morceaux sur I, cette hypothèse est vraie.

Définition 1.3 *Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite* intégrable sur un intervalle *I si $|f|$ est intégrable sur I.*

Proposition 1.8 *Si f et φ sont continues par morceaux sur I avec $|f(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout t de I et φ intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.*

Preuve. D'après la proposition 1.5, $|f|$ est intégrable, d'où le résultat. □

Théorème 1.4 (Espace $L^1(I)$) *Pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur I, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication externe par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il est noté $L^1(I,\mathbb{K})$ ou plus simplement $L^1(I)$.*

On rappelle que si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, on définit les fonctions « partie positive de f », notée f^+ et « partie négative de f », notée f^- par

$$\forall x \in I,\ f^+(x) = \max(f(x),0),\ f^-(x) = -\min(f(x),0).$$

Les fonctions f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall x \in I,\ f(x) = f^+(x) - f^-(x),\ |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

La proposition suivante tient également lieu de définition.

Proposition 1.9 *Une fonction f à valeurs réelles est intégrable sur I si et seulement si les deux fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ sont intégrables sur I et l'on a :*

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \text{ et } \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

Si f est à valeurs complexes :

$$f(x) = \Re(x) + i\Im(x),$$

alors

Proposition 1.10 *Une fonction f à valeurs complexes est intégrable sur I si et seulement si les deux fonctions $\Re$ et $\Im$ sont intégrables sur I et l'on a :*

$$\int_I f = \int_I \Re + i \int_I \Im.$$

Maintenant de façon générale, on a les propriétés suivantes.

Proposition 1.11 *Pour toute fonction f intégrable sur un intervalle I on a*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Proposition 1.12 *Si f est intégrable sur $I = [a, b[$, alors* $\displaystyle\int_I f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt.$

Proposition 1.13 *Si f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, alors f est intégrable sur les quatre intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ et les intégrales sur ces quatre intervalles sont égales à l'intégrale de cette fonction comme intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.*

Proposition 1.14 *Si f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tout a de $\mathbb{R}$, l'intégrabilité de f sur I est équivalente à l'intégrabilité de f sur les deux intervalles $I_1 = I \cap]-\infty, a]$ et $I_2 = I \cap [a, +\infty[$. En cas d'intégrabilité, on a* $\displaystyle\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$

De manière plus générale, si I' est un intervalle contenu dans l'intervalle I et si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I' et $\displaystyle\int_{I'} f = \int_I \mathbb{1}_{I'} \cdot f.$

Notation. $\mathbb{1}_A$ est l'application caractéristique de l'ensemble A prenant la valeur 1 en tout point de A et 0 partout ailleurs :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Définition 1.4 *Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec $a < b$, et si f est intégrable sur l'ouvert $]a, b[$, on appelle intégrale de a à b de f le nombre $\int_{]a,b[} f$ que l'on note $\int_a^b f$. Si $a > b$, alors on désigne par $\int_a^b f$ le nombre $-\int_b^a f$.*

Relation de Chasles. Si f est intégrable sur I et si $(a, b, c) \in I^3$, alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Relations de comparaison. Tous les résultats du paragraphe 1.1.1 sur l'utilisation des relations de comparaison restent valables **si** les hypothèses sont appliquées à $|f|$ et $|g|$ (au lieu de f et g).

Changement de variable. Si f est intégrable sur l'intervalle I et si φ est une bijection de classe C^1 de l'intervalle I' sur l'intervalle I, alors $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur I' et l'on a :

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

Si I' est d'extrémités a et b, on obtient :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Intégration par parties. On manipulera cette technique avec précaution ! On prendra soin de bien vérifier l'intégrabilité de toutes les fonctions mises en jeu, puis on commencera par appliquer l'intégration par parties sur des segments, et enfin on concluera grâce à la proposition 1.12 et à la définition 1.9.

1.1.3 Méthodologie

On souhaite étudier la nature d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_I f$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur I. L'étude se fait comme suit.

1. D'abord on prend soin de justifier que f est bien continue par morceaux sur I et de repérer les points de I qui posent problème. En particulier si I est un intervalle borné, on pensera à identifier les points où f pourrait ne pas être définie.

   Par exemple si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il y a un problème éventuel en 0 et $+\infty$.
2. On découpe l'intervalle I en autant de sous-intervalles que nécessaire. Dans l'exemple précédent, un découpage possible est $I =]0,1] \cup [1,+\infty[$.
3. Sur chaque sous-intervalle on étudie la fonction $|f|$. Il faut avoir à l'esprit les critères d'intégrabilité du cours.

   Toujours avec l'exemple précédent. Sur $[1,+\infty[$, $|f(t)| \leq 1/t^2$: donc intégrable. Sur $]0,1]$, on utilise une équivalence en zéro : $|f(t)| \sim 1/t$, car $\sin t \sim t$. Donc non intégrable.
4. On rassemble les résultats et on conclut. Dans l'exemple précédent, f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Éventuellement on fera un calcul exact de l'intégrale (ce sera précisé dans l'énoncé).

Remarque 1.3 *Il existe une théorie des intégrales dites impropres où f peut être intégrable sans que $|f|$ le soit. Néanmoins ce cadre n'est pas approprié pour les problèmes que nous aborderons plus tard.*

1.2 Espaces de fonctions intégrables

La bonne notion de fonction intégrable pour les problèmes que nous avons en vue en donnée par la théorie de Lebesgue. Par faute de temps, et pour ne pas alourdir encore plus le cours, nous ne discuterons pas les "détails" de cette théorie, et supposerons que toutes les fonctions considérées sont *mesurables* (ce qui n'est pas très loin d'être vrai !).

Le problème est alors de savoir si l'intégrale $\int_I |f|$ est finie, auquel cas on dit que l'intégrale $\int_I f$ est définie, ou encore que f est intégrable. Dans le cas contraire $\int_I f$ n'a pas de sens dans cette théorie. C'est le cadre adopté jusqu'ici.

D'autre part, nous dirons qu'une fonction est nulle presque partout si elle est nulle en dehors d'un ensemble "de mesure nulle" (par exemple un point, ou un ensemble dénombrable de points, ce sont les ensembles que les intégrales ne peuvent voir car ils sont trop petits pour avoir une vraie "masse"). Les égalités de fonctions à 0 seront donc à comprendre "presque partout".

1.2.1 Résultats centraux

Théorème 1.5 (Théorème de convergence monotone) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives définies sur un ensemble I et telles que $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n. Posons $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.*

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

Preuve. Notons $a_n = \displaystyle\int_I f_n(x)dx$. Par hypothèse, les a_n forment une suite croissante qui va donc tendre vers $+\infty$ ou bien une limite finie.

Or on a $a_n \leq \displaystyle\int_I f(x)dx$ et donc ce dernier est infini si la suite (a_n) n'a pas de limite finie, démontrant ainsi le théorème dans ce cas. Dans le cas contraire, notons a la limite des a_n.

Pour tout fonction en escalier φ majorée par f et tout $\alpha \in]0,1[$ notons $I_n = \{x \in I, f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. On a alors, comme $f_{n+1} \geq f_n$ $I_{n+1} \subset I_n$ et $\cup_n I_n = I$ car, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq \varphi(x) > \alpha\varphi(x)$ et donc il existe n tel que $f(x) \geq f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$

On a alors

$$\int_I f_n(x)dx \geq \int_{I_n} f_n(x)dx \geq \int_{I_n} a\varphi(x)dx.$$

et donc

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \alpha \int_I \varphi(x)dx.$$

Le terme de gauche étant indépendant de α on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \geq \int_I \varphi(x)dx.$$

Or $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est définit comme $\sup_{\varphi\leq f} \displaystyle\int_I \varphi(x)dx$, on a donc $a \geq \displaystyle\int_I f(x)dx$. □

Le résultat suivant est central dans la théorie de Lebesgue.

Théorème 1.6 (Théorème de convergence dominée) *Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble I et telles que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

et il existe un fonction g intégrable sur I telle que pour tout n, $|f_n| \leq g$. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

Preuve. Notons $h_n = \inf_{i\geq n} f_i + g$. On a alors, comme $|f_i| \leq g$, que $h_n \geq 0$ et que $h_n \geq h_{n+1}$.

On a alors $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_x = g + \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geq n} f_i$ et on. On voit que $|h(x)| \leq 2g(x)$ et donc est finie. On a clairement

$$\int_I h(x)dx \geq \lim_{n\to\infty} \int_I h_n(x)dx.$$

D'autre part, d'après le théorème de convergence monotone, on trouve que

$$\int_I h(x)dx = \lim_{n\to\infty} h_n(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geq n} \int_I h_n(x)dx.$$

Par suite, en soustrayant $\int_I g(x)dx$ des deux côtés, on trouve que

$$\int_I f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f(n(x)dx.$$

Utilisant maintenant le fait que $g - f_n \geq 0$, on montre de la même manière que

$$\int_I -f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I -f(n(x)dx.$$

C'est-à-dire que

$$\int_I f(x)dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_I f(n(x)dx.$$

On déduit alors de ces inégalités l'existence d'une limite (car $\limsup = \liminf$). $\square$

Voici maintenant quelques applications de ces résultats.

Théorème 1.7 (Théorème de continuité sous le signe intégrale) *Soit $f(x,y)$ une fonction continue par rapport à y pour tout $x \in I$. Supposons qu'il existe une fonction g définie sur E (indépendante de y !) et intégrable sur E telle que*

$$|f(x,y)| \leq g(x).$$

Alors $y \mapsto \displaystyle\int_I f(x,y)dx$ est continue.

Preuve. On utilise le critère séquentielle de continuité : soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un point y. Alors, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(y_n, x)dx = \int_I f(y,x)dx$$

qui montre la continuité en y. $\square$

Théorème 1.8 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale) *Soit $f(x,y)$ une fonction dérivable par rapport à y pour tout $x \in I$. Supposons qu'il existe une fonction g définie sur E (indépendante de y !) et intégrable sur E telle que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq g.$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_I f(x,y)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Preuve. Étant donnée une suite (h_n) tendant vers 0, l'inégalité des accroissements finis montre que $|f(y+h_n,x) - f(y,x)| \leq g(x)|h_n|$.

Notant $\phi_n(x) = \frac{f(y+h_n,x)-f(y,x)}{h_n}$ on a $|\phi_n(x)| \leq g(x)$ et le théorème de convergence dominée permet de voir que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_I f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

□

Théorème 1.9 (Théorème de Fubini) *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble produit $I \times J$. Supposons que $\int_{I\times J} |f(x,y)|dxdy < \infty$. Alors*

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx \right) dy.$$

La démonstration en est assez compliquée et demande de revenir aux définitions de l'intégrale de Lebesgue... Nous nous contenterons donc de l'illustrer sur un exemple classique fort utile pour la suite.

Exemple 1.6 *Le but est de calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. Pour cela, on procède de la manière suivante*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy \right) \overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Passant en coordonnées polaires de sorte que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_0 2\pi\rho e^{-\rho^2}d\rho d\theta \\ &\overset{Fubini}{=} \int_0^{2\pi} 1d\theta \int_{\mathbb{R}^+} \rho e^{-\rho^2}d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{-\rho^2} \right]_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

1.2.2 Espaces L^p avec leur norme

Les espaces de fonctions suivants vont être importants pour la suite.

Définition 1.5 (Espaces $L^p(I)$) *Pour $p \geq 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'espace $L^p(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ telles que $|f|^p$ est intégrable sur I.*

Ainsi $f \in L^p(I)$ si

$$\int_I |f|^p = \int_I |f(x)|^p dx < +\infty.$$

Noter que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme seul le module (ou la valeur absolue) de f compte, la notation $L^p(I)$ ne précise pas dans quel ensemble arrivent les fonctions.

Définition 1.6 (Norme sur les espaces $L^p(I)$) *Pour $p \geq 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in L^p(I)$, on pose*

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

C'est la **norme** L^p *de f.*

Remarquer aussi que la fonction nulle $O(x) = 0$ pour tout x, est dans tout espace $L^p(I)$, quels que soient p et I. Donc ces espaces $L^p(I)$ ne sont pas vides ! Et c'est une fonction de norme nulle : $\|O\|_p = 0$. La réciproque est presque vraie. Si une fonction f est telle que $\|f\|_p = 0$, alors f est nulle presque partout. C'est-à-dire qu'elle vaut zéro sauf sur un ensemble de mesure nulle (par exemple elle peut ne pas être nulle en un point).

Par ailleurs si $f \in L^p(I)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, αf est aussi dans $L^p(I)$ avec

$$\int_I |\alpha f(x)|^p dx \leq |\alpha|^p \int_I |f(x)|^p dx.$$

Et ainsi

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \times \|f\|_p.$$

Théorème 1.10 (Inégalité de Hölder) *Soient $p \in]1, \infty[$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, pour toutes $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$, on a*

$$\int_I |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. L'hypothèse implique que $\displaystyle\int_I |f(t)|^p dt \cdot \int_I |g(t)|^q dt < \infty$ (le résultat reste vrai sans cela, mais perd un peu d'intérêt...). D'autre part, si $\displaystyle\int_I |f(t)|^p dt \cdot \int_I |g(t)|^q dt = 0$, cela signifie que $f = 0$ ou $g = 0$ "presque partout", et donc qu'il en est de même de fg, ce qui impose que l'intégrale de droite est également nulle. On peut donc supposer que les quantité $\int_I |f(t)|^p dt$ et $\int_I |g(t)|^q dt$ sont toutes les deux non nulles et finies puis, divisant f et g par ces quantités, qu'elles sont en fait égales à 1.

De plus le logarithme étant une fonction concave, pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ on a

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b$$

inégalité qui s'étend trivialement au cas où a ou b sont nuls. On a alors pour tout $t \in I$ et en posant $a = |f(t)|^p$ et $b = |g(t)|^{1-\frac{1}{p}}$

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$

Prenant les intégrales sur I à gauche et à droite, on trouve finalement que

$$\int_I |f(t)g(t)|dt \leq \frac{1}{p}\int_I |f(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_I |g(t)|^q dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\square$

On remarquera que si $1/p + 1/q = 1$ pour $p > 1$, alors $q > 1$ aussi. L'inégalité de Hölder implique donc que si $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$ avec $1/p+1/q = 1$, alors $fg \in L^1(I)$. Donc si $p = 2$, alors $q = 2$ et ainsi le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable.

