ESPACES DE SOBOLEV,
FORMULATION VARIATIONNELLE DES EDP.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

Plan du cours

1. Espaces de Hilbert
2. Espaces de Sobolev
   - Premières définitions et propriétés
   - Inégalités de Sobolev
   - Espace $H_0^1(\Omega)$
   - Notion de trace au bord
3. Formulation variationnelle
   - Problème de Dirichlet
   - Régularité des solutions faibles
   - Équation de la chaleur

PLAN

1. ESPACES DE HILBERT

2. ESPACES DE SOBOLEV
   - Premières définitions et propriétés
   - Inégalités de Sobolev
   - Espace $H_0^1(\Omega)$
   - Notion de trace au bord

3. FORMULATION VARIATIONNELLE
   - Problème de Dirichlet
   - Régularité des solutions faibles
   - Équation de la chaleur

DÉFINITIONS.

DÉFINITION

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{1/2}$
Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique, définie positive.

THÉORÈME DE PROJECTION

Soit $K \subset H$, H Hilbert, K convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$ unique t.q.

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| = \min_{w \in K} \|u - w\|.$$

De plus v caractérisé par

$$\boxed{v \in K, \qquad \langle u - v, w - v\rangle \leq 0, \forall w \in K.}$$

Théorème de Stampacchia.

Définition

Une forme bilinéaire $A : H \times H \to \mathbb{R}$ est

- *continue s'il existe C t.q. pour tout (u, v), $|A(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$;*
- *coercive s'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour tout u, $A(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$.*

Théorème

Soit A bilinéaire continue et coercive. Soit K convexe fermé non vide. Pour $\phi \in H'$, il existe $u \in K$ unique t.q.

$$\forall v \in K, \; A(u, v - u) \geq \phi(v - u).$$

Si A est symétrique, alors u caractérisé par

$$\boxed{u \in K, \qquad \frac{1}{2}A(u, u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}A(v, v) - \phi(v) \right).}$$

Théorème de Lax-Milgram.

Théorème

Soit A bilinéaire continue et coercive. Pour $\phi \in H'$, il existe $u \in H$ unique t.q.

$$\forall v \in H, \; A(u,v) = \phi(v).$$

Si A est symétrique, alors u caractérisé par

$$\boxed{u \in H, \qquad \frac{1}{2}A(u,u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}A(v,v) - \phi(v) \right).}$$

Plan

INTRODUCTION.

PROBLÈME : pour $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

INTÉGRATION PAR PARTIES : si u et Ω sont assez réguliers, pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla\phi(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

RÉGULARITÉ de u : $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^d \to$ espaces de Sobolev.

PLAN

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

DÉFINITION

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \exists g_1, \ldots, g_d \in L^2(\Omega) \text{ t.q.} \right.$$
$$\left. \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \phi,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

On pose $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.

NORME : pour $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 .$$

- $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

- Si $u \in L^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, et si $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors les deux définitions de dérivée coïncident.
- Norme équivalente : $\left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{d} \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}$.
- Espaces de fonctions-tests : $C_c^1(\Omega)$ convient aussi.
- $C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et si Ω borné, $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Règles de dérivation.

Proposition (Produit)

Soient u et v dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Alors $uv \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Proposition (Composition)

Soient $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.q. $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$; et $u \in H^1(\Omega)$. Alors $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

RÈGLES DE DÉRIVATION.

PROPOSITION (CHANGEMENT DE VARIABLES)

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $H : \Omega' \to \Omega$ une application bijective, $x = H(y)$ t.q.

$$H \in C^1(\Omega'),\ H^{-1} \in C^1(\Omega),\ Jac\, H \in L^\infty(\Omega'),\ Jac\, H^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \circ H \in H^1(\Omega')$ et

$$\forall j = 1, \ldots, d,\ \frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y).$$

Espaces $H^m(\Omega)$.

Soit $m \geq 2$ entier.

Définition

Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ défini par récurrence

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &= \left\{ u \in H^{m-1}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \text{ t.q. } |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ t.q.} \right. \\ & \qquad \left. \int_\Omega u \partial^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

On pose $\partial^\alpha u = g_\alpha$.

Norme : pour $u \in H^m(\Omega)$, $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2$.

ESPACES $H^m(\Omega)$.

PROPOSITION

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

PLAN

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $2 < d$.

Théorème (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)

Si $2 < d$, alors

$$H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \text{ avec } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$

Il existe $C = C(p, N)$ t.q.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Corollaire

Si $2 < d$, alors $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $q \in [2, p^*]$ avec injection continue.

