Équations aux dérivées partielles, solutions classiques.

Différences finies.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

Plan du cours

Petit lexique.

Définition

Une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.
On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.
Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue.

Exemple

L'équation de Black-Scholes

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - rv(t,x) = 0,$$

est une EDP linéaire d'ordre 2.

Classification sommaire.

EDP d'ordre 2, linéaire, à deux variables :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g.$$

Définition

L'équation est elliptique si $b^2 - 4ac < 0$, parabolique si $b^2 - 4ac = 0$ et hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

Exemple

L'EDP de Black-Scholes ou l'équation de la chaleur sont paraboliques. L'équation de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^d$, est elliptique.

DÉFINITION

On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

DÉFINITION

Le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données au bord, etc .), il admet une solution unique et si cette solution dépend continuement de la donnée.

PLAN

Normale à un ouvert.

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k, avec

- $\rho \in C^k(\mathbb{R}^d)$,
- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \rho(x) < 0\}$,
- $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \rho(x) = 0\}$,
- grad $\rho(x) = \nabla\rho(x) \neq 0$ pour $x \in \partial\Omega$.

Définition

La fonction $\nu : x \in \partial\Omega \mapsto \dfrac{1}{\|grad\ \rho(x)\|} grad\ \rho(x)$ est appelée normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω.

Définition

Si $u \in C^1(\bar{\Omega})$, on note $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nu.grad\ u$ la dérivée normale de u le long de $\partial\Omega$.

Théorème de Gauss-Green.

Données :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe (au moins) C^1 ;
- $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$: normale extérieure à $\partial\Omega$;
- $d\sigma$: mesure superficielle du bord $\partial\Omega$.

Théorème de Gauss-Green

Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} (f\nu_i)(\sigma)d\sigma.$$

Formule de Stokes

$$\int_\Omega \mathrm{div} U(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial U_i}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} (U.\nu)(\sigma)d\sigma.$$

Intégration par parties

Si f et g sont dans $C^1(\overline{\Omega})$, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = - \int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial \Omega} f(\sigma) g(\sigma) \nu_i(\sigma) d\sigma.$$

Formules de Green.

Formules de Green

1. Si $f \in C^2(\overline{\Omega})$ et $g \in C^1(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \Delta f(x) g(x) dx = -\int_\Omega \nabla f(x).\nabla g(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}(\sigma) g(\sigma) d\sigma.$$

2. Si f et g sont dans $C^2(\overline{\Omega})$, alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta f(x) g(x) dx &= \int_\Omega f(x) \Delta g(x) dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}(\sigma) g(\sigma) - \frac{\partial g}{\partial \nu}(\sigma) f(\sigma) \right] d\sigma.\end{aligned}$$

PLAN

- ÉQUATION DE LAPLACE : $\Delta u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$.
- ÉQUATION DE POISSON : $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

DÉFINITION

Une fonction u de classe C^2 sur Ω satisfaisant l'équation de Laplace est dite harmonique.

Plan

Solution invariante par rotation.

Domaine : $\Omega = \mathbb{R}^d \Rightarrow$ invariance par rotation, d'où $u(x) = v(r)$ avec $r = \|x\|$.

Lemme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow v'' + \frac{d-1}{r}v' = 0.$$

$$v(r) = \begin{cases} \alpha \ln(r) + \beta, & d = 2; \\ \dfrac{\alpha}{r^{d-2}} + \beta, & d \geq 3; \end{cases} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

DÉFINITION

La fonction

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln(\|x\|), & d = 2; \\ \dfrac{1}{d(d-2)\kappa(d)}\dfrac{1}{\|x\|^{d-2}}, & d \geq 3; \end{cases} \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}^d,\ x \neq 0,$$

est la solution fondamentale de l'équation de Laplace.

NOTATION

$\kappa(d) = \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Équation de Poisson sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème

Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $u = \Phi * f$:

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln(\|x-y\|) f(y) dy, & d = 2; \\ \dfrac{1}{d(d-2)\kappa(d)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{f(y)}{\|x-y\|^{d-2}} dy, & d \geq 3; \end{cases}$$

est correctement définie et vérifie :

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$,
2. $-\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^d$.

PLAN

THÉORÈME

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonique sur Ω ouvert borné.

1. Alors $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.
2. De plus si Ω est connexe et s'il existe $x_0 \in \Omega$ t.q. $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, alors u est constante sur Ω.