Théorème 1.11 (Inégalité de Minkowski) *Soient $f, g \in L^p(I)$. Alors $f+g \in L^p(I)$ et on a*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

Preuve. Considérons la fonction $h(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$, qui est convexe car $p \geq 1$ (sa dérivée seconde $x \mapsto p(p-1)x^{p-2}$ est positive). En particulier, on voit que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p.$$

On en déduit que pour tout $t \in I$ on a

$$|f(t)+g(t)|^p \leq (|f(t)| + |g(t)|)^p \leq 2^{p-1}\left(|f(t)|^p + |g(t)|^p\right)$$

ce qui prouve que si $\|f\|_p < \infty$ et $\|g\|_p < \infty$ alors il en est de même de $\|f+g\|_p$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p = \int_I |f(t)+g(t)|^p dt &= \int_I |f(t)+g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} dt \\
&\leq \int_I (|f(t)| + |g(t)|)|f(t)+g(t)|^{p-1} dt \\
&= \int_I |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} dt + \int_I |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} dt \\
&\overset{Hlder}{\leq} \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Passant le terme $\|f+g\|_p^{p-1}$ de l'autre côté de l'inégalité et prenant les racines p-ièmes, on obtient l'inégalité de Minkowski. $\square$

L'inégalité de Minkowski implique que $L^p(I)$ est un espace vectoriel : si f et g sont dans $L^p(I)$ et $a \in \mathbb{K}$, alors $af+g$ est aussi dans $L^p(I)$. De plus $\|\cdot\|_p$ est une norme (attention à prendre des égalités à 0 presque partout !) :

1. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
2. $\|af\|_p = |a|\|f\|_p$ pour tout $a \in \mathbb{K}$ (homogénéité).
3. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (inégalité triangulaire).

Ainsi si f et g sont dans $L^p(I)$, $\|f-g\|_p$ est la distance entre f et g.

Chapitre 2

Séries et séries de fonctions : rappels

2.1 Séries numériques

Définition 2.1 *On appelle* série à valeurs dans $\mathbb{K}$ *tout couple* $(u,\mathcal{U})$ *de deux suites d'éléments de* $\mathbb{K}$ *telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, *soit le terme général de la suite* $\mathcal{U}$, *avec* u_k *terme général de la suite* u.

En somme une série, c'est une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais à partir de laquelle on s'intéresse à une nouvelle suite, de terme général $S_n = u_0 + \ldots + u_n$, appelé somme partielle d'ordre n de la série des u_k.

Par abus de notation, on notera encore $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la *série de terme général* u_n, et par abus de langage, on parlera de la *série des* u_n sans autre précision, en sous-entendant la série de terme général u_n, donc le couple $(u,\mathcal{U})$ qui précède. À bien distinguer de la suite des u_n !

Comme pour les fonctions, si $u_n \in \mathbb{C}$, on peut l'écrire

$$u_n = a_n + ib_n$$

avec (a_n) et (b_n) à valeurs réelles. De plus la somme partielle S_n s'écrit

$$S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} b_n\right) = A_n + iB_n.$$

Donc étudier S_n est équivalent à étudier les deux suites A_n et B_n.

Définition 2.2 *Soit* u *une série de terme général* u_n. *Elle est dite* convergente, *de somme* S *si et seulement si la suite des sommes partielles* S_n *converge, avec* $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. *La somme* S *est notée*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Pour une suite à valeurs complexes S_n converge si et seulement si A_n ET B_n convergent !

La série sera dite divergente si elle ne converge pas. En cas de convergence, l'élément $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de la série.

Propriétés 2.1 *On peut faire les opérations suivantes :*

1. **Addition** *: si u et v sont deux séries convergentes de terme général u_n et v_n, alors la série de terme général $w_n = u_n + v_n$ converge. Et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
2. **Multiplication par un scalaire** *: si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série de terme général λu_n est de même nature que la série de terme général u_n. Et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

2.1.1 Un exemple : la série géométrique

On va considérer un exemple simple où on pourra calculer effectivement les sommes partielles.

Soit la série de terme général $u_n = \alpha^n$, avec α fixé dans $\mathbb{C}$. L'identité

$$1 - \alpha^{n+1} = \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n\right)(1-\alpha) \underset{\alpha \neq 1}{\Longleftrightarrow} S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

On sait que si $|\alpha| < 1$, alors $\lim_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = 0$, donc $\lim_{n\in\mathbb{N}} S_n = \frac{1}{1-\alpha}$: la série converge et on connaît sa somme, et aussi son reste d'ordre n $R_n = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

Par contre si $|\alpha| \geq 1$, la série des α^k diverge. À ce stade ce n'est pas tout à fait évident, mais on va établir un résultat qui va nous permettre de conclure. Rappelons que toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème 2.1 *Si une série de terme général u_n est convergente, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Preuve. Si la série est convergente, la suite des sommes partielles S_n est de Cauchy, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geq n_0,\ \forall q > p, |S_p - S_q| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$|u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q| \leq \varepsilon.$$

A fortiori, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $p \geq n_0$, $|u_{p+1}| \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $\lim_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$. □

Application pour la série géométrique des α^n : si $|\alpha| \geq 1$, pour tout n, $|\alpha^n| \geq 1$, donc le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge.

Remarque 2.1 Il ne suffit pas que le terme général d'une série tende vers 0 pour qu'elle converge.

Prenons par exemple la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Il tend vers 0 et pourtant la série diverge car, pour les sommes partielles, on a

$$S_{2n-1} - S_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Et si la série convergeait, en notant S sa somme, on devrait avoir

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n-1} - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Ceci est absurde !

2.1.2 Autre exemple : lien avec une suite

Soit la suite de terme général x_n. On pose $u_n = x_{n+1} - x_n$, pour tout entier naturel n, d'où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = x_{n+1} - x_0,$$

et la série des u_n converge si et seulement si la suite des x_n est convergente. En cas de convergence, on aura $S = \left(\lim_{n\to+\infty} x_n \right) - x_0$.

Ces deux exemples (séries géométriques et séries dont le terme général est la différence de deux termes consécutifs d'une suite) font partie des cas, où l'on sait calculer les sommes partielles, les restes et la somme. À ce titre ils sont à connaître parfaitement.

2.1.3 Convergence absolue

Définition 2.3 *Soit u une série de terme général u_n. Elle est dite* absolument convergente *si la série des $|u_n|$ est convergente.*

Proposition 2.1 *Pour qu'une série numérique de terme général u_n converge absolument, il faut et il suffit que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée.*

Preuve. On applique le résultat du théorème En effet, la suite réelle $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Sinon elle converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \right)$. □

Théorème 2.2 *Pour les séries numériques, la convergence absolue implique la convergence.*

Preuve. Soit la série absolument convergente de terme général u_n. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall q \geq n_0,\ \forall p \geq q,\ |u_q| + |u_{q+1}| + \ldots + |u_p| \leq \varepsilon$$

(critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la série des $|u_n|$). Donc a fortiori

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall q \geq n_0,\ \forall p \geq q,\ |u_q + u_{q+1} + \ldots + u_p| \leq \varepsilon,$$

le critère de Cauchy appliqué cette fois à la série des u_n dans $\mathbb{C}$ permet de conclure. □

La réciproque est fausse : une série peut être convergente sans l'être absolument, comme le montre le cas de la série dite harmonique de terme général réel $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. On a $|u_n| = \dfrac{1}{n+1}$, c'est le terme d'une série divergente. Donc la série des u_n n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente (cf. théorème 2.13).

Dans ce qui suit, on va pratiquement toujours chercher la convergence absolue, ceci non par masochisme, mais parce que la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ va nous permettre, pour les séries à terme positif, d'établir des critères de comparaison dont on déduira des critères de convergence.

Un dernier résultat d'ordre général avant de passer aux séries à termes positifs :

Théorème 2.3 *On ne change pas la nature (convergence ou divergence) d'une série si on en modifie un nombre fini de termes.*

Preuve. Soit une série de terme général u_n. On se donne un nombre fini, p, d'indices : $n_1, n_2, \ldots, n_p$, et on remplace u_{n_k} (pour $k = 1, \ldots, p$) par une valeur donnée a_k. Notons v la série de terme général v_n défini par $v_{n_k} = a_k$ si $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ et $v_n = u_n$ sinon.

Pour tout $n > \sup\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$, on a de manière évidente

$$V_n = U_n + \sum_{k=1}^{p} (a_k - u_{n_k})$$

donc $V_n - U_n$ est constant par rapport à $n > \sup\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$. On a donc convergence de la série des u_n si et seulement si celle des v_n converge (même équivalence pour la convergence absolue). □

2.1.4 Comparaison série-intégrale

Citons d'abord un résultat reliant intégrale généralisée et série, et reposant essentiellement sur la proposition 2.1 :

Théorème 2.4 *Soit une fonction f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. La série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve. D'abord f, montone, est intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$. Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si, avec $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe. Comme f est positive, F est croissante, donc cette limite existe si et seulement si F est bornée (et $I = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \sup\limits_{x\geq 0} F(x)$).

Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$, d'où en intégrant l'inégalité, $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$ et ainsi

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En sommant ces inégalités, et en notant $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, il vient

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leq U_n \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

Mais alors si la série des $f(n)$ converge, la suite croissante des sommes partielles U_n est majorée par une constante K, et comme pour tout $x \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \leq n+1$, on a

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq U_n \leq K.$$

Donc F étant majorée, l'intégrale impropre converge.

Réciproquement, si l'intégrale converge, F est majorée, et comme $U_n \leq f(0) + F(n)$, la suite croissante des U_n est majorée donc convergente. □

Remarque 2.2 *Le résultat reste valable si l'hypothèse devient f positive décroissante sur $[a, +\infty[$ $(a \geq 0)$, car en modifiant f sur $[0, a]$ en posant $f(x) = f(a)$ sur ce segment on retrouve le théorème 2.4 et on n'a pas modifié la nature de la série (théorème 2.3) ni l'intégrabilité (ou non) de f.*

Corollaire 2.1 *Les séries dites de Riemann, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$ et α réel, sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$ (et donc divergentes pour $\alpha \leq 1$).*

Preuve. D'abord si $\alpha \leq 0$, la suite des u_n ne converge pas vers 0, donc la série diverge (théorème 2.1). Puis si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est strictement positive décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc la série des u_n est de même nature que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$ n'a de limite en $+\infty$ que si $\alpha > 1$. $\square$

L'étude d'une série ne se borne pas à en déterminer la nature. En cas de convergence, on aime calculer la somme mais il est rare qu'on y parvienne, d'où un problème de majoration (en norme) du reste pour savoir avec quelle incertitude on connaît la somme en calculant une somme partielle. D'où l'intérêt de toute évaluation du reste.

Remarque 2.3 *En cas de convergence, on peut encadrer le reste :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f.$$

Preuve. On suppose donc qu'avec f positive décroissante de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$, la série des $f(n)$ converge, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ aussi. On veut évaluer le reste d'ordre n : $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p)$. Pour cela on utilise l'encadrement :

$$\int_p^{p+1} f(t)dt \leq f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(t)dt$$

valable si $p - 1 \geq a$ (et ceci pour $p \geq n+1$), donc finalement si $n \geq a$. Pour tout $q \geq n+1$

$$\int_{n+1}^{q+1} f(t)dt \leq \sum_{p=n+1}^{q} f(p) \leq \int_n^q f(t)dt,$$

d'où en passant à la limite si q tend vers $+\infty$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Si on note S la somme de la série et S_n la somme partielle d'ordre n, comme $R_n = S - S_n$, on a finalement

$$S_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq S \leq S_n + \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Ainsi en prenant pour valeur de S, non pas S_n, mais la moyenne arithmétiques des deux bornes, une incertitude de $\displaystyle\frac{1}{2}\int_n^{n+1} f(t)dt$. $\square$

Remarque 2.4 *En cas de divergence de la série des $f(n)$ et de l'intégrale, les quantités positives $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $F(n) = \displaystyle\int_0^n f(t)dt$ tendent vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$. Mais la suite $S_n - F(n)$ est une suite décroissante et minorée par 0, donc elle admet une limite quand n tend vers $+\infty$.*

Preuve. On suppose ici f positive décroissante sur $[0,+\infty[$. Si ce n'était vrai que sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$, on introduirait un entier $p_0 \geq a$, et on travaillerait sur les sommes $\sum_{k=p_0}^{n} f(k)$ et l'intégrale $\int_{p_0}^{n} f(t)dt$. Soit donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \quad F(n) = \int_0^n f(t)dt, \quad x_n = S_n - F(n).$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, car $x_{n+1} - x_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq 0$, puisque f décroît sur $[n, n+1]$. De plus elle est minorée :

$$\begin{aligned} x_n &= \left(f(0) - \int_0^1 f(t)dt\right) + \ldots + \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt\right) + \ldots \\ &\quad + \left(f(n-1) - \int_{n-1}^{n} f(t)dt\right) + f(n). \end{aligned}$$

C'est une somme de termes positifs (toujours par décroissance de f). Donc finalement c'est une suite décroissante et minorée par 0, donc convergente. □

Exemple 2.1 *La suite de terme général*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

admet une limite $\gamma \approx 0,571$, appelée constante d'Euler.

2.1.5 Règles de convergence pour les séries à terme général positif

Dans toute cette partie, nous nous intéressons uniquement au cas des séries de terme général positif. Nous connaissons la nature des séries géométriques et des séries de Riemann en $1/n^\alpha$. Après avoir établi des règles de comparaison, nous en déduirons des règles de convergence.

Théorème 2.5 *Soient deux séries u et v de termes généraux u_n et v_n positifs à partir d'un certain rang, et vérifiant l'inégalité $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors si u diverge, v diverge ; et si v converge, u converge.*

La phrase à partir d'un certain rang signifie : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0$...

