ESPACES FONCTIONNELS : UN PEU DE TOPOLOGIE.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

PLAN

1. RAPPELS DE TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}^d$

2. ESPACES DE FONCTIONS RÉGULIÈRES

3. ESPACES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITIONS :

- $\|.\|$: norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, i.e. si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}.$$

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ si :

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d,\ \|y - x\| < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

- Ω fermé de $\mathbb{R}^d$ si son complémentaire Ω^c est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
- La fermeture de Ω, noté $\overline{\Omega}$, est le plus petit fermé contenant Ω.
- L'intérieur de Ω, noté $\overset{\circ}{\Omega}$, est le plus grand ouvert contenu dans Ω.
- Le bord de Ω, noté $\partial\Omega$, est défini par : $\overline{\Omega} \cap \left(\overset{\circ}{\Omega}\right)^c$.

RÉGULARITÉ D'UN OUVERT.

DÉFINITION

Si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, *et si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, *on dit que* Ω *est de classe* C^k *s'il existe une fonction* $\rho \in C^k(\mathbb{R}^d)$ *telle que*

- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) < 0\}$,
- $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = 0\}$,
- *grad* $\rho(x) = \nabla\rho(x) \neq 0$ *pour* $x \in \partial\Omega$.

LEMME

Un ouvert Ω est toujours de classe C^0. Indication : utiliser ρ distance signée entre x et Ω :

$$\rho(x) = \begin{cases} d(x,\Omega) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in \Omega\} & \text{si } x \notin \Omega, \\ -d(x,\Omega^c), & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

et montrer qu'elle est lipschitzienne.

Théorème

Dans $\mathbb{R}^d$, les compacts sont les ensembles fermés et bornés.

Proposition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| \leq i\} \cap \left\{x \in \Omega,\ d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i}\right\}.$$

On a alors :

1. *K_i est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^d$ et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$.*
2. $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$.
3. *Pour tout compact K de Ω, il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_{i_0}$.*

PLAN

1 RAPPELS DE TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}^d$

2 ESPACES DE FONCTIONS RÉGULIÈRES

3 ESPACES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

Espaces $C^k(\Omega)$.

Définition

$C^k(\Omega)$: ensemble des fonctions k fois différentiables dans Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω.
Pour $k = 0$, c'est l'espace des fonctions continues.

Définition par récurrence :

$$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n \right\}, \quad k \geq 1.$$

ESPACES $C^k(\Omega)$.

DÉFINITION

$C^k(\Omega)$: ensemble des fonctions k fois différentiables dans Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω.
Pour $k = 0$, c'est l'espace des fonctions continues.

NOTATIONS :

- un multi-indice α est un n-uplet d'entiers, i.e. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$;
- si α est un multi-indice, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ est la longueur de α ;
- enfin $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

$C^k(\Omega)$: espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout α, $|\alpha| \leq k$, $x \mapsto \partial^\alpha f(x)$ existe et appartient à $C^0(\Omega)$.

TOPOLOGIE DE $C^k(\Omega)$.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^k(\Omega)$, posons

$$p_i(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_i} |\partial^\alpha f(x)|.$$

LEMME

p_i est bien défini et vérifie tous les axiomes d'une norme sauf que $p_i(f) = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Pour f et g dans $C^k(\Omega)$ on pose

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(f-g)}{1 + p_i(f-g)}. \tag{1}$$

PROPOSITION

$d(f,g)$ est bien défini et que (1) définit une distance sur $C^k(\Omega)$.

$(C^k(\Omega), d)$ ESPACE COMPLET.

PROPOSITION

Si (f_n) est une suite de $C^k(\Omega)$ et $f \in C^k(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall|\alpha| \leq k, \quad (\partial^\alpha f_n) \textit{ converge uniformément} \\ \textit{sur tout compact de } \Omega \textit{ vers } \partial^\alpha f. \end{array} \right.$$

DÉFINITION

Un espace vectoriel E muni d'une distance d est complet si toute suite de Cauchy converge dans E. Une suite (e_n) est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

$$p \geq N \textit{ et } q \geq N \Longrightarrow d(e_p, e_q) \leq \varepsilon.$$

THÉORÈME

$(C^k(\Omega), d)$, où d est la distance définie par (1) est un espace complet.