REMARQUE

Avec $-u$ à la place de u, on a les mêmes assertions pour le min.

COROLLAIRE

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est harmonique sur Ω et vérifie $u = g$ sur $\partial\Omega$ avec $g \geq 0$, u est strictement positive partout sur Ω pourvu que g soit strictement positive en au moins un point du bord.

THÉORÈME (UNICITÉ)

Soit $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Alors il existe au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

RÉGULARISATION ET REPRÉSENTATION.

THÉORÈME

Si $u \in C(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

REMARQUE

Attention : u n'est pas nécessairement régulière, ni même continue sur le bord $\partial\Omega$.

THÉORÈME

Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ avec $d \geq 3$. Toute solution bornée de $-\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^d$ est de la forme

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y) dy + C, \text{ avec } C \text{ constante.}$$

Fonction de Green.

Hypothèse : Ω est un ouvert borné de classe C^1.

Définition

Pour tout $x \in \Omega$,

- *Fonction correctrice : ϕ^x solution de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \Phi^x = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \phi^x = \Phi(y-x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

- *Fonction de Green de Ω :*

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y), \quad (x,y) \in \Omega^2, x \neq y.$$

Proposition

Pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, $x \neq y$, $G(x,y) = G(y,x)$.

Fonction de Green.

Hypothèse : Ω est un ouvert borné de classe C^1.

Théorème

Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors pour tout $x \in \Omega$:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\sigma) d\sigma + \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy.$$

FONCTION DE GREEN POUR LE DEMI-ESPACE.

DOMAINE : $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d | x_d > 0\}$.
NOYAU DE POISSON POUR $\mathbb{R}^d_+$:

$$K(x,y) = \frac{2x_d}{d\kappa(d)} \frac{1}{\|x-y\|^d}, \quad x \in \mathbb{R}^d_+,\ y \in \partial\mathbb{R}^d_+.$$

THÉORÈME

Soit $g \in C(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ et u définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d_+,\ u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} g(y)K(x,y)dy.$$

Alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ et

1. $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^d_+$,
2. $\lim_{x \to x_0, x \in \mathbb{R}^d_+} u(x) = g(x_0)$ pour tout $x_0 \in \partial\mathbb{R}^d_+$.

Fonction de Green pour une boule.

Domaine : $\Omega = B(0,r)$ avec $r > 0$.
Noyau de Poisson pour $B(0,r)$:

$$K(x,y) = \frac{r^2 - \|x\|^2}{d\kappa(d)r} \frac{1}{\|x-y\|^d}, \quad x \in B(0,r),\ y \in \partial B(0,r).$$

Théorème

Soit $g \in C(\partial B(0,r))$ et u définie par

$$\forall x \in B(0,r),\ u(x) = \int_{\partial B(0,r)} g(y) K(x,y) dy.$$

Alors $u \in C^\infty(B(0,r))$ et

1. $\Delta u = 0$ sur $B(0,r)$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0, x \in B(0,r)} u(x) = g(x_0)$ pour tout $x_0 \in \partial B(0,r)$.

PLAN

DÉFINITION.

ÉQUATION HOMOGÈNE : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$

ÉQUATION INHOMOGÈNE : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f.$

DONNÉES

- initiales et de bord à préciser !
- $f : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

INCONNUE : $u : \mathbb{R}_+^* \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

Plan

Solution fondamentale.

Définition

La fonction

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\dfrac{\|x\|^2}{4t}\right) & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ 0 & t < 0,\ x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

est appelée solution fondamentale de l'équation de la chaleur (homogène).

Lemme

Pour tout $t > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x)dx = 1$.

Problème de Cauchy.

À résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{et } u(0,.) = g.$$

Théorème

Soit $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit

$$u(t,x) = \Phi(t,.) * g = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) g(y) dy, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ et

1. $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0$ pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$,
2. $\displaystyle\lim_{(t,x)\to(0,x_0), t>0} u(t,x) = g(x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
3. Si $g \geq 0$, avec $g \neq 0$, alors pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $u(t,x) > 0$.

Problème non homogène.

À résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u = 0 & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Théorème

Soit $f \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Soit

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) ds dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ et

1. $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$ pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$,
2. $\displaystyle\lim_{(t,x)\to(0,x_0),t>0} u(t,x) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Problème non homogène.