Comme on conclut sur la nature des séries on fait la justification en supposant les u_n et v_n positifs pour tout n et l'hypothèse $u_n \leq v_n$ valable aussi pour tout n (utilisation du théorème 2.3). **Preuve.** En sommant les inégalités on obtient $U_n \leq V_n$ pour les sommes partielles. Donc si v converge, la suite des V_n est majorée, celle des U_n aussi, donc la série u converge (application de la proposition 2.1). Par contraposition si u diverge, v diverge. $\square$

Corollaire 2.2 *Soient deux séries u et v de termes généraux u_n et v_n positifs à partir d'un certain rang. S'il existe deux constantes a et b strictement positives telles que $au_n \leq v_n \leq bu_n$ à partir d'un certain rang, les deux séries sont de même nature.*

Preuve. En utilisant les propriétés 2.1, la série des u_n et celle des au_n sont de même nature. Donc si v converge, d'après le théorème précédent, celle des au_n converge, donc celle des u_n aussi ; si u converge, celle des bu_n converge, donc v converge. Ainsi les séries sont simultanément convergentes, donc aussi divergentes. $\square$

Corollaire 2.3 *Soient deux séries u et v de termes généraux u_n et v_n positifs à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$ existe avec $\lambda > 0$, les deux séries sont de même nature.*

Preuve. L'existence de la limite des u_n/v_n suppose les v_n non nuls, donc strictement positifs à partir d'un certain rang n_0.

Soit $\varepsilon \in]0, \lambda[$. Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \lambda + \varepsilon \Leftrightarrow (\lambda - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (\lambda + \varepsilon)v_n.$$

D'après le corollaire précédent, les deux séries sont de même nature. $\square$

Remarque 2.5 *Soient u_n et v_n les termes généraux postifs de deux séries u et v.*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et si v converge, la série des u_n converge ; et si u diverge, v diverge.*
2. *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, la convergence de u implique celle de v ; et la divergence de v, celle de u.*

Preuve. En effet, dans le premier cas, pour $\varepsilon = 1$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \varepsilon v_n$. Donc $0 \leq u_n \leq v_n$ et le théorème 2.5 s'applique. Dans le second cas, pour $A = 1$, il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq Av_n = v_n \geq 0$. Et là encore le théorème 2.5 s'applique. $\square$

Appliquons ce qui précède aux séries dites de Bertrand.

Théorème 2.6 (Série de Bertrand) *La série de Bertrand, de terme général positif* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *est convergente pour* $\alpha > 1$*, ou pour* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$*, divergente dans tous les autres cas.*

Preuve. Supposons $\alpha > 1$. Posons $\alpha = 1 + 2a$ avec $a > 0$. On « pique » à n^{1+2a} le terme n^a pour « effacer » le $(\ln n)^\beta$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^a(\ln n)^\beta} = 0$, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$. Donc $u_n = \dfrac{1}{n^{1+a}} \dfrac{1}{n^a(\ln n)^\beta}$ est négligeable par rapport à $\dfrac{1}{n^{1+a}}$. Comme $1 + a > 1$, la série des $\dfrac{1}{n^{1+a}}$ converge, donc aussi celle des u_n.

En revanche si $\alpha < 1$, on pose $\alpha = 1 - 2a$, avec $a > 0$. Alors $u_n = \dfrac{1}{n^{1-a}} \dfrac{n^a}{(\ln n)^\beta}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{(\ln n)^\beta} = +\infty$, et ceci pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Donc u_n est infiniment grand par rapport à $\dfrac{1}{n^{1-a}}$, terme général d'une série divergente. Donc la série des u_n diverge.

Enfin si $\alpha = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$. Si $\beta \leq 0$, $\dfrac{1}{(\ln n)^\beta} \geq 1$ dès que $n \geq 3$. Donc $u_n \geq 1/n$: la série diverge. Si $\beta > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est positive décroissante pour $t > e$, et pour $\beta \neq 1$:

$$\int_e^x f(t)dt = \frac{1}{\beta - 1}\left(1 - \frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}}\right),$$

et pour $\beta = 1$:

$$\int_e^x f(t)dt = \ln(\ln x).$$

Donc l'intégrale converge si et seulement sî $\beta > 1$. Donc la série des $f(n)$ converge si $\beta > 1$, d'après le théorème 2.4. $\square$

ùavec $\lambda > 0$. Donc $u_n \leq \lambda v_n$, et on applique le corollaire 2.2. Venons en aux **critères de convergence pour les séries à termes positifs**.

Règle de Riemann :

Théorème 2.7 *Soit une série u de terme général positif* u_n*. Supposons qu'il existe* α *réel tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda$ *avec* $\lambda > 0$*. Si* $\alpha > 1$*, la série converge, et si* $\alpha \leq 1$*, la série diverge.*

Preuve. En effet, u_n est équivalent à λ/n^α et on utilise le corollaire 2.3 et les résultats sur les séries de Riemann. $\square$

Remarque 2.6 *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, la série converge ; et s'il existe $\alpha \le 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, la série diverge.*

On applique la remarque qui suit le corollaire 2.3.

Règle de Cauchy :

Théorème 2.8 (Critère de Cauchy) *Soit une série u de terme général positif u_n. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ existe. Si $\lambda < 1$, la série converge ; si $\lambda > 1$, la série diverge ; et si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure, sauf si la limite est atteinte par valeurs supérieures, auquel cas il y a divergence.*

Preuve. Si $\lambda < 1$, avec $\varepsilon \in]0, 1-\lambda[$, il existe n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \le \lambda + \varepsilon < 1$. Donc on applique le lemme précédent. Alors que si $\lambda > 1$, en choisissant $\varepsilon \in]0, \lambda - 1[$, il existe n_1 tel que pour tout $n \ge n_1$, $\sqrt[n]{u_n} \ge \lambda - \varepsilon > 1$. Le lemme précédent s'applique encore et u_n ne tend pas vers 0. Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures alors les u_n restent supérieurs à 1 pour n assez grand : il y a divergence.

Enfin soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ (pour $n \ge 1$). On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n^{\frac{n}{\alpha}}} = e^{-\frac{\alpha}{n}\ln n}.$$

Ainsi $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 pour tout α. Or la série diverge ou converge suivant la place de α par rapport à 1. □

Remarque 2.7 *En cas de convergence, si $k \in]0, 1[$, et n_0 entier tel que $\forall n \ge n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \le k$, on peut évaluer le reste d'ordre $n \ge n_0 - 1$: $R_n \le \dfrac{k^{n+1}}{1-k}$.*

En effet pour tout $p \ge n_0$, on a $u_p \le k^p$. Donc

$$\sum_{p=n+1}^{q} u_p \le k^{n+1} + \ldots + k^q = \frac{k^{n+1} - k^{q+1}}{1-k}.$$

Si q tend vers $+\infty$, on a $R_n \le \dfrac{k^{n+1}}{1-k}$. Une telle majoration permet de trouver n pour avoir une incertitude connue.

Règle de d'Alembert :

Théorème 2.9 (Règle de d'Alembert) *Soit une série de terme général u_n strictement positif à partir d'un certain rang, et telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Si $\lambda < 1$, la série converge ; si $\lambda > 1$, elle diverge. Si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure, sauf si la limite est atteinte par valeurs supérieures, auquel cas il y a divergence.*

Preuve. Si $\lambda < 1$, avec $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon = k < 1$, et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda + \varepsilon = k < 1$, le lemme qui précède permet de conclure.

Si $\lambda > 1$, avec $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda - \varepsilon \geq 1$, et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda - \varepsilon \geq 1$, il y a divergence car u_n ne tend pas vers 0.

Si $\lambda = 1$, la limite étant atteinte par valeurs supérieures, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $1 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 + \varepsilon$. On conlcut à la divergence, encore par le lemme précédent.

Si $\lambda = 1$, l'exemple de $u_n = 1/n^\alpha$, qui donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$, montre que suivant les valeurs de α, il y aura convergence ou divergence. □

Attention aux points suivants

1. Il ne suffit pas d'avoir $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n assez grand pour conclure à la convergence.

   Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n+2} < 1$, et pourtant la série diverge.
2. Toutes ces conditions sont des conditions **suffisantes** de convergence ou de divergence.

Exemple 2.2 *Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $u_{2n} = a^n b^n$ et $u_{2n+1} = a^{n+1} b^n$. Si $a \geq 1$ et $ab < 1$ (exemple : $a = 3$, $b = 1/4$), alors la série de terme général u_n converge, bien que pour une infinité d'indices $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.*

Preuve. Si on forme le rapport u_{p+1}/u_p, il prend deux formes suivant la parité de p :

$$\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a, \quad \frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b.$$

Donc si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, la série diverge. Si $a < 1$ et $b < 1$, la série converge puisque pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k = \max(a, b) < 1$.

Mais si $a \geq 1$ et $b < 1$, ou si $a < 1$ et $b \geq 1$, on ne peut conclure par cette méthode. Or $(u_{2p})^{\frac{1}{2p}} = \sqrt{ab}$ et $(u_{2p+1})^{\frac{1}{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}}$ tend vers $\sqrt{ab}$ si p tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$. Le critère de Cauchy permet de conclure : si $ab < 1$, convergence, si $ab > 1$, divergence, et si $ab = 1$, alors $u_{2n} = 1$ pour tout n, donc la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0. □

Remarque 2.8 *Évaluation du reste d'ordre n, en cas de convergence. Supposons trouvés $k \in]0, 1[$ et n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$. Alors pour $n \geq n_0$, $R_n \leq \dfrac{k u_n}{1-k}$. Ou encore $R_n \leq \dfrac{k^{n-n_0+1}}{1-k} u_{n_0}$.*

Supposons trouvés $k \in]0,1[$ et n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$. On a donc

$$u_{n+1} \leq k u_n,\ u_{n+2} \leq k^2 u_n,\ \ldots\ ,\ u_{n+p} \leq k^p u_n,$$

donc

$$R_n = \sum_{p=1}^{q} u_{n+p} \leq u_n(k + k^2 + \ldots + k^q) \leq k u_n \frac{1-k^q}{1-k} \leq \frac{k u_n}{1-k}.$$

Si on veut, sans calculer les u_n, estimer le nombre de termes à calculer pour obtenir une incertitude donnée, avec les mêmes hypothèses on a

$$u_{n+1} \leq k^{n-n_0+1} u_{n_0}, \ldots, u_{n+p} \leq k^{n-n_0+p} u_{n_0},$$

ce qui conduit à $R_n \leq \dfrac{k^{n-n_0+1}}{1-k} u_{n_0}$.

Pour les règles de Cauchy ou de d'Alembert, il y a une difficulté quand la limite vaut 1. Or

Théorème 2.10 *Soit une suite de nombres strictement positifs a_n. Si*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

existe dans $[0, +\infty]$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ aussi.

Donc si on ne conclut pas grâce à d'Alembert, inutile d'appeler Cauchy à la rescousse, et si on ne conclut pas avec Cauchy, d'Alembert ne pourra rien car les $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'auront pas de limite, ou auront 1 pour limite.

Preuve. Supposons d'abord que $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda - \varepsilon \geq 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \lambda - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

Le produit terme à terme de ces inégalités entre nombres positifs, pour n variant de n_0 à $p > n_0$ donne

$$(\lambda - \varepsilon)^{p-n_0+1} \leq \frac{a_{p+1}}{a_{n_0}} \leq (\lambda + \varepsilon)^{p-n_0+1},$$

d'où

$$(\lambda - \varepsilon)^{p+1} \frac{a_{n_0}}{(\lambda - \varepsilon)^{n_0}} \leq a_{p+1} \leq (\lambda + \varepsilon)^{p+1} \frac{a_{n_0}}{(\lambda + \varepsilon)^{n_0}},$$

puis

$$(\lambda - \varepsilon) \left(\frac{a_{n_0}}{(\lambda - \varepsilon)^{n_0}} \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq (a_{p+1})^{\frac{1}{p+1}} \leq (\lambda + \varepsilon) \left(\frac{a_{n_0}}{(\lambda + \varepsilon)^{n_0}} \right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Le minorant tend vers $\lambda - \varepsilon$, tandis que le majorant tend vers $\lambda + \varepsilon$. Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$\lambda - 2\varepsilon \leq (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

Si $\lambda = 0$, on part de $0 \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varepsilon$. On effectue le même travail, les termes inférieurs de la double inégalité étant toujours nuls, on arrive à $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

Si $\lambda = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $A \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. On a le point de départ où A remplace $\lambda-\varepsilon$, et sans $\lambda+\varepsilon$ en majorant. Le même travail conduit à

$$A\left(\frac{a_{n_0}}{A^{n_0}}\right)^{\frac{1}{p+1}} \leq (a_{p+1})^{\frac{1}{p+1}},$$

valable pour tout $p > n_0$. Le minorant tend vers A, donc devient supérieur à $A-1$ pour p assez grand, i.e.

$$\forall A,\ \exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ A-1 \leq \sqrt[n]{a_n},$$

ce qui prouve bien que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$. □

2.1.6 Règles de convergence des séries à valeurs complexes

Pour une série u de terme général u_n, on peut appliquer toutes les règles de la section 2.1.5 qui précède, à la série de terme général positif $|u_n|$. Si cette dernière converge, ceci signifie que la série u converge absolument et donc converge.

On a même légèrement mieux.

Théorème 2.11 (Règle de Cauchy) *Soit une série u de terme général u_n. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$ existe. Si $\lambda < 1$, la série converge absolument ; si $\lambda > 1$, la série diverge ; et si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure, sauf si la limite est atteinte par valeurs supérieures, auquel cas il y a divergence.*

Le seul point à justifier, c'est la divergence quand $\lambda > 1$ ou quand $\lambda = 1$ par valeurs supérieures. Or dans ce cas (voir la démonstration du théorème 2.8), $|u_n|$ ne tend pas vers 0, donc u_n non plus, d'où la divergence.

Théorème 2.12 (Règle de d'Alembert) *Soit une série de terme général u_n non nul à partir d'un certain rang, et telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lambda$. Si $\lambda < 1$, la série converge absolument ; si $\lambda > 1$, elle diverge. Si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure, sauf si la limite est atteinte par valeurs supérieures, auquel cas il y a divergence.*

Passons maintenant au cas des séries semi-convergentes. Traitons d'abord le type particulier des séries convergentes alternées.