ESPACE $C^\infty(\Omega)$.

DÉFINITION : $C^\infty(\Omega) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.

TOPOLOGIE :

$$p_i(f) = \sum_{|\alpha|\le i} \sup_{K_i} |\partial^\alpha f(x)|, \quad i = 1, 2, \dots$$

et

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)}.$$

THÉORÈME

d définit une distance sur $C^\infty(\Omega)$ et $(C^\infty(\Omega), d)$ est complet.
De plus si (f_n) est une suite de $C^\infty(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad (\partial^\alpha f_n) \text{ converge uniformément} \\ \text{sur tout compact de } \Omega \text{ vers } \partial^\alpha f. \end{array} \right.$$

ATTENTION.

PROPOSITION

Pour $C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$, munis de la distance d, il n'existe pas de norme N telle que pour tout (f,g), $d(f,g) = N(f-g)$.

THÉORÈME (PROPRIÉTÉ DE MONTEL)

Les fermés bornés de $C^\infty(\Omega)$ sont compacts (ce qui est faux dans $C^k(\Omega)$).

ESPACES $C_b^k(\Omega)$.

DÉFINITION

$C_b^k(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel des éléments de $C^k(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées sur Ω.
On définit sur cet espace

$$\|f\|_{C_b^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

THÉORÈME

$\|.\|_{C_b^k(\Omega)}$ est une norme sur l'espace $C_b^k(\Omega)$, et cet espace muni de cette norme est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace normé complet pour la distance induite par cette norme.

Définition

Le support d'une fonction f est supp(f) $= \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, \; f(x) \neq 0\}}$.

Définition

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in C_c^k(\Omega)$ *si* $f \in C^k(\Omega)$ *et si le support de* f *est compact inclus dans* Ω.

Espaces $C^k(F)$.

F est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition

f est dans $C^k(F)$ s'il existe $\tilde{f} \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$ telle que $\tilde{f} = f$ sur F.

Proposition

La quantité

$$\|f\|_{C^k(F)} = \inf\left\{\|\tilde{f}\|_{C_b^k(\mathbb{R}^d)}, \quad \tilde{f} \in C_b^k(\mathbb{R}^d), \quad \tilde{f} = f \text{ sur } F\right\}$$

est une norme sur $C^k(F)$.

Théorème

$C^k(F)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

ESPACES $C^k(F)$.

Si F est un compact de $\mathbb{R}^d$ et que $k = 0$, $C^0(F)$ est muni de la convergence uniforme :

$$N(f) = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

THÉORÈME

Si $f \in C^0(F)$, alors il existe $\tilde{f} \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

1. $\tilde{f} = f$ sur F,
2. $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|$.

PLAN

1. RAPPELS DE TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}^d$

2. ESPACES DE FONCTIONS RÉGULIÈRES

3. ESPACES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

ESPACES $L^p(\Omega)$.

Soit Ω une partie (mesurable) de $\mathbb{R}^d$. Pour $p \in [1, +\infty[$,

- $L^p(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (mesurables) telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty$$

- $L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions (mesurables) et bornées (presque partout).

NORMES :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|f\|_\infty = \inf\{C,\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

THÉORÈME

$\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ définissent une norme respectivement sur $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$, qui les rendent complets.

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de L^1. On suppose que

1. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,
2. il existe $g \in L^1$ telle que pour tout n, $|f_n(x)| \le g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f - f_n\|_1 \to 0$.

Exemple d'utilisation. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$. On suppose que

- pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$;
- pour tout $y \in \Omega$, $x \mapsto f(x, y)$ est continue en x_0 ;
- il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x, y)| \le g(y)$.

Alors la fonction $x \mapsto \int_\Omega f(x, y)dy$ est continue en x_0.

Densités.

Théorème de densité

L'espace $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\forall f \in L^1(\Omega), \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in C_c(\Omega),\ \text{tel que } \|f - g\|_1 \leq \varepsilon.$$

Théorème

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

- $C_c^k(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$.
- $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.
- $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$.

Remarque

Attention : $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$!