Corollaire

$H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^q(\mathbb{R}^2)$, pour tout $q \in [2, +\infty[$ avec injection continue.

THÉORÈME (MORREY)

Alors

$$H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R}),$$

avec injection continue. De plus pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \text{p.p. } x, y \in \mathbb{R}.$$

COROLLAIRE (ESPACES H^m)

Soient $m \geq 1$ entier. Avec injections continues :

- *Si* $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} > 0$, *alors* $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ *où* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d}$.
- *Si* $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} = 0$, *alors* $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.
- *Si* $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} < 0$, *alors* $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

De plus si $m - \dfrac{d}{2} > 0$ *non entier,* $k = [m - d/2]$ *et* $\theta = m - d/2 - k$, $H^m(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ *et :*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^m}, \ \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k$$

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{H^m}|x - y|^\theta, \quad \text{p.p. } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Hypothèses :

- Ω ouvert de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné,
- $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > 0\}$.

Corollaire

Avec injections continues :

- *Si $2 < d$, alors $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{d}$.*
- *Si $d = 2$, alors $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.*
- *Si $d = 1$, alors $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

De plus si $d = 1$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{H^1}|x - y|^{1/2}, \quad p.p.\ x, y \in \Omega.$$

Donc $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Hypothèses :

- Ω ouvert de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné,
- $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \ x_d > 0\}$.

Corollaire

Les conclusions du corollaire (Espaces H^m) restent vraies en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par Ω.

Plan

DÉFINITION

$H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

PROPOSITION

$H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

REMARQUE

- Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.
- En général, $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega)$ est aussi la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$.

Comportement au bord.

Théorème

Soit Ω ouvert de classe C^1. Soit $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Alors :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Leftrightarrow u \in H^1_0(\Omega).$$

Proposition

On suppose Ω de classe C^1. Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors équivalence entre

- $u \in H^1_0(\Omega)$;
- *il existe une constante C t.q. :*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_2, \quad \forall \phi \in C^1_c(\mathbb{R}^d), \forall i = 1, \ldots, d;$$

- *la fonction $\overline{u}(x) = u(x)$ pour $x \in \Omega$ et $\overline{u}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ est dans $H^1(\Omega)$ et $\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}$.*

Inégalité de Poincaré.

Théorème

Soit Ω ouvert borné (ou borné dans une direction). Alors il existe $C = C(\Omega)$ t.q.

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Donc $\|\nabla u\|_2$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.
Autrement dit, $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_2$ équivalente à $\|u\|_{H^1}$.

Plan

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d_+$.

Lemme

Il existe une constante C t.q. pour tout $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| u(x', 0) \right|^2 dx' \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Définition

$\gamma_0 : C^1_c(\mathbb{R}^d) \to L^2(\partial\Omega)$ qui à u associe $u|_{\partial\Omega}$, avec $\partial\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, est continu.
Donc se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Cet opérateur est la trace sur $\partial\Omega$.

Si Ω est une ouvert borné de classe C^1, alors il existe $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ opérateur linéaire continu t.q.

1. noyau de $\gamma_0 = H^1_0(\Omega)$;
2. image de γ_0 : $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ et

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$W^{1/2,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{(d+1)/2}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

3. Formule de Green : pour u et v dans $H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} (uv)(\sigma)(\nu.e_i)(\sigma) d\sigma.$$

Pour u et v dans $H^2(\Omega)$:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) v(\sigma) d\sigma.$$

PLAN

Plan

PROBLÈME DE DIRICHLET HOMOGÈNE : pour Ω ouvert borné de classe C^1, $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

DÉFINITION

- *Une solution classique est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (1).*
- *Une solution faible de (1) est une fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ t.q. :*

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv.$$

LEMME

Toute solution classique est une solution faible.

PROBLÈME : pour Ω ouvert borné de classe C^1, $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ A(u,v) = L(v), \tag{2}$$

avec

$$A(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega cuv, \text{ et } L(v) = \int_\Omega fv.$$

DÉFINITION

Le problème (2), dont on cherche une solution dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, est appelé formulation variationnelle du problème (1).

PROPOSITION

Si u est solution de (2), alors u est solution de (1) presque partout.

Problème de Dirichlet homogène.

Hypothèses :

1. $H = H^1_0(\Omega)$: espace de Hilbert.
2. $L(v) = \int_\Omega fv$: forme linéaire continue sur H.
3. $A(u, v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v + \int_\Omega cuv$: forme bilinéaire continue et coercive si
   - c est positive,
   - ou $\|c^-\|_\infty < \frac{1}{K_P^2}$, où K_P est la constante dans l'inégalité de Poincaré.