Proposition

En combinant les deux théorèmes :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) ds dy$$

est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u = g & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

PLAN

Principe du maximum, unicité.

Définition

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $T > 0$.

- *Cylindre parabolique :* $\Omega_T =]0, T] \times \Omega$.
- *Bord parabolique de* Ω_T : $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial\Omega$.

Théorème

Soit $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \times C(\overline{\Omega_T})$ solution de l'équation de la chaleur sur Ω_T.

1. Alors $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.
2. Si Ω est connexe et s'il existe $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ t.q. $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$, alors u est constante sur $\overline{\Omega_{t_0}}$.

DÉFINITION

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $T > 0$.

- *Cylindre parabolique : $\Omega_T =]0, T] \times \Omega$.*
- *Bord parabolique de Ω_T : $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial\Omega$.*

THÉORÈME

Soit $g \in C(\Gamma_T)$ et $f \in C(\Omega_T)$. Il existe au plus une solution $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \times C(\overline{\Omega_T})$ au problème :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega_T, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_T. \end{cases}$$

THÉORÈME (PRINCIPE DU MAXIMUM)

Soit $u \in C^{1,2}(]0,T] \times \mathbb{R}^d) \times C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ solution de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^d, \\ u = g & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et satisfaisant $|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2}$ (avec A, a constantes). Alors

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} u = \sup_{\mathbb{R}^d} g.$$

THÉORÈME (UNICITÉ)

Soit $g \in C(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Il existe au plus une solution $u \in C^{1,2}(]0,T] \times \mathbb{R}^d) \times C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ au problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^d, \\ & \\ u = g & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R}^d, \end{array} \right.$$

satisfaisant $|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2}$ (avec A, a constantes).

REMARQUES.

REMARQUE SUR LES BORNES

Il existe une infinité de solutions pour

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{sur }]0, T[\times \mathbb{R}^d, \\ u = 0 & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

THÉORÈME (RÉGULARITÉ)

Si $u \in C^{1,2}(\Omega_T)$ satisfait l'équation de la chaleur sur Ω_T, alors $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

PLAN

PRINCIPALES MÉTHODES DE DISCRÉTISATION.

DIFFÉRENCES FINIES (ou volumes finis) : discrétisation du domaine Ω et remplacement de l'opérateur différentiel par un quotient différentiel.

ÉLÉMENTS FINIS : trés liée à la formulation variationnelle des EDP. Principe : remplacer un espace de Hilbert H par un sous-espace de dimension finie H_N.

MÉTHODES SPECTRALES : chercher une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions (Fourier, polynômes, splines, etc.) :

$$u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(u) p_i, \qquad \text{(voir exercices de TD).}$$

Méthodes souvent coûteuses, mais précises.

PRINCIPE.

DÉRIVÉE :

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad \text{si } h \text{ est assez petit.}$$

LEMME (EN EXERCICE)

Si u est de classe C^2 au voisinage de x, alors

$$\left| \frac{du}{dx}(x) - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| \leq \left(\sup_{y \in [x, x+h_0[} \frac{|u''(y)|}{2} \right) h.$$

DÉFINITION

Une approximation est consistante d'ordre p s'il existe une constante C positive indépendante de h, t.q. cette erreur soit majorée par Ch^p.

PRINCIPE.

DÉRIVÉE :

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

LEMME (EN EXERCICE)

Si u est de classe C^3 au voisinage de x, alors

$$\left| \frac{du}{dx}(x) - \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \right| \leq \left(\sup_{y \in]x-h_0, x+h_0[} \frac{|u^{(3)}(y)|}{6} \right) h^2.$$

PRINCIPE.

DÉRIVÉE D'ORDRE 2 :

PROPOSITION

Si u est de classe C^4 au voisinage de x, alors

$$\left| \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \left(\sup_{y \in [x, x+h_0[} \frac{|u^{(4)}(y)|}{2} \right) h^2.$$

Plan

Problème.

Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1, \\ \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1. \end{cases}$$

Hypothèses : $f \in C([0,1])$, $c \in C([0,1])$, $c \geq 0$.
Résultat :

- il existe une unique solution $u \in C^2([0,1])$.
- Mais pas de forme explicite de la solution si $c \neq 0$.

Discrétisation du domaine : pour tout entier N,

$$x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

Discrétisation régulière : $x_i = ih$ avec $h = 1/(N+1)$ et $i = 0, \ldots, N+1$.

