RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

CADRE.

DONNÉES :

- U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$,
- $f : U \to \mathbb{R}^m$ fonction continue.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :

$$y' = f(t, y), \ (t, y) \in U, \ t \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^m. \tag{E}$$

DÉFINITION (SOLUTION)

Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^m$ telle que

1. $\forall t \in I, \ (t, y(t)) \in U,$
2. $\forall t \in I, \ y'(t) = f(t, y(t)).$

CADRE.

DONNÉES :

- U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$,
- $f : U \to \mathbb{R}^m$ fonction continue.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :

$$y' = f(t, y), \ (t, y) \in U, \ t \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^m. \tag{E}$$

DÉFINITION (PROBLÈME DE CAUCHY)

Étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

SOLUTION MAXIMALE.

DÉFINITION

Soient $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.

DÉFINITION

On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$, avec $I \subsetneq \tilde{I}$.

THÉORÈME

Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).

SOLUTION GLOBALE.

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times U'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

DÉFINITION

Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

REMARQUE

Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

Rappelons qu'une fonction est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

THÉORÈME

Si $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, toute solution de (E), $y' = f(t, y)$, est de classe C^{k+1}.

Cylindres de sécurité.

Notations :

- $\| \ \|$ une norme (quelconque) sur $\mathbb{R}^m$,
- $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

Comme U est ouvert :

- il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$.

Notation :

- $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition

On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$, reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Cylindres de sécurité.

Comme U est ouvert :

- il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$.
- C_0 fermé et borné dans $\mathbb{R}^{m+1}$, donc compact.
- Donc f bornée sur C_0, i.e.

$$M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|f(t,y)\| < +\infty.$$

Notation :

- $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de demi-longueur $T \leq T_0$.

Lemme

Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right).$$

THÉORÈME DE CAUCHY-PEANO-ARZELA

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$, avec $T \leq \min(T_0, r_0/M)$, un cylindre de sécurité pour (E) $y' = f(t, y)$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.

COROLLAIRE

Par tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E).
De plus, l'intervalle de définition I de toute solution maximale est ouvert (mais en général il n'y a pas unicité de ces solutions maximales).

Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition

f est localement lipschitzienne en y si pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne en y sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$.

Unicité globale.

Théorème

Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I, alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I.

Corollaire

Si f est localement lipschitzienne en y sur U, pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ et une seule.

Géométriquement, deux solutions maximales ne peuvent pas se couper.

HYPOTHÈSE DE LIPSCHITZ SEMI-GLOBALE

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^m$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^m$. Alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).

EDO d'ordre supérieur à 1.

- Système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$:

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}), \qquad (1)$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$.

- Solution de (1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ = application $y : I \to \mathbb{R}^m$ p-fois dérivable, telle que
  1. $\forall t \in I$, $y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t) \in U$;
  2. $\forall t \in I$, $y^{(p)}(t) = f'(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$.

- Si f est de classe C^k, les solutions y sont de classe C^{k+p}.

EDO D'ORDRE SUPÉRIEUR À 1.

- Système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$:

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(p-1)}), \tag{1}$$

- Équivalent au système différentiel d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y_0' & = & Y_1 \\ Y_1' & = & Y_2 \\ & \vdots & \\ Y_{p-2}' & = & Y_{p-1} \\ Y_{p-1}' & = & f(t, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}) \end{array} \right. \tag{2}$$

si l'on pose $Y_0 = y$, $Y_1 = y', \ldots$

EDO D'ORDRE SUPÉRIEUR À 1.

- Système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$:

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(p-1)}), \tag{1}$$

- Équivalent au système différentiel d'ordre 1 : $Y' = F(t, Y)$ avec

$$\begin{aligned}
&Y = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p \\
&F = (F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}) : U \to (\mathbb{R}^m)^p \\
&F_0(t, Y) = Y_1, \ldots, F_{p-2}(t, Y) = Y_{p-1}, \\
&F_{p-1}(t, Y) = f(t, Y).
\end{aligned}$$

REMARQUE

Pour résoudre le problème de Cauchy lié au système (2), il faut connaître $Y(t_0) = (Y_0(t_0), Y_1(t_0), \ldots, Y_{p-1}(t_0))$, donc disposer des données

$$y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(p-1)}(t_0),$$

c'est-à-dire les valeurs à l'instant t_0 des $p-1$ premières dérivées de y.

EDO LINÉAIRES.

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre dans $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y + B(t),$$

où

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

THÉORÈME

Pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il passe une solution maximale unique, définie sur I tout entier.

- Système sans second membre, i.e. $B = 0$: ensemble des solutions maximales = $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m : l'application qui à Y solution maximale associe $Y(t_0)$, est un isomorphisme linéaire.

- Dans le cas général, si $Y_{(0)}$ est une solution globale, alors l'ensemble des solutions est de la forme $Y_{(0)} + Z$ avec Z solution maximale du système sans second membre.

EDO LINÉAIRES.

Système sans second membre résoluble explicitement au moins dans les cas suivants :

- si A est constante, alors les solutions sont de la forme $Y(t) = \exp((t - t_0)A)Y(t_0)$, où exp désigne l'exponentielle de matrice définie sur $\mathbb{R}^{m\times m}$.
- si $A(t)A(u) = A(u)A(t)$ pour tous t, u dans I, alors

$$Y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) Y(t_0) = R(t, t_0)Y(t_0).$$

Une solution particulière s'obtient par la méthode dite de *variation des constantes*. On la cherche sous la forme

$$Y_{(0)}(t) = R(t, t_0)V(t) \Rightarrow R(t, t_0)V'(t) = B(t).$$

On obtient alors

$$Y_{(0)}(t) = R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)du = \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du.$$

Deux cas particuliers.

Équation scalaire d'ordre 1 : $y' + a(t)y = b(t)$.

- Solutions homogènes : $y(t) = \lambda \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) = \lambda z(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Solution particulière : $y_{(0)}(t) = \lambda(t)z(t)$ avec $\lambda'(t) = b(t)/z(t)$.

Équation scalaire d'ordre 2 : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

- Solutions homogènes : $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et y_1 et y_2 indépendantes.
- Solution particulière : $y_{(0)}(t) = \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda'(t)y_1(t) + \mu'(t)y_2(t) & = & 0, \\ \lambda'(t)y_1'(t) + \mu'(t)y_2'(t) & = & c(t). \end{array} \right.$$