Définition 2.4 *Une série u réelle est dite* alternée *si son terme général peut s'écrire $u_n = (-1)^n a_n$ avec les a_n tous positifs (ou les a_n tous négatifs).*

Théorème 2.13 (Règle des séries alternées) *Soit une série alternée dont le module du terme général tend vers 0 en décroissant. Alors la série converge.*

Preuve. Le cas $u_n = (-1)^n a_n$, avec des a_n tous négatifs, se ramène au cas des a_n tous positifs en changeant u en $-u$; aussi suppose-t-on que u a son terme général sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$, avec les $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leq a_n$.

On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

et

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} + u_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

La suite des S_{2n} est décroissante, minorée car

$$S_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0$$

comme somme de termes positifs, elle converge donc : soit $S' = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$.

La suite des S_{2n+1} est croissante, majorée car

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} \leq a_0$$

puisque a_{2n+1} et les $a_{2k-1} - a_{2k}$ sont positifs. Elle converge donc : soit $S'' = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}$.

Comme on a $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ qui tend vers 0, on a $S' = S'' = \lim_{n\to+\infty} S_n$. □

Quand une série alternée converge suivant son critère, on dispose d'un encadrement facile du reste.

Théorème 2.14 *Soit une série alternée u qui converge suivant le critère des séries alternées, et n_0 tel que pour $n \geq n_0$ le module du terme général décroisse. Pour $n \geq n_0$, le reste d'ordre n de la série est du signe du premier terme négligé, majoré en module par la valeur absolue du premier terme négligé.*

Il faut comprendre que le module du terme général peut commencer par ne pas décroître, d'ailleurs la série peut être alternée uniquement à partir d'un certain rang. On adapte en conséquence la justification du théorème 2.13.

Preuve. Supposons donc que u_n s'écrive $(-1)^n a_n$, pour $n \geq n_0$, avec les a_n positifs décroissants. On aura encore $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ si $2n+1 \geq n_0$, d'où la croissance de la suite des S_{2n}, et avec $2p_0 \geq n_0$, on aura si $2n \geq 2p_0$:

$$S_{2n} = S_{2p_0-1} + (a_{2p_0} - a_{2p_0+1}) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq S_{2p_0-1}.$$

La suite des S_{2n} est décroissante minorée, on aurait de même la suite des S_{2n+1} croissante majorée, et avec S somme de la série on a donc pour tout n tel que $2n \geq n_0$, l'encadrement

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Mais alors, $R_{2n} = S - S_{2n}$ est négatif, donc du signe de $u_{2n+1} = -a_{2n+1}$ et

$$S_{2n} - S = |R_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|.$$

L'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ conduirait de même à

$$0 \leq S - S_{2n+1} = R_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}.$$

$\square$

Cette évaluation du reste est fondamentale dans les séries alternées.

2.1.7 Méthodologie

Comme pour les intégrales, voici la feuille de route à adopter pour étudier la nature d'une série de terme général u_n.

1. On commence par vérifier rapidement que la suite (u_n) est bien définie (au besoin en supprimant les premières valeurs de n). Par exemple, $u_n = \ln(\ln n)$ n'est définie que pour $n \geq 2$. Si la série est géométrique, on fait toute l'étude directement (convergence ou divergence, reste d'ordre n, somme).
2. Ensuite on détermine le signe de u_n. S'il n'est pas toujours positif (ou toujours négatif), on **commence** par étudier la série de terme général $v_n = |u_n|$.
3. On applique à la série des v_n les règles de comparaison ou de convergence. Si on peut conclure que cette série converge, alors la série des u_n converge absolument. De plus, si c'est possible on donne une estimation du reste d'ordre n de la série.
4. S'il y a divergence de la série des v_n, alors (et **seulement après** l'étude de la série des v_n) on essaie d'utiliser la règle des séries alternées.

Voici un exemple. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n2^n}$.

1. Le terme général u_n est bien défini pour $n \geq 1$. Ce n'est pas une série géométrique.
2. C'est une série alternée. Soit $v_n = |u_n| = \dfrac{1}{n2^n}$.
3. On applique la règle de d'Alembert à la série des v_n (les v_n sont tous positifs et non nuls pour $n \geq 1$ donc la règle peut être appliquée) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

   Donc la série des u_n converge absolument. Par ailleurs il existe n_0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \dfrac{3}{4} = k < 1$. Donc

$$|R_n| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_p| \leq 3|u_n| = \frac{3}{n2^n}.$$

2.2 Séries de fonctions

Soient I un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle) et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble $\mathbb{K}^I$ des applications de I dans $\mathbb{K}$ et on appelle suite de fonctions de E dans $\mathbb{K}$, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}^I$.

Le terme général f_n de cette suite est donc une application de I dans $\mathbb{K}$, qui est connue lorsque l'on sait définir chaque $f_n(x)$ pour x variant dans I.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut écrire $f_n(x) = a_n(x) + ib_n(x)$, et on se ramène à deux suites de fonctions à valeurs réelles.

Définition 2.5 (Convergence simple) *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *dans* $\mathbb{K}$*. On dit que la suite des* f_n converge simplement *vers la fonction* f *de* I *dans* $\mathbb{K}$*, si et seulement si, pour chaque* x_0 *de* I*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$*.*

Il convient de remarquer que la lettre f désigne un élément de $\mathbb{K}^I$, c'est-à-dire une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Cette fonction est appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Un principe : la convergence simple est facile à mettre en place, mais elle ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, dérivabilité, bornitude, intégrabilité, etc.

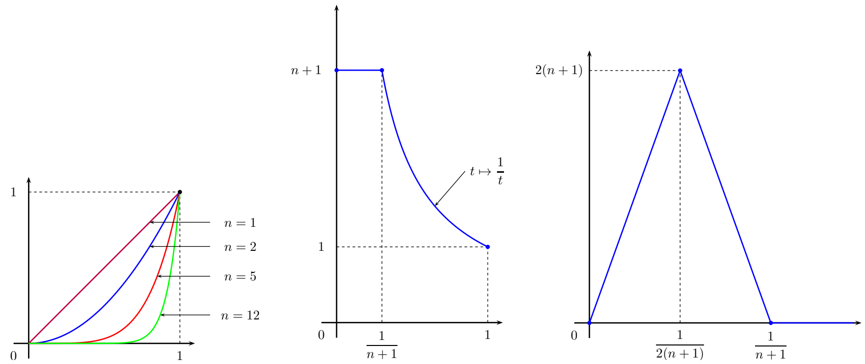
Exemple 1 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$. La suite réelle $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $|x| < 1$, vers 1 si $x = 1$, et diverge si $x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur l'intervalle $E =]-1, 1]$ vers la fonction $f :]-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$. Donc on constate que *les* f_n *sont continues, mais que leur limite au sens de la convergence simple ne l'est pas.*

Exemple 2 : Soit $I =]0, 1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On définit f_n par $f_n(t) = n + 1$ sur $\left]0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ et $f_n(t) = \dfrac{1}{t}$ sur $\left[\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$. Pour chaque $x \in]0, 1]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0+1} \leq t_0$, donc pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$. Il y a convergence simple de la suite des f_n vers la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = 1/x$. On peut remarquer que *chaque* f_n *est bornée, mais que la limite au sens de la convergence simple ne l'est pas.*

Exemple 3 : Soit $I = [0, 1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On définit f_n sur $[0, 1]$ par

$$\begin{aligned}
&f_n(t) = 4(n+1)^2 t && \text{sur } \left[0, \frac{1}{2(n+1)}\right], \\
&f_n(t) = -4(n+1)^2 \left(t - \frac{1}{2(n+1)}\right) + 2(n+1) && \text{sur } \left[\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{n+1}\right], \\
&f_n(t) = 0 && \text{sur } \left[\frac{1}{n+1}, 1\right].
\end{aligned}$$

Comme $u_n(0) = 0$ pour tout n, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = 0$. Pour $x_0 > 0$, il existe n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0+1} \leq t_0$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$. La suite des f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$. Cette fonction f, ainsi que chaque f_n, sont intégrables. Mais $\displaystyle\int_0^1 f_n = 1$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Donc $\displaystyle\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 (\lim u_n)$.



Exemple 1 **Exemple 2** **Exemple 3**

Ainsi la convergence simple est facile à exprimer mais elle ne préserve pas la continuité, ni le fait d'être borné, ou intégrable. Il faut donc définir un autre mode de convergence, ce sera la *convergence uniforme.*

Définition 2.6 (Convergence uniforme)
Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément *vers une fonction* f *de* I *dans* $\mathbb{K}$ *si et seulement si on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Une remarque s'impose : si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on aura en particulier pour chaque $x \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N(\varepsilon),\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon;$$

d'où la convergence simple des f_n vers f. De plus, la relation (2.1) est équivalente à :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = 0. \tag{2.2}$$

Proposition 2.2 *Pour que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément dans une partie* X *de* I *(*X *non vide), il faut et il suffit que*

1. *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f *dans* X*,*
2. *il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels convergeant vers 0 et un* $N \in \mathbb{N}$ *tels que pour tout* $n \geq N$*, et tout* $x \in X$*,* $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$*.*

Remarque 2.9 *La recherche d'une éventuelle convergence uniforme se fait souvent en deux temps. L'étude de* $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$*, au sens de la convergence simple, permet de déterminer la fonction* f *vers laquelle il peut y avoir convergence uniforme. Puis l'étude des variations de* $f - f_n$ *permer de déterminer* $\|f - f_n\|_\infty$*, ou un majorant, pour mettre en évidence une éventuelle convergence vers 0 de cette norme.*

La série de fonctions de terme général f_n est définie par la donnée de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où f_n est une fonction de I dans $\mathbb{K}$, à laquelle est associée la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$.

Définition 2.7 *On dit que la série des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge simplement *(resp.* uniformément*) vers une fonction somme S si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) vers S.*

Notons que la convergence uniforme de la série de fonctions revient à avoir une fonction reste d'ordre n de la série $R_n = S - S_n$ bornée pour tout n assez grand et la suite réelle $(\sup_{x\in E} |R_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

L'étude des séries montre que l'on peut parler de convergence absolue pour une série de vecteurs de $\mathbb{K}$.

Définition 2.8 *Soit une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, de terme général f_n. On dira qu'il y a convergence* absolue simple *(resp.* absolue uniforme*) si la série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par $t \mapsto |f_n(t)|$ converge simplement (resp. uniformément).*

On montre que la convergence absolue simple (resp. uniforme) entraîne la convergence simple (resp. uniforme) de la série de fonctions. Nous allons introduire un nouveau type de convergence : la convergence normale.

Définition 2.9 (Convergence normale) *Soit un ensemble I non vide. On dit qu'une série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{K}$* converge normalement *si et seulement s'il existe une série de terme général réel positif α_n convergente, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in I$, $|f_n(t)| \leq \alpha_n$.*

Proposition 2.3

$$\begin{aligned} &\textit{Convergence normale} \Longrightarrow \textit{convergence absolue uniforme} \\ \Longrightarrow\ &\textit{convergence uniforme} \Longrightarrow \textit{convergence simple.} \end{aligned}$$

Remarque 2.10 *On peut avoir :*

— *convergence absolue simple, sans convergence absolue uniforme ;*
— *convergence uniforme sans convergence absolue ;*
— *convergence absolue uniforme mais pas convergence normale.*

Exemple : $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. La série géométrique de raison z est divergente si $|z| \geq 1$ (alors $\lim_{n\to+\infty} |z^n| \geq 1$), et absolument convergente si $|z| < 1$ (règle de Cauchy). La série de fonctions f_n est donc absolument simplement convergente dans le disque unité ouvert $D_1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

Si $z \in D_1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ et $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$. Donc $S(z) = \dfrac{1}{1 - z}$.

La convergence de la série n'est pas uniforme dans D_1 : pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D_1$,

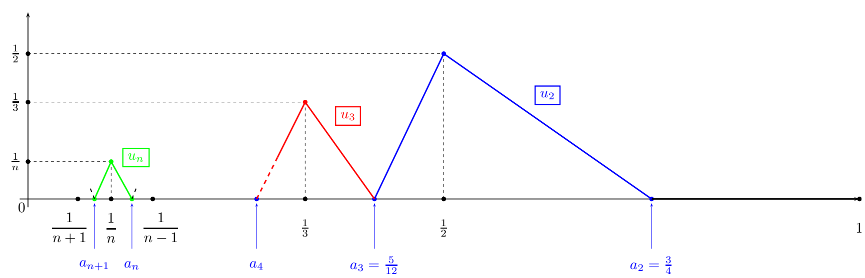
$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|} = R_n(|z|).$$

Or $\lim_{|z|\to 1} R_n(|z|) = +\infty$, donc il n'y a pas convergence (absolue) uniforme.

La convergence de la série est normale dans $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r\}$, pour tout $r \in]0,1[$. En effet, pour tout $z \in \overline{D_r}$, $|f_n(z)| \leq r^n$.
Cet exemple montre qu'*on peut avoir convergence absolue non uniforme*.
De même, *on peut avoir convergence uniforme sans convergence absolue*. Par exemple, pour I quelconque et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on définit les fonctions constantes f_n par $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Il y a convergence, uniforme en t puisque f_n est indépendante de t, mais pas convergence absolue.
Enfin *on peut avoir convergence absolue uniforme mais pas convergence normale*. L'idée, avec $I = [0,1]$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est de partir d'une fonction S à valeurs positives, avec une suite de maxima, et de fractionner son support. Pour cela, on va définir f_n affine par morceaux, pour $n \geq 2$, valant $\dfrac{1}{n}$ en $\dfrac{1}{n}$ et nulle sur

$$\left[0, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right), 1\right].$$

On posera $f_0 = f_1 = 0$. Alors la norme infinie de f_n existe et $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 2$.