BUT : chercher en tout point x_i une valeur u_i t.q. $u_i \approx u(x_i)$. Donc

- $u_0 = g_0$, $u_{N+1} = g_1$,
- $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$.

APPROXIMATION : en chacun des sommets internes x_i :

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i);$$

$$-\frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} + c(x_i)u(x_i) \approx f(x_i);$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i \approx f(x_i), \qquad i \in \{1, \dots, N\}.$$

ÉCRITURE MATRICIELLE.

$A_h U = b_h$, avec $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $b_h \in \mathbb{R}^N$:

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c(x_2) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & c(x_N) \end{pmatrix}$$

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

ATTENTION AUX BORDS !

PROPRIÉTÉS DE A_h.

PROPOSITION

Si $c \geq 0$, A_h est symétrique et définie positive.

CONSÉQUENCE : U existe et est unique.

INÉGALITÉ DE STABILITÉ

Si $c \geq 0$, $\left\| (A_h)^{-1} \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$.

DÉFINITION

On appelle erreur de consistance du schéma la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique :

$$\varepsilon_h(u) = A_h \pi_h(u) - b_h, \quad \pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}.$$

Le schéma est consistant si $\lim\limits_{h \to 0} \|\varepsilon_h(u)\| = 0$.

Le schéma est consistant d'ordre p s'il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < h < h_0$, $\|\varepsilon_h(u)\| \leq Ch^p$.

Erreur de consistance.

Proposition

Supposons la solution u de classe C^4 sur $[0,1]$. Alors le schéma est consistant d'ordre 2 pour la norme infinie :

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y\in[0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

Théorème

Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution exacte de

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1, \\ \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1. \end{cases}$$

On suppose $u \in C^4([0,1])$. Soit $U \in \mathbb{R}^N$ la solution du schéma. Alors l'erreur de discrétisation, i.e. la différence $\pi_h(u) - U$, vérifie :

$$\|\pi_h(u) - U\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

Repose sur

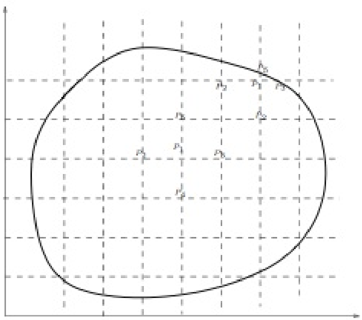
$$\pi_h(u) - U = -(A_h)^{-1} \varepsilon_h(u).$$

Plan

Problème de Laplace inhomogène :

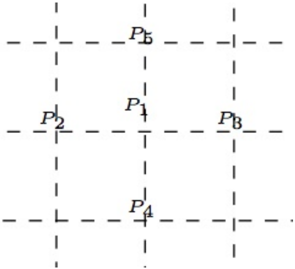
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Discrétisation : points alignés dans les directions x et y.



APPROXIMATION.

EN UN POINT RÉGULIER :

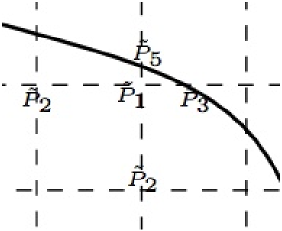


$$\Delta u(P_1) \approx \frac{u(P_2)+u(P_3)-2u(P_1)}{h_1^2} + \frac{u(P_5)+u(P_4)-2u(P_1)}{h_2^2}.$$

Si u de classe C^4, approximation d'ordre 2.

EXEMPLE : si Ω est un rectangle, tous les points sont réguliers.

EN UN POINT SINGULIER :



CORRECTION : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_1) + O(h) = \alpha u(\tilde{P}_2) + \beta u(\tilde{P}_1) + \gamma u(P_3)$.

Formule de Taylor :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\ -\alpha h + \gamma h' = 0,\ \alpha h^2/2 + \gamma h'^2/2 = 1.$$

Erreur de consistance en $O(h)$ et matrice du système linéaire non symétrique.

À résoudre EDO : $u' = f(u)$ sur $]0,1[$ avec $u(0) = u_0$.

SCHÉMAS D'EULER :

- EXPLICITE : $u'(x) \approx \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$, d'où
$$u(x+h) = u(x) + hf(u(x)).$$
- IMPLICITE : $u'(x) \approx \dfrac{u(x) - u(x-h)}{h}$, d'où
$$u(x+h) - hf(u(x+h)) = u(x) \Leftrightarrow u(x+h) = (Id - hf)^{-1}(u(x)).$$
- θ-SCHÉMA ($\theta \in [0,1]$) :
$$u(x+h) - (1-\theta)hf(u(x+h)) = u(x) + \theta hf(u(x)).$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR.