Théorème (application de Lax-Milgram)

Il existe une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ au problème (2). De plus $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

PROBLÈME DE DIRICHLET NON HOMOGÈNE.

PROBLÈME : Ω ouvert borné de classe C^1, $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

HYPOTHÈSE

Il existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma_0 \tilde{g} = g$. C'est le cas si :

- $g \in C^1(\partial\Omega)$
- $g \in W^{1/2,2}(\Omega) = H^{1/2}(\Omega)$.

NOTATION : $K = \{v \in H^1(\Omega),\ v - \tilde{g} \in H^1_0(\Omega)\}$.

DÉFINITION

On appelle solution faible de (3) toute fonction $u \in K$ t.q.

$$\forall v \in H^1_0(\Omega),\ \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + cuv) = \int_\Omega fv.$$

PROPOSITION

$u \in K$ solution faible de (3) si et seulement si

$$\forall v \in K,\ A(u, v-u) \geq L(v-u).$$

- $(\Rightarrow)$: pour $v \in K$, $v - u \in H_0^1(\Omega)$.
- $(\Leftarrow)$: avec $v = u \pm w$ et $w \in H_0^1(\Omega)$, $v \in K$ et

$$\int_\Omega (\nabla u.(\pm \nabla w) + cu(\pm w)) = \int_\Omega f(\pm w).$$

Application du théorème de Stampacchia.

Hypothèses :

1. $H = H^1(\Omega)$: espace de Hilbert.
2. $K = \{v \in H^1(\Omega),\ v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}$ convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$.
3. $L(v) = \int_\Omega fv$: forme linéaire continue sur H.
4. $A(u, v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + cuv)$: forme bilinéaire continue et coercive si c est minorée par une constante strictement positive.

Théorème

Il existe un unique $u \in K$ unique t.q.

$$\forall v \in K,\ A(u, v - u) \geq L(v - u).$$

AUTRE MÉTHODE PAR RELÈVEMENT.

RELÈVEMENT : si on sait calculer $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma_0 \tilde{g} = g$, alors

- chercher u sous la forme $u = \tilde{u} + \tilde{g}$ avec $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$,
- avec $\tilde{u}$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (\nabla \tilde{u}.\nabla v + c\tilde{u}v) = \int_\Omega (f + \nabla \tilde{g} + c\tilde{g})v$$

  et $f + \nabla \tilde{g} + c\tilde{g} \in L^2(\Omega)$.

EN DIMENSION 1 : $\tilde{g}(x) = a + (b - a)x$.

PLAN

DANS H^{m+2} ET C^2.

THÉORÈME

Soit Ω un ouvert de classe C^2 avec $\partial\Omega$ borné (ou $\Omega = \mathbb{R}^d_+$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifiant :

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv) = \int_\Omega fv.$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

COROLLAIRE

Si Ω est de classe C^{m+2} et si $f \in H^m(\Omega)$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

COROLLAIRE

Si $m > d/2$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

THÉORÈME

Soient Ω un ouvert de classe C^1, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv) = \int_\Omega fv.$$

Alors

$$\min \left(\inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} f \right) \leq u(x) \leq \max \left(\sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} f \right).$$

Plan

DONNÉES :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe C^∞ avec $\partial\Omega$ borné ;
- $Q =]0, T[\times\Omega$, $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$;
- $u_0 \in L^2(\Omega)$;
- $f \in L^2(Q)$.

PROBLÈME : trouver $u : [0, +\infty[\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{sur} \quad Q, \tag{4}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{5}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega. \tag{6}$$

POINT DE VUE : une solution faible sera vue comme une fonction $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$, avec $u(t)(x) = u(t, x)$.

DÉFINITION

Une fonction u telle que

- $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,
- $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$,

est une solution faible du problème (4), (5) et (6) si

1. *pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$ *et presque tout* $t \in [0, T]$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)dx;$$

2. $u(0, x) = u_0(x)$.

Existence et unicité.

Théorème

Il existe une unique fonction u vérifiant (4), (5) et (6) et

- $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$,
- $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Théorème

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, alors la solution faible vérifie $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ et $u \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$, avec

$$\operatorname*{esssup}_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \left(\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt$$

$$\leq C \left(\int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

ÉQUATION HOMOGÈNE

HYPOTHÈSE : $f \equiv 0$.

THÉORÈME

Il existe une unique fonction u vérifiant (4