Si on définit S sur $[0,1]$ par $S(0) = 0$ et par sa restriction à

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

égale à la restriction de f_n à ce même segment. En notant S_N la somme partielle des f_n, on a $S - S_N$ est la fonction nulle sur $\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N+1}\right), 1\right]$ $(N \geq 2)$, et égale à S sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N+1}\right)\right]$. Donc $\|S - S_N\|_\infty \leq \dfrac{1}{N+1}$.
Il y a donc convergence uniforme, absolue (car les fonctions sont à valeurs positives), mais pas normale vue la valeur de $\|f_n\|_\infty$.
On peut enfin remarquer que

Théorème 2.15 *soit une série de fonctions de terme général f_n. La convergence normale équivaut à l'existence de chaque $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} |f_n(t)|$, et à la convergence de la série numérique des $\|f_n\|_\infty$.*

Méthodologie En pratique, on commence par fixer x dans I et par montrer que la série de fonctions converge simplement. Il vaut mieux d'abord utiliser les critères de convergence absolue, c'est-à-dire prendre pour terme général $|f_n(x)|$. Remarquons que s'il n'y a pas convergence absolue simple, il ne peut pas y avoir convergence normale, ni convergence absolue uniforme.

1. S'il y a convergence absolue simple,
   (a) on essaie de prouver ensuite qu'il y a convergence normale, en calculant, ou, à défaut en majorant, $\|f_n\|_\infty$, par l'étude des variations de f_n sur I.
   (b) S'il n'y a pas convergence normale, il faut prouver qu'il y a convergence absolue uniforme. Dans ce cas l'exercice sera guidé.
2. S'il n'y a que convergence simple sans convergence absolue, il faut prouver qu'il y a convergence uniforme ; dans ce cas aussi l'exercice sera guidé.

Enfin une technique pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme, consiste à contredire la conclusion des résultats du paragraphe suivant.

2.2.1 Propriétés de la convergence normale pour les séries de fonctions

Les résultats qui suivent vont être énoncés avec l'hypothèse de convergence normale, car c'est le critère le plus simple à utiliser. Mais on peut remplacer partout « normalement convergente » par « uniformément convergente ».

Théorème 2.16 *On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités α et β, avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction définie sur I. De plus la série des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers S dans I. Si $a \in I \cup \{\alpha, \beta\}$, et si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$, où $b_n \in \mathbb{K}$, alors la série de terme général b_n converge et sa somme est la limite de S en a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{\substack{x\to a \\ \neq}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x\to a \\ \neq}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right).$$

Corollaire 2.4 *S'il existe un a, $a \in I$ en lequel pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, alors la somme S de la série de terme général f_n est continue en a.*

Théorème 2.17 *Si f_n est le terme général d'une série de fonctions continues sur un intervalle réel I et si la série converge normalement, alors la somme S est continue.*

Grâce à la linéarité de l'intégrale, on a

Théorème 2.18 *Soit une série de fonctions f_n continues sur $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$, qui converge normalement sur $[a, b]$. La fonction somme S est continue et on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Et on peut étendre ce résultat au cas d'intégrales impropres sur un intervalle borné :

Théorème 2.19 *Soient des fonctions f_n de $[a,b[$ intervalle borné de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f_n soit continue et intégrable sur $[a,b[$. Si la série des f_n converge normalement sur $[a,b[$, sa fonction somme est intégrable sur $[a,b[$ et :*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

Enfin on ne peut pas dériver la fonction somme d'une série, même normalement convergente ! Mais on pourra quand même dériver terme à terme une série grâce au théorème suivant :

Théorème 2.20 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Si la série des f'_n converge normalement, et si la série des $f_n(x)$ converge pour une valeur x_0 de la variable, alors la série des f_n converge normalement, sa fonction somme est de classe C^1 et*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

2.2.2 Applications de la convergence monotone et dominée

Nous allons appliquer les théorèmes 1.5 et 1.6 aux cas des séries de fonctions.

Théorème 2.21 (Convergence monotone) *Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Si*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive et intégrable sur I ;*
2. *la série des f_n converge simplement sur I vers $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;*

alors f est intégrable sur I si et seulement si la série des $\left(\displaystyle\int_I f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus dans ces conditions :

$$\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Preuve. En effet comme $f_n \geq 0$, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est une suite croissante et on applique le théorème 1.5 à la suite S_n. $\square$

Théorème 2.22 (Convergence dominée) *Soit $(f_n : I \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Si*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;*

2. la série des f_n converge simplement sur I vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;

3. la série des $\int_I |f_n|$ converge ;

alors f est intégrable sur I, et :

$$\int_I |f| = \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|;$$

$$\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Preuve. Posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$. On peut utiliser le théorème précédent pour obtenir que $g \in L^1(I)$. De plus pour tout $x \in I$ et tout entier n :

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq g(x).$$

On peut alors appliquer le théorème 1.6. $\square$

L'avantage de ce résultat est de pouvoir intervertir intégrale et somme juste avec convergence simple et étude de la série numérique des $u_n = \int_I |f_n|$, sans se préoccuper de convergence normale (ou uniforme).

Chapitre 3

Séries de Fourier

3.1 Espaces de fonctions

Dans la suite on notera $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et :

— $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

— $C^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues de classe C^k, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

— $C_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

— $C^k_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues de classe C^k par morceaux, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

On renvoie à la définition 1.1 pour la notion de continuité par morceaux.

Si $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $L^p_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et Lebesgue-mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$ avec

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

On a pour $1 \leq p < q \leq \infty$, les inclusions suivantes

$$C_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset L^q_{2\pi} \subset L^p_{2\pi}.$$

Proposition 3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique dont $T > 0$ est une période. Pour que f soit C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'existe un segment $J = [a, a+T]$ de longueur T tel que $f|_J$ le soit.*

Rappelons aussi que si f est une fonction T périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, alors si J est un segment de longueur T, on a :

$$\int_J f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Proposition 3.2 *Soit $T > 0$ un réel et g une fonction de classe C^k par morceaux sur un segment $[a, a+T]$ de longueur T, à valeurs complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} g(x - kT) & si\ a + kT < x < a + (k+1)T, \\ \lambda & si\ x \in a + T\mathbb{Z}, \end{cases}$$

est T-périodique, de classe C^k par morceaux. De plus, sur tout segment J de longueur T, on a :

$$\int_J f(x)dx = \int_a^{a+T} g(x)dx.$$

On peut donc définir une fonction C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique, par la donnée de sa restriction à un segment de longueur T.

Enfin si f est une fonction T-périodique, alors la fonction g définie par $g(x) = f(Tx/(2\pi))$ est 2π-périodique :

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x).$$

Inversement si g est 2π-périodique, alors $f(x) = g(2\pi x/T)$ est T-périodique. Donc **à une transformation près, on peut toujours se ramener au cas des fonctions 2π-périodiques**.

3.2 Séries trigonométriques

3.2.1 Rappels sur les sinus et cosinus

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ non nul et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $t \mapsto \sin n\omega t$ et $t \mapsto \cos n\omega t$ sont définies sur tout $\mathbb{R}$, continues et même C^∞. De plus, elles sont $\frac{2\pi}{\omega}$-périodiques et, pour $n \neq 0$ fixé, $\sin(n\omega t)$ et $\cos(n\omega t)$ sont $\frac{2\pi}{n\omega}$-périodiques.

Ces fonctions sont les objets centraux de la théorie des séries de Fourier. On rappelle que, si $n \neq 0$,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin n\omega t dt = \left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos n\omega t dt = \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

On utilise souvent les formules complexes $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ qui permettent de simplifier les calculs. Les résultats ci-dessus se reformule alors sous la forme

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{in\omega t} dt = \frac{1}{in\omega}[e^{in\omega t}]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

si $n \neq 0$ et si $n = 0$ alors

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{in\omega t} dt = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt + i\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt =$$
$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{int}\cos(m\omega t)dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{in\omega t}\frac{e^{im\omega t}+e^{-im\omega t}}{2}dt =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i(n+m)\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i(n-m)\omega t}dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \frac{\pi}{\omega} \text{ sinon} \end{cases}$$

En résumé, on trouve que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ on a, en regardant la partie réelle

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \frac{\pi}{\omega} \text{ sinon} \end{cases}$$

et en regardant la partie imaginaire

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$$

Exercice 3.1 *Calculer, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, les quantités $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt$.*

Nous nous limiterons dans la suite à $\omega = 1$, mais toute la théorie peut être faite dans le cas général en prenant bien garde au facteur $\frac{1}{\omega}$ qui doit apparaître dans certains calculs. On peut toutefois s'y ramener par le changement de variable $x \mapsto \frac{x}{\omega}$.

3.2.2 Sommes trigonométriques et séries

Donnons nous deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous souhaitons étudier les séries de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$. Les sommes partielles de cette séries

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Écrivant $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n+ib_n}{2}$ de sorte que $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = c_n - c_{-n}$ on peut écrire ces sommes partielles sous la forme

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Théorème 3.1

1. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ converge, alors la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$, et la somme f de la série est une fonction continue de période 2π.*

2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|)$ *converge alors* f *est continument dérivable et la série dérivée terme à terme converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *vers* f'*.*
3. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\ell}(|a_k| + |b_k|)$ *converge alors* f *est* ℓ *fois continument dérivable et la série dérivée* ℓ*-ième terme à terme converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *vers* $f^{(\ell)}$*.*

En particulier, si la série converge uniformément (par exemple si elle converge normalement) alors on a

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos mt + b_m \sin mt \right) \cos(nt)dt =$$
$$\overset{C.U.}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_m \int_0^{2\pi} \cos mt \cos(nt)dt + b_m \int_0^{2\pi} \sin mt \cos(nt)dt \right) = a_n \pi$$

et de même on voit que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = b_n \pi.$$

On peut également montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

3.3 Coefficients de Fourier

3.3.1 Coefficients de Fourier des fonctions périodiques

Définition 3.1 (Coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodiques) *Soit* f *une fonction dans* $L^1_{2\pi}$ *; si* $k \in \mathbb{Z}$*, on pose :*

$$\boxed{\hat{f}(k) = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt} \; ,$$

qui s'appelle coefficient de Fourier exponentiel d'indice k *de* f*.*

Définition 3.2 *Sous les hypothèses précédentes, on définit aussi pour* $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt} \; ,$$

qui s'appellent coefficients de Fourier trigonométriques d'indice n *de* f*.*

Il vient alors, pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_0(f) &= \frac{a_0(f)}{2}, \qquad & b_0(f) &= 0, \\ c_k(f) &= \frac{1}{2}\left[a_k(f) - ib_k(f)\right], \qquad & c_{-k}(f) &= \frac{1}{2}\left[a_k(f) + ib_k(f)\right], \\ a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad & b_n(f) &= i\left[c_n(f) - c_{-n}(f)\right]. \end{aligned}$$

Définition 3.3 (Coefficients des fonctions T-périodiques) *Soit une fonction f à valeurs complexes, T-périodique, dans L^1_T. La fonction g définie par :*

$$x \mapsto f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

est alors 2π-périodique et dans $L^1_{2\pi}$. Les coefficients de Fourier de f sont, par définition, ceux de g.

Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2\pi i\frac{kx}{T}}dx},$$

et de manière analogue :

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx.$$

Ou encore

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx.$$

Dans la suite, on travaillera avec les fonctions 2π-périodiques, le changement de variable $t = \dfrac{2\pi x}{T}$ permettant de s'y ramener.

Proposition 3.3 *Si f est une fonction de $L^1_{2\pi}$, les fonctions*

$$\bar{f},\ g : t \mapsto f(-t),\ \text{et, pour } a \in \mathbb{R},\ f_a : t \mapsto f(t+a),$$

le sont également et

- *pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(\bar{f}) = \overline{c_{-k}(f)}$.*
- *Si f est à valeurs réelles, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.*
- *De plus $c_k(g) = c_{-k}(f)$, $a_n(g) = a_n(f)$ et $b_n(g) = -b_n(f)$.*
- *Si f est paire (resp. impaire), les $b_n(f)$ (resp. les $a_n(f)$) sont tous nuls.*
- *Enfin $c_k(f_a) = e^{ika}c_k(f)$.*

Il résulte de tout cela qu'il est préférable, lorsque la fonction est paire (resp. impaire) de travailler avec les coefficients de Fourier en cosinus (resp. en sinus). En revanche, lorsque la fonction est à valeurs réelles, il n'est pas a priori plus simple de travailler avec ces coefficients bien qu'ils soient réels. Il conviendra de s'adapter suivant les cas.

Proposition 3.4 *L'application $\mathcal{F}$ de l'espace vectoriel $L^1_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie par :*

$$f \mapsto \hat{f}$$

est linéaire. La suite $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et :

$$\|\hat{f}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Remarque 3.1 *Résultat analogue avec les fonctions continues par morceaux.*

Il est en général difficile de prédire précisément le comportement des coefficients de Fourier. Toutefois, on sait que sous des hypothèses relativement minimales ils doivent tendre vers 0.

Théorème 3.2 (Riemann-Lebesgue) *Soit f intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\lim_{s\to\pm\infty} \int_I f(t)e^{ist}dt = 0.$$

Prenant s entier, on trouve ainsi que les c_n, ou de manière équivalente les a_n et b_n, tendent vers 0.

Preuve. On se contente de démontrer ici le cas où f est continument dérivable sur un compact $I = [a, b]$ (le cas général est plus compliqué !).

En effectuant une intégration par partie, on trouve que

$$\int_I f(t)e^{ist}dt = \frac{i}{s}f(b)e^{isb} - \frac{i}{s}f(a)e^{isa} - \frac{i}{s}\int_I f'(t)e^{ist}dt$$

et chacun des termes tends vers 0 lorsque s tend vers $\pm\infty$.

La démonstration ci-dessus fonctionne également s'il n'y a qu'un nombre fini de points en lesquels la fonction n'est pas continument dérivable, quitte à passer par des ε, puis par extension pour toute fonction intégrable. □

Proposition 3.5 (Coefficients de Fourier d'une dérivée) *Soit une fonction f, 2π-periodique,* **continue, de classe C^1 par morceaux sur** $\mathbb{R}$, *à valeurs complexes. Alors, si $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\boxed{c_k(f') = ikc_k(f)}\ .$$

Si f est **de classe C^{p-1} sur $\mathbb{R}$ et de classe C^p par morceaux sur** $\mathbb{R}$, *alors*

$$c_k(f^{(p)}) = (ik)^p c_k(f).$$

En particulier, dans ce cas,

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{|k|^p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(t)|dt\right). \tag{3.1}$$

Il faut avoir constamment à l'esprit que la relation $c_k(f^{(p)}) = (ik)^p c_k(f)$ provient de l'égalité : $\displaystyle\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a)$. Valable pour une fonction u continue et C^1 par morceaux et qui est fausse lorsque u n'est plus continue (les sauts de u en ses points de discontinuité interviennent alors).