Soit u solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & \text{pour } x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \text{pour } t \in]0,T[. \end{cases}$$

THÉORÈME

Si $u_0 \in C(]0,1[)$, *il existe une unique solution* $u \in C^2(]0,T[\times]0,1[) \cap C([0,T] \times [0,1])$. *De plus*

- $u \in C^\infty(]0,T[\times]0,1[)$.
- *Si* $u_0 \geq 0$, $u(t,.) \geq 0$ *pour tout* $t \geq 0$.
- *Si* $u \in L^\infty(]0,1[)$, *alors* $u \in L^\infty(]0,T[\times]0,1[)$ *et* $\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$.

Discrétisation :

- $[0, T]$ divisé en $t_n = nk$, $n = 0, \ldots, M$, pas $k = T/M$,
- $[0, 1]$ divisé en $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$, pas $h = 1/(N+1)$.

En chaque point (t_n, x_i) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i) \approx \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{k}$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_i) \approx \frac{2u(t_n, x_i) - u(t_n, x_{i+1}) - u(t_n, x_{i-1})}{h^2}.$$

Approximation $u_i^{(n)}$ de $u(t_n, x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ et $n = 1, \ldots, M$.

DISCRÉTISATION :

- $[0, T]$ divisé en $t_n = nk$, $n = 0, \ldots, M$, pas $k = T/M$,
- $[0, 1]$ divisé en $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$, pas $h = 1/(N+1)$.

SCHÉMA : pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $n = 1, \ldots, M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \dfrac{2u_i^{(n)} - u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{h^2}(t, x) = 0, \\ \\ u_i^{(0)} = u_0(x_i), \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0. \end{array} \right.$$

DISCRÉTISATION :

- $[0, T]$ divisé en $t_n = nk$, $n = 0, \dots, M$, pas $k = T/M$,
- $[0, 1]$ divisé en $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$, pas $h = 1/(N+1)$.

SCHÉMA EXPLCITE car $u_i^{(n+1)}$ explicite en fonction de $(u_i^{(n)})_{i=1,\dots,N}$:

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \frac{k}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}).$$

PROPRIÉTÉS.

PROPOSITION

Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{k} \right| \leq Ck,$$

$$\left| -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_i) - \frac{2u(t_n, x_i) - u(t_n, x_{i+1}) - u(t_n, x_{i-1})}{h^2} \right| \leq Ch^2.$$

DÉFINITION

Un schéma est L^∞-stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.

PROPOSITION

Si $\frac{k}{h^2} \leq 1/2$, alors le schéma est stable : $\sup_{i,n} |u_i^{(n)}| \leq \|u_0\|_\infty$.

PROPRIÉTÉS.

THÉORÈME

Si la condition de stabilité est satisfaite, alors il existe $C \geq 0$ t.q. pour tout $n = 1, \ldots, M$:

$$\sup_{i=1,\ldots,N} \left| u(t_n, x_i) - u_i^{(n)} \right| \leq \sup_{i=1,\ldots,N} \left| u(0, x_i) - u_i^{(0)} \right| + TC(k + h^2).$$

ÉCRITURE MATRICIELLE.

NOTATIONS :

- $\lambda = k/h^2$.
- Pour $n = 1, \ldots, M$, $U^n = (u_i^{(n)})_{i=1,\ldots,N}$.
- $U^0 = (u_0(x_i))_{i=1,\ldots,N}$.

SYSTÈME LINÉAIRE : $U^n = AU^{n-1}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ -\lambda & 1-2\lambda & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -\lambda & 2 & -\lambda \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

REMARQUE : attention aux conditions de bord en $x = 0$ et $x = 1$.

θ-SCHÉMAS.

Pour $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} &= \frac{1-\theta}{h^2}\left(-2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}\right) \\ &+ \frac{\theta}{h^2}\left(-2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)}\right). \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS.

- Euler implicite si $\theta = 1$, Crank-Nicholson si $\theta = 1/2$.
- D'ordre 2 en espace. D'ordre 2 en temps si $\theta = 1/2$, d'ordre 1 sinon.
- Inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$. Sinon stable si

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}.$$