Les relations de domination (3.1) sont importantes car elles permettent, entre autre, de justifier la dérivation terme à terme de la série de Fourier d'une fonction f (par exemple, si on cherche une solution périodique d'une équation différentielle sous forme de la somme de sa série de Fourier).

3.3.2 Sommes partielles d'une série de Fourier

Définition 3.4 *Soit f une fonction dans $L^1_{2\pi}$. Pour tout entier naturel p, la somme :*

$$S_p(f)(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

est appelée somme partielle de rang p de la série de Fourier de f au point x.

Si la suite $(S_p(f)(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série de Fourier de f est dite convergente au point x et sa somme est par définition : $\lim_{p\to\infty} S_p(f)(x)$.

Remarque 3.2 *Le coefficient $c_0(f) = a_0(f)/2$ représente* la valeur moyenne de f sur un intervalle de periode.

Attention : si les deux séries $\sum_{k\geq 1} c_{-k}(f)e^{-ikx}$ et $\sum_{k\geq 0} c_k(f)e^{ikx}$ convergent, la série de Fourier converge au point x et

$$\lim_{p\to\infty} S_p(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(f)e^{-ikx} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}.$$

Mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.1 *Étude en 0 de la somme partielle de la série de Fourier de la fonction f définie par*

$$f(x) = x - \pi \text{ sur }]0, 2\pi[, \quad \text{et } f(0) = 0$$

et prolongée par 2π-périodicité. Elle est impaire et on trouve

$$b_n(f) = -\frac{2}{n}, \quad c_k(f) = \frac{i}{k}.$$

Dans cet exemple, pour $x = 0$, les deux séries $\sum_{k\geq 1} c_{-k}(f)$ et $\sum_{k\geq 0} c_k(f)$ divergent (série de Riemann). Pourtant on verra (théorème 3.7 de Dirichlet) que

$$\lim_{p\to\infty} S_p(f)(0) = f(0) = 0.$$

Le problème est donc de savoir

- si la série converge simplement, uniformément, normalement, ... ;
- quel est le lien entre une fonction et sa série de Fourier.

On remarque tout d'abord que si la convergence est normale, alors la limite est automatiquement continue car série normalement convergente de fonctions continues. Il n'est donc pas naturel de regarder les fonctions non continues si on souhaite que la convergence soit normale et que la limite de la série soit égale à la fonction de départ.

Donnons tout d'abord quelques propriétés de la série de Fourier.

Proposition 3.6 *Pour toute fonction intégrable f on a*

i)

$$\int_0^{2\pi} f(t)S_n(f)(t)dt = \int_0^{2\pi} S_n(f)(t)S_n(f)(t)dt.$$

ii) Si f est de plus de carré intégrable alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} S_n(f)(t)^2 dt$$

Preuve. Pour une fonction f intégrable on a

$$\int_0^{2\pi} f(t)S_n(f)(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dxe^{-ikt}dt =$$
$$\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

D'autre part, on a

$$\int_0^{2\pi} S_n(f)(t)S_n(f)(t)dt =$$
$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\ell=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(u)e^{i\ell u}due^{-i\ell t}\right)\left(\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dxe^{-ikt}\right)dt =$$
$$\sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(u)e^{i\ell u}du\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx\int_0^{2\pi} e^{-i\ell t-ikt}dt =$$
$$\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}du\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx$$

car $\int_0^{2\pi} e^{-i\ell t-ikt}dt = 0$ si $\ell \neq -k$. On a donc bien l'égalité des deux termes.

Supposons de plus f de carré intégrable, alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f(t) - S_n(f)(t) + S_n(f)(t))^2 dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (f(t) - S_n(f)(t))^2 dt + \int_0^{2\pi} S_n(f)(t)^2 dt + 2\int_0^{2\pi} (f(t) - S_n(f)(t)) S_n(f)(t) dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (f(t) - S_n(f)(t))^2 dt + \int_0^{2\pi} S_n(f)(t)^2 dt \text{ car le dernier terme est nul d'après } i)$$
$$\geq \int_0^{2\pi} S_n(f)(t)^2 dt \text{ car le premier terme est positif}$$

□

3.4 Convergence en moyenne quadratique

C'est le cas qui demande le moins d'hypothèses sur la fonction f pour obtenir de la convergence : il suffit que f soit de carré intégrable. Même si la convergence est uniquement en moyenne, elle se généralise : dimension supérieure ou égale à deux, bases plus pertinentes pour certains problèmes (fonctions spéciales, ondelettes), etc.

Proposition 3.7 *L'espace vectoriel $L^2_{2\pi}$ peut être muni du produit scalaire $(.|.)$ defini par :*

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où e_k est la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est une famille famille orthonormale *de $L^2_{2\pi}$ et :*

$$\forall f \in L^2,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = (e_k|f).$$

Il est important de noter que pour $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$(f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2.$$

$\|f\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire et est équivalente à la norme donnée par la définition 1.6 sur L^2.

On a une propriété analogue avec le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $L^2_{2\pi}$ à valeurs réelles muni du produit scalaire $< .|. >$ défini par :

$$< f|g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt.$$

La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0, \\ \cos(px) & \text{si } n = 2p-1, \text{ et } p \geq 1, \\ \sin(px) & \text{si } n = 2p, \text{ et } p \geq 1, \end{cases}$$

est orthonormale pour $< .|. >$.

La projection orthogonale d'un élément $f \in L^2_{2\pi}$ sur le sous-espace

$$\mathcal{P}_p = \mathrm{Vect}((e_k)_{|k|\leq p})$$

est la somme partielle S_p. Avec le théorème de Pythagore (un peu généralisé) on en déduit

$$\|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

De plus l'application, qui à $P \in \mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$, atteint son minimum en un seul point et un seul, qui est $S_p(f)$. Enfin

Théorème 3.3 (Inégalité de Parseval) *Pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\boxed{\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2}\ .$$

On en tire la convergence des séries numériques associées aux suites $(|c_k(f)|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(|c_{-k}(f)|^2)_{k\geq 1}$. En particulier on retrouve le théorème de Riemann-Lebesgue (Théorème 3.2)

Proposition 3.8 *pour toute fonction $f \in L^2_{2\pi}$*

$$\lim_{k\to+\infty} c_k(f) = 0, \ \ et \ \lim_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0.$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2$ admet une limite quand p tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}(f)|^2.$$

Enfin, si f est à valeurs réelles, on a des propriétés analogues en remplaçant le produit scalaire $(.|.)$ par $< .|. >$ à savoir :

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \leq \|f\|_2^2 =< f|f > .$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left[a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right]$ converge et les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Théorème 3.4 *Pour tout élément de $L^2_{2\pi}$ la suite $(S_p(f))$ des sommes partielles de la série de Fourier de f converge en* moyenne quadratique *vers f, à savoir :*

$$\lim_{p\to\infty} \|S_p(f) - f\|_2 = 0.$$

Dit autrement, on a
$$\lim_{p\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-p}^{p} c_k(f)e^{ikt}-f(t)\right|^2 dt=0$$
et
$$\lim_{p\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{p}\left[a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)\right]-f(t)\right|^2 dt=0.$$
C'est donc bien une convergence en moyenne (quadratique) et pas point par point ! En terme de signaux périodiques, la quantité $\|f\|_2^2$ représente l'énergie associée au signal périodique décrit par f. Le théorème de Parseval exprime que cette énergie est la somme des énergies des différentes harmoniques.

Théorème 3.5 (Formule de Parseval) *Si* $f\in L^2_{2\pi}$,
$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=-p}^{p}|c_k(f)|^2=\|f\|_2^2}\ .$$

Si g est un autre élément de $L^2_{2\pi}$, les séries :
$$\sum_{k\geq 0}\overline{c_k(f)}c_k(g),\ \text{ et }\ \sum_{k\geq 0}\overline{c_{-k}(f)}c_{-k}(g)$$
sont absolument convergentes. On en déduit la convergence de la série de terme général :
$$\sum_{k=-p}^{p}\overline{c_k(f)}c_k(g)$$
dont la limite vaut $(f|g)$:
$$(f|g)=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=-p}^{p}\overline{c_k(f)}c_k(g).$$

Ce qui précède s'exprime également, pour les fonctions à valeurs réelles, à l'aide des coefficients en sinus et cosinus. En particulier :

— la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f (exprimée en sinus et cosinus) converge vers f dans l'espace réel des fonctions de $L^2_{2\pi}$ à valeurs réelles muni du produit scalaire $<.|.>$.

— Parseval s'écrit :
$$<f|f>=\frac{a_0(f)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right).$$

— Si g est une autre fonction
$$<f|g>=\frac{a_0(f)a_0(g)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g)\right).$$

On traitera en exercice le cas des fonctions T-périodiques. Les formules ci-dessus sont rigoureusement les mêmes.

3.5 Convergence ponctuelle

En traitement du signal, on souhaite avoir un peu plus que la convergence des énergies. Pour cela il va falloir ajouter de la régularité sur le signal ou la fonction.

3.5.1 Convergence normale

Supposons d'abord que la fonction soit au moins de classe C^2, donc très régulière ou lisse.

Proposition 3.9 *Si f est de classe C^p avec $p \geq 2$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ |c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|^p}.$$

Donc la série de Fourier converge normalement.

Preuve. On utilise la relation (3.1) :

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{|k|^p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(t)| dt \right).$$

Comme $f^{(p)}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, elle est bornée par une constante C. Ainsi

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{|k|^p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(t)| dt \right) \leq \frac{1}{|k|^p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C dt \right) = \frac{C}{|k|^p}.$$

Comme la série des $u_k = \frac{C}{|k|^p}$ converge (serie de Riemann avec $p \geq 2$), on en déduit la convergence normale de la serie de Fourier. □

Peut-on affaiblir l'hypothèse de dérivée seconde continue ? Oui, c'est le cadre du théorème suivant, dont la preuve est plus délicate.

Théorème 3.6 (Théorème de convergence normale) *On considère une fonction f 2π-périodique,* **continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur** $\mathbb{R}$ *(i.e. dérivable sauf en un nombre fini de points de $[0, 2\pi]$ où f' admet tout de même des limites à droites et à gauche).*

- *Les sommes $\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2$ sont majorées. Donc les séries $\sum_{k=0}^{p} |c_k(f)|$ et $\sum_{k=1}^{p} |c_{-k}(f)|$ convergent.*
- *Les deux séries de fonctions :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k}(f) e^{-ikx}.$$

convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

— *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x) = f(x).$$

La plupart des signaux vérifie les hypothèses du théorème précédent. Et on a déjà remarqué que la convergence normale implique nécessairement que f est continue. Enlever cette hypothèse empêchera donc la convergence normale.

3.5.2 Théorème de Dirichlet

C'est un résultat de convergence simple pour un signal non continu.

Théorème 3.7 (de Dirichlet) *Soit f une fonction 2π-périodique,* **de classe C^1 par morceaux** *sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à :*

$$\frac{1}{2} \lim_{h \to 0,\ h>0} [f(x+h) + f(x-h)] = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right].$$

Dans l'exemple 3.1, la fonction f est de classe C^1 par morceaux avec $f(0^+) = -\pi$ et $f(0^-) = \pi$. Donc

$$\lim_{p \to +\infty} S(f)(0) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = 0 = f(0).$$

Attention : il existe des fonctions continues telles que $\sup_{p \geq 1} |S_p(f)(0)| = +\infty$. En particulier la suite $S_p(f)$ diverge en zéro. Donc il faut un peu de régularité de la dérivée.

3.5.3 Phénomène de Gibbs

Au voisinage d'un point, où f a un saut de discontinuité, la somme partielle S_p de la série de Fourier montre un dépassement substantiel près de ce point. Une augmentation de p ne diminuera pas l'amplitude du dépassement, bien qu'avec cette augmentation p le dépassement s'effectue sur des intervalles de plus en plus petits. Ce phénomène est appelé **phénomène de Gibbs**.

Willard Gibbs (1839-1903) est célèbre pour ses travaux fondateurs en thermodynamique et physique statistique, et il est l'un des rares physiciens théoriciens de renom mondial en activité aux États-Unis au 19ième siècle. Son article de 1899 répondait à un compte rendu de Michelson sur la construction d'une machine traceuse de courbes, utilisée en particulier pour dessiner des graphes de sommes de sinus et cosinus. Testée sur des séries de Fourier de fonctions avec des discontinuités, on observait systématiquement un saut du dernier minima au premier maxima (ou le contraire) en excès de 18 % par rapport à la discontinuité.

Ici nous examinons quelques détails dans le comportement de la somme partielle S_p de $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Proposition 3.10 *Pour tout* $0 < x < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} = f(x).$$

Preuve. On utilise que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $0 < t < 2\pi$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{p} \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
S_p(f)(x) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_x^\pi \sum_{k=1}^{p} \cos(kt)dt \\
&= \int_x^\pi \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right) dt \\
&= \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2p+1}\left\{\left[-\frac{\cos\left(\frac{2p+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right]_\pi^x - \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{2p+1}{2}t\right) dt\right\} \\
&= \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2p+1}\left\{\frac{\cos\left(\frac{2p+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{2p+1}{2}t\right) dt\right\}
\end{aligned}$$

Comme pour $0 < x \leq \pi$,

$$\left|\int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{2p+1}{2}t\right) dt\right| \leq \int_x^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} = \left[-2\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right]_x^\pi = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} - 2;$$

et pour $\pi < x < 2\pi$,

$$\left|\int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{2p+1}{2}t\right) dt\right| \leq \int_\pi^x \frac{-\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} = \left[2\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right]_\pi^x = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} - 2;$$

on obtient

$$\left|S_p(f)(x) - \frac{\pi - x}{2}\right| \leq \frac{1}{2p+1}\left(\frac{3}{\sin\frac{x}{2}} - 2\right).$$

Ceci achève la preuve. □

Cette fonction f est prolongée par imparité et 2π-périodicité. L'étape suivante consiste

à remplacer la somme partielle S_p par une intégrale :

$$S_p(f)(x) = \int_0^\pi \sum_{k=1}^{p} \cos kt dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Pour x proche de zéro, on obtient un « dépassement » typique. Ceci est la prochaine étape à démontrer.

Théorème 3.8 *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x_p = \dfrac{2\pi}{2p+1}$. Alors*

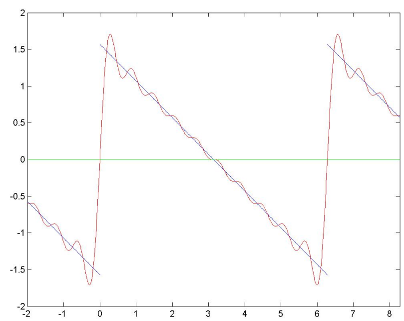
$$\lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x_p) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{\pi}{2} \times 1,1789797.$$

Preuve. En effet

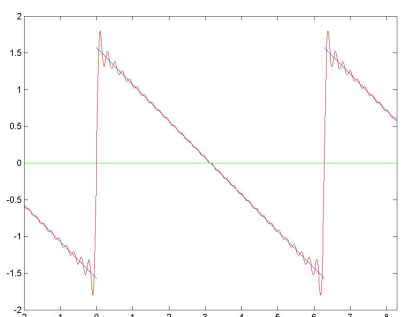
$$S_p(f)(x_p) + \frac{1}{2} x_p = \int_0^{x_p} \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2} t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\sin\left(\frac{\tau}{2p+1}\right)(2p+1)} d\tau,$$

avec le changement de variable $\dfrac{2p+1}{2} t = \tau$. $\square$

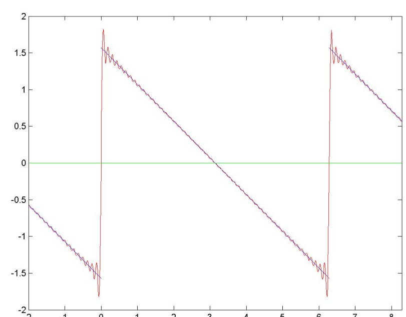
Comme $S_p(f)(x)$ est proche de $\pi/2$ quand x est proche de zéro, on observe qu'un « dépassement » d'environ 17,9 % est maintenu quand p tend vers $+\infty$ (mais sur des intervalles centrés autour de $x = 0$ de plus en plus petits).



Pour $p = 10$



Pour $p = 30$



Pour $p = 50$

Il n'est pas difficile de montrer que le phénomène de Gibbs vaut pour toute fonction f (raisonnable) avec un saut : après translation on peut supposer que la discontinuité est en 0 ; on soustrait à f un multiple adapté de la fonction que nous venons d'étudier en détail, pour éliminer le saut, et si le résultat est continu et C^1 par morceaux dans un voisinage de l'origine, la différence des séries de Fourier sera uniformément convergente sur un voisinage de 0, et donc cela permet de voir que les sommes partielles de la série de Fourier de f présentent aussi le phénomène de Gibbs.

Chapitre 4

Transformées de Fourier et de Laplace

4.1 Produit de convolution

Définition 4.1 *Soient deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^d$. Formellement le* **produit de convolution** *de f et g, noté $f*g$, est défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Le support d'une fonction f, noté supp(f), est l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) \neq 0\}}$.

Attention, ce produit n'est pas toujours défini. Voyons d'abord quelques conditions qui assurent l'existence de $f * g$.

Proposition 4.1 *Si*
- *$f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact,*
- *$f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,*
- *$f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$,*

alors $f * g$ a un sens.

Règle de calcul

Lemme 4.1 *Pour toutes fonctions f, g et h telles que les produits apparaissant ci-dessous soient définis on a*
1. *$f * g = g * f$*
2. *$f * (g + h) = f * g + f * h$*
3. *$f * (g * h) = (f * g) * h$*
4. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, si τ_a désigne la translation par a, on a $\tau_a(f * g) = f * (\tau_a(g)) = (\tau_a(f)) * g$.*
5. *Si $x \notin (supp(f) + supp(g))$ alors $(f * g)(x) = 0$.*

Ainsi

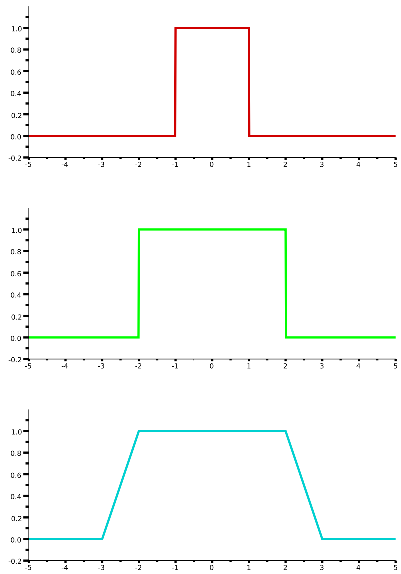
$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}.$$

Et si supp(f) (ou supp(g)) est compact, supp$(f * g) \subset$ supp(f) $+$ supp(g) et si f et g sont à support compact, $f * g$ l'est aussi.

Exemple 4.1

Pour $a > 1$, considérons les fonctions $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ et leur convoluée $f = \mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-a,a]}$ représentées à droite. On a donc

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\mathbb{1}_{[-a,a]}(x-t)dt =$$
$$= \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x-t)dt$$



Lemme 4.2 (Intégrabilité) *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

Lemme 4.3 (Régularité) *Supposons f à support compact et $g \in L^1(\mathbb{R})$.*

1. *Si f est continue alors $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si f est C^1 alors $f * g$ l'est également et on a $(f * g)' = f' * g$.*

Pour les dérivées suivantes

Proposition 4.2 *Si $f \in L^1$ et si g est une fonction de classe C^p à support compact, alors $f * g$ existe et est de classe C^p sur $\mathbb{R}^d$ avec*

$$\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g). \tag{4.1}$$

Approximation de l'identité et régularisation

On ne peut pas trouver de fonction g telle que, pour tout f, on ait $f * g = f$. Toutefois, il est des (suites de) fonctions qui permettent d'approcher cette égalité.

Définition 4.2 *Nous appellerons une suite (φ_n) de fonctions continues à support compact telle que*

1. *$\varphi_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$*
2. *$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = 1$*
3. *$\varphi_n = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1/n, 1/n]$.*

L'hypothèse que φ_n n'est pas nécessaire mais facilite les preuves et les rÃ©sultats de rÃ©gularisation.

Proposition 4.3 *Soit φ_n une approximation de l'identité. Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$ et pour tout compact K la suite $f * \varphi_n$ converge uniformément vers f sur K.*

Proposition 4.4 *Soit φ_n une approximation de l'identité. Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ la suite $f * \varphi_n$ converge vers f en norme L^1.*

Il est important de noter que si φ_n est de classe C^k, alors $f * \varphi_n$ le sera aussi.

4.2 Transformée de Fourier

Définition 4.3 *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

on définit la transformée de Fourier de f par

$$\boxed{\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x) f(x) dx.} \tag{4.2}$$

Certains auteurs prennent aussi pour définition : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi\xi x) f(x) dx$. On remarque aisément que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi\xi x) f(x) dx = \mathcal{F}[f](2\pi\xi).$$

Donc les résultats ne concernant que le comportement de la transformée de Fourier sont valables quelle que soit la définition. Il faut juste faire attention aux constantes.

Exemple 4.2 *Supposons que $f(x) = e^{-x} 1\!\!1_{[0,\infty[}$. On a alors*

$$\hat{f}(t) = \int_0^{infty} e^{-x-itx} dx = \left[\frac{1}{-1-it} e^{-x-itx} \right]_0^\infty = \frac{1}{1+it}$$

On prendra par contre bien garde au fait que $\hat{f}$ n'a aucune raison d'être elle même dans $L^1(\mathbb{R})$ en général.

Théorème 4.1 (Règles de calculs) *Pour toute fonction $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a*

1. *$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$.*
2. *Si $x^n f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ alors $\mathcal{F}[f]$ est C^n et on a $\mathcal{F}[f^{(n)}] = (-i)^n \mathcal{F}[x^n f]$.*
3. *Si f est dérivable alors $\mathcal{F}[f'](t) = -it\mathcal{F}[f](t)$.*
4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{F}[\tau_a(f)](t) = e^{ita}\mathcal{F}[f](t)$*

En particulier :

Théorème 4.2 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f]$ est une fonction continue qui tend vers zéro vers l'infini. De plus*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt.$$

4.2.1 Propriétés

Espace de Schwartz. Introduisons maintenant un espace de fonctions particuliers : l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall p, q \in \mathbb{N},\ \exists C_{p,q} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q} \right\}.$$

Autrement dit f est C^∞ et n'importe quelle dérivée de f décroît à l'infini plus vite que toute puissance de x. L'exemple le plus simple de fonctions de $\mathcal{S}$ est $f(x) = \exp(-x^2)$. La transformée de Fourier laisse l'espace de Schwartz stable.

Théorème 4.3 *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}[f]$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Théorème 4.4 (Inversion) *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \mathcal{F}[f](t) dt.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x) = f(x).}$$

On appelle transformée de Fourier inverse l'application :

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[f](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx.}$$

Théorème 4.5 (Relation de Parseval) *Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[g](x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)g(x)dx.$$

Corollaire 4.1 *Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)\overline{\mathcal{F}[g](x)}dx.$$

En particulier

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](x)|^2 dx.$$

Fonctions intégrables. Ces résultats peuvent s'étendre au cas des fonctions intégrables. Mais dans ce cas il faut faire attention que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est généralement pas intégrable.
Exemple : si $f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{2}{\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{i\xi(b+a)}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi(b+a)}{2}\right).$$

Et ainsi $\mathcal{F}[f] \notin L^1(\mathbb{R})$.
Néanmoins les propriétés suivantes sont toutes vraies (et aisément vérifiables).

Propriétés 4.1

1. $\mathcal{F}[f(-t)](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi)$, $\qquad \mathcal{F}[\overline{f}](\xi) = \overline{\mathcal{F}[f]}(-\xi)$.
2. $\mathcal{F}[f(t-a)](\xi) = \exp(ia\xi)\mathcal{F}[f](\xi)$, $\qquad \mathcal{F}[\exp(i\xi_0 t)f](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi+\xi_0)$.
3. $\mathcal{F}[f(at)](\xi) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\dfrac{\xi}{a})$.
4. Si $f^{(p)}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}[f^{(p)}](\xi) = (-i\xi)^p\mathcal{F}[f](\xi)$.
5. Si $t^p f(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\dfrac{d^p}{d\xi^p}\mathcal{F}[f](\xi) = i^p\mathcal{F}[t^p f(t)](\xi)$.

L'interprétation de ces propriétés est la suivante :

2. $\mathcal{F}[f(t-a)](\xi) = \exp(ia\xi)\mathcal{F}[f](\xi)$: une translation dans le domaine temporel induit une modulation dans le domaine des fréquences.
3. $\mathcal{F}[f(at)](\xi) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\dfrac{\xi}{a})$: une contraction dans le domaine temporel induit une dilatation dans le domaine des fréquences.
4. Si f' est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}[f'](\xi) = (-i\xi)\mathcal{F}[f](\xi)$: la dérivation dans le domaine temporel induit une similitude dans le domaine des fréquences

Proposition 4.5 *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$:*

1. *les produits $f\mathcal{F}[g]$ et $g\mathcal{F}[f]$ sont intégrables et ont même intégrale.*
2. *De plus $\mathcal{F}[f*g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$. Ainsi une convolution dans le domaine temporel induit un produit dans le domaine des fréquences.*

La transformée de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions intégrables en produit de fonctions.

Théorème 4.6 (Inversion de Fourier) *Si f et $\mathcal{F}[f]$ sont intégrables, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\mathcal{F}[f](t)dt.$$

Corollaire 4.2 *La transformée de Fourier des fonctions intégrables est linéaire et injective, c'est-à-dire que pour tout f et g dans $L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$ implique $f = g$ presque partout.*

Fonctions de carré intégrable. On peut étendre la notion de transformée de Fourier aux fonctions de carré intégrable ou physiquement aux signaux d'énergie finie. Ainsi $t \mapsto 1/t$ ou $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont des fonctions non intégrables, mais de carré intégrable.

Définition 4.4 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-R}^{R}\exp(it\xi)f(t)dt$ a une limite quand R tend vers $+\infty$ pour (presque) tout $\xi \in \mathbb{R}$, alors la fonction de ξ ainsi définie appartient à $L^2(\mathbb{R})$. C'est la transformée de Fourier de f, notée encore $\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}$.*

Ainsi si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f]$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de $\xi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-R}^{R}\exp(it\xi)f(t)dt$.

Proposition 4.6

1. *Si f et g sont de carré intégrable,*
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)d\xi.$$
2. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2$ (égalité de Parseval-Plancherel).*
3. *Si la suite de fonctions f_n converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers f, alors $\mathcal{F}[f_n]$ converge aussi dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}[f]$.*

On remarquera que ces propriétés sont l'extension à $L^2(\mathbb{R})$ des propriétés vues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Concernant la convolution, on a

Proposition 4.7

1. *Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable, alors $f * g$ est une fonction continue et bornée telle que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |(f * g)(x)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$
De plus elle tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. De plus
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \mathcal{F}[f](x)\mathcal{F}[g](x)dx. \tag{4.3}$$
2. *Si g est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ avec*
$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1.$$
De plus (4.3) *reste valable.*
3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, les définitions 4.3 et 4.4 coïncident.*

On renvoie au paragraphe 4.4.1 pour un tableau de quelques transformées de Fourier.

Cas de plusieurs variables. Tous les résultats s'étendent aux cas des fonctions de d variables $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (ou $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$) si on pose
$$\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi_1, \ldots, \xi_d) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \sum_{k=1}^d \xi_k x_k\right) f(x_1, \ldots, x_d)dx_1 \ldots dx_d.$$

4.2.2 Applications.

Voyons maintenant deux exemples d'application.

Équation de la chaleur sur une ligne infinie. Elle modélise la conduction de la chaleur dans une ligne uniforme très longue, où l'activité diffusive s'annule en bout de ligne, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \tag{4.4}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires :

— condition initiale :

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \tag{4.5}$$

— conditions limites : pour tout $t > 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0. \tag{4.6}$$

On note $U(t,\xi)$ la transformée de Fourier de u par rapport à x :

$$U(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x)u(t,x)dx.$$

Ainsi on obtient pour U une EDO en temps (ξ étant un paramètre) :

$$\forall t > 0,\ U'(t,\xi) + k\xi^2 U(t,\xi) = 0, \quad \text{avec } U(0,\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi).$$

La solution est alors

$$U(t,\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}.$$

On prend ensuite la transformée de Fourier inverse de $P(t,\xi) = e^{-k\xi^2 t}$. D'après le tableau 4.4.1, formule 7 :

$$\mathcal{F}^{-1}[P](x) = p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right).$$

De là

$$U(t,\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[p](t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[f * p](t,\xi),$$

d'où $u = f * p$, soit encore

$$\boxed{u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4kt}\right)dy.} \tag{4.7}$$

Cette équation montre comment la distribution initiale de température $u(0,x)$ influence toute l'évolution future de la température dans la ligne. La fonction

$$G(t,x;y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4kt}\right)$$

s'appelle noyau de Gauss-Weierstrass ou fonction de Green de l'équation (4.4).

Corde vibrante infinie. On modélise les vibrations d'une corde de longueur infinie, pour laquelle les effets mécaniques en bout de ligne sont insignifiants :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \tag{4.8}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires :

— condition initiale :

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{4.9}$$

— conditions limites : pour tout $t > 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0. \tag{4.10}$$

Comme pour l'équation de la chaleur, on pose $U(t,\xi)$ la transformée de Fourier de u par rapport à x :

$$U(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x) u(t,x) dx.$$

Ainsi on obtient pour U une EDO en temps (ξ étant un paramètre) :

$$\forall t > 0,\ U''(t,\xi) + c^2\xi^2 U(t,\xi) = 0, \quad \text{avec } U(0,\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi),\ U'(0,\xi) = 0.$$

La solution générale s'écrit :

$$U(t,\xi) = C_1(\xi)\cos(c\xi t) + C_2(\xi)\sin(c\xi t).$$

Les conditions initiales (4.9) font que $C_2 = 0$ et $C_1 = \hat{f}$. Ainsi

$$U(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) = \hat{f}(\xi)\frac{1}{2}(e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t})$$

et donc

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[U](t,x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ic\xi t} e^{-ix\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ic\xi t} e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i(ct-x)\xi} d\xi + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i(ct+x)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](ct-x) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](ct+x) \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2} f(ct-x) + \frac{1}{2} f(ct+x).} \tag{4.11}$$

4.2.3 Transformée de Fourier en $\sin$ ou en $\cos$

Quand la fonction f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ on applique plutôt les transformées de Fourier en $\sin$ ou en $\cos$ définies comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S[f](\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)dx, \\ \mathcal{F}_C[f](\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx.\end{aligned}$$

Ces fonctions sont définies dès que $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < +\infty.$$

Les transformées inverses sont

$$\mathcal{F}_S^{-1}[F](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\xi)\sin(\xi x)d\xi,$$
$$\mathcal{F}_C^{-1}[F](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\xi)\cos(\xi x)d\xi.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes.

Propriétés 4.2

1. *$\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_C$ sont linéaires.*
2. *Pour $u = u(t, x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} u(t, x) = 0$, alors*
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](t,\xi) &= -\xi\mathcal{F}_C[u](t,\xi), \\ \mathcal{F}_C\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](t,\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}u(t,0) + \xi\mathcal{F}_S[u](t,\xi).\end{aligned}$$
3. *Si de plus $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0$, alors*
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](t,\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi u(t,0) - \xi^2\mathcal{F}_S[u](t,\xi), \\ \mathcal{F}_C\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](t,\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) - \xi^2\mathcal{F}_C[u](t,\xi).\end{aligned}$$
4. *La dérivation par rapport au temps commute avec les transformées de Fourier.*
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](t,\xi) &= \frac{\partial(\mathcal{F}_S[u])}{\partial t}(t,\xi), \\ \mathcal{F}_C\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](t,\xi) &= \frac{\partial(\mathcal{F}_C[u])}{\partial t}(t,\xi).\end{aligned}$$

Ces propriétés pourront être utilisé dans des exercices (équations de la chaleur ou des ondes sur $\mathbb{R}_+$). On renvoie aux paragraphes 4.4.2 et 4.4.3 pour les tableaux de quelques transformées de Fourier en sinus ou en cosinus.

4.3 Transformée de Laplace

Définition 4.5 *Pour une fonction f on définit sa* transformée de Laplace *par*

$$\boxed{\mathcal{L}[f](x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)dt.}$$

Elle est donc définie pour toute fonction f telle qu'il existe M et c telles que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq Me^{ct}$. L'intervalle de définition de $\mathcal{L}[f]$ est $]c, +\infty[$. En particulier si f est bornée, $\mathcal{L}[f]$ est définie sur $]0, +\infty[$. On supposera dans la suite que $c \geq 0$, et ainsi que $\mathcal{L}[f]$ est au moins définie sur $]0, +\infty[$.

Propriétés 4.3

1. $\mathcal{L}[f^{(k)}](p) = p^k \mathcal{L}[f](p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)$, *$g(0)$ pouvant désigner la valeur de g en zéro ou sa limite.*
2. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f]$; $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right](p) = \dfrac{1}{p}\mathcal{L}[f](p)$.
3. *Soit* $\Delta f(a) = f(a^+) - f(a^-) = \lim\limits_{t \to a, t > a} f(t) - \lim\limits_{t \to a, t < a} f(t)$ *le saut de f en une discontinuité, alors si f' est continue hors de a :*
$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0) - e^{-pa} \Delta f(a).$$
4. *Valeur initiale :* $\lim\limits_{p \to +\infty} p\mathcal{L}[f](p) = \lim\limits_{t \to 0} f(t)$.
5. *Valeur finale :* $\lim\limits_{p \to 0} p\mathcal{L}[f](p) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
6. *Si* $\mathcal{L}[f] = F$, *alors*
   (a) $\mathcal{L}[e^{at} f](x) = F(x - a)$, $x > a$;
   (b) $\mathcal{L}[H(t - b)f(t - b)](x) = e^{-bx} F(x)$, $b > 0$.
   Ici H est la fonction de Heaviside : $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t \geq 0$.

Le tableau de la section 4.4.4 donne quelques transformées de Laplace.

Exemple. On cherche une solution définie dans le domaine $x > 0$ et $t > 0$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + x\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = x, \quad \forall x > 0,\ \forall t > 0, \tag{4.12}$$

avec $u(0, x) = 0$. Supposons qu'il existe une solution telle que :

$$U(p, x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t, x)dt$$

soit bien définie et soit dérivable par rapport à x. $U(., x)$ est pour x fixé la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto u(t, x)$.

Comme $u(0,x) = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}$ a pour transformée de Laplace $pU(p,x)$ (intégration par parties). En prenant la transformée de Laplace dans les deux membres de (4.12), on trouve donc

$$pU(p,x) + x\frac{\partial U}{\partial x}(p,x) = \frac{x}{p}.$$

Pour chaque valeur de $p > 0$ fixée, c'est une EDO linéaire du premier ordre, qui se résout ainsi

$$U(p,x) = Cx^{-p} + \frac{x}{p(p+1)}.$$

Pour trouver la constante C, on note que $U(p,0) = \int_0^\infty e^{-pt}u(t,0)dt = 0$. Ainsi $C = 0$ et $U(p,x) = x\frac{1}{p(p+1)} = x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$, qui est la transformée de Laplace de $x(1-e^{-t})$ (voir 4.4.4, formules 1 et 4). On suppose donc $u(t,x) = x(1-e^{-t})$ et on vérifie que cette fonction est bien une solution ayant les propriétés demandées.

Signal pour l'équation des ondes. Considérons une corde de longueur infinie, avec poids négligeable, initialement au repos, avec un déplacement vertical prescrit au point initial et sans effet mécanique à l'infini.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \tag{4.13}$$

pour $x > 0$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires :

— condition initiale :

$$u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{4.14}$$

— conditions limites : pour tout $t > 0$, $u(t,.)$ est une fonction bornée à l'infini.

— condition de bord :

$$u(t,0) = f(t), \quad t > 0. \tag{4.15}$$

On pose $U(t,x)$ la transformée de Laplace de u par rapport à t :

$$U(s,x) = \mathcal{L}[u](s,x) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t,x)dt, \quad F(s) = \mathcal{L}[f](s).$$

Ainsi grâce à (4.13), (4.14) et (4.15), on obtient pour U une EDO en x (s étant un paramètre) :

$$\forall x > 0,\ s^2U''(s,x) = c^2U(s,x), \quad \text{avec } U(s,0) = F(s), \text{ et } U(s,x) \text{ borné}.$$

La solution générale de cette EDO s'écrit :

$$U(s,x) = C_1(s)e^{(s/c)x} + C_2(s)e^{-(s/c)x}.$$

Comme $U(s,x)$ reste borné, nécessairement $C_1(s) = 0$. De plus $C_2(s) = F(s)$. Ainsi

$$U(s,x) = F(s)e^{-(s/c)x}.$$

La transformée de Laplace inverse est difficile à manier. Néanmoins la propriété 6 des propriétés 4.3 montre que

$$u(t,x) = H(t - x/c)f(t - x/c) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < t < x/c, \\ f(t - x/c), & \text{si } t \geq x/c. \end{cases}$$

La solution peut aussi s'écrire :

$$\boxed{u(t,x) = \begin{cases} f(t - x/c), & \text{si } x \leq ct, \\ 0, & \text{si } x > ct. \end{cases}} \tag{4.16}$$

4.4 Tableaux des transformées intégrales

On rappelle que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx, \\ \mathcal{F}_S[f](\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin(\xi x)dx, \\ \mathcal{F}_C[f](\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)dx, \\ \mathcal{L}[f](p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \end{aligned}$$

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions erreur et erreur complémentaire :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}d\xi,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = 1 - \operatorname{erf}(x).$$

4.4.1 Transformée de Fourier

	$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x)$	$F(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$
1.	$\mathbf{1}_{[-A,A]}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(A\xi)}{\xi}$
2.	$\left(1 - \frac{\lvert x\rvert}{A}\right)\mathbf{1}_{[-A,A]}(x)$	$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(A\xi/2))}{A\xi^2}$
3.	$\frac{\sin^2(ax)}{x^2},\ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\frac{\lvert\xi\rvert}{a}\right)\mathbf{1}_{[-a/2,a/2]}(\xi)$
4.	$\exp(-ax)\mathbf{1}_{x\geq 0},\ a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a - i\xi}$
5.	$\exp(-a\lvert x\rvert),\ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\xi^2}$
6.	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}\exp(-a\lvert\xi\rvert)$
7.	$\exp(-ax^2),\ a > 0$	$\sqrt{\frac{1}{2a}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$
8.	$\frac{\sin x}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbf{1}_{\lvert\xi\rvert\leq 1}$
9.	$\mathrm{erf}(ax)$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}e^{-\xi^2/(4a^2)}$

4.4.2 Transformée de Fourier en sin

	$f(x) = \mathcal{F}_S^{-1}[F](x)$	$F(\xi) = \mathcal{F}_S[f](\xi)$
1.	1	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}$
2.	$\exp(-ax),\ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\xi^2 + a^2}$
3.	$\frac{x}{a^2 + x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-a\xi)$
4.	$\mathbf{1}_{[0,A]}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}(1 - \cos(A\xi))$
5.	$x\mathbf{1}_{[-A,A]}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi^2}(\sin(A\xi) - A\xi\cos(A\xi))$
6.	$\mathrm{erfc}(ax),\ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}\left(1 - e^{-\xi^2/(4a^2)}\right)$
7.	$xe^{-a^2x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{a^3}\xi e^{-\xi^2/(4a^2)}$

4.4.3 Transformée de Fourier en $\cos$

	$f(x) = \mathcal{F}_C^{-1}[F](x)$	$F(\xi) = \mathcal{F}_C[f](\xi)$
1.	$\exp(-ax)\mathbf{1}_{x\geq 0},\ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2 + a^2}$
2.	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}\exp(-a\xi)$
4.	$\mathbf{1}_{[0,A]}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}\sin(A\xi)$
5.	$e^{-a^2x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\|a\|}\xi e^{-\xi^2/(4a^2)}$
6.	$\begin{cases} (1/b)e^{-bx}\mathrm{ch}(ab), & \text{si } x \geq a \\ (1/b)e^{-ba}\mathrm{ch}(xb), & \text{si } x < a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(a\xi)}{b^2 + \xi^2}$

4.4.4 Transformée de Laplace

	$f = \mathcal{L}^{-1}[F](p)$	$F(p) = \mathcal{L}[f](p)$
1.	$1,\ t \geq 0$	$\frac{1}{p},\ p > 0$
2.	$t,\ t \geq 0$	$\frac{1}{p^2},\ p > 0$
3.	$t^n,\ t \geq 0,\ n > 0$	$\frac{n!}{p^{n+1}},\ p > 0$
4.	$e^{-at},\ t \geq 0,$	$\frac{1}{p+a},\ p > -a$
5.	$t^n \exp(-at), t \geq 0$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}},\ p > -a$
6.	$\cos(\omega t),\ t \geq 0$	$\frac{p}{p^2+\omega^2},\ p > 0$
7.	$\sin(\omega t),\ t \geq 0$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ p > 0$
8.	$\mathrm{ch}(at),\ t \geq 0$	$\frac{p}{p^2-a^2},\ p > \lvert a\rvert$
9.	$\mathrm{sh}(at),\ t \geq 0$	$\frac{a}{p^2-a^2},\ p > \lvert a\rvert$
10.	$Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi),\ t \geq 0$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2+\omega^2},\ p > -a$

$$\text{avec } A = \tfrac{1}{\omega}\sqrt{\alpha^2\omega^2 + (\beta - a\alpha)^2}$$
$$\text{et } \phi = -\arctan \frac{\beta - a\alpha}{\alpha\omega}$$

11.	$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\ a > 0$	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$
12.	$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}t^{-3/2}e^{-a^2/(4t)}\ a > 0$	$e^{-a\sqrt{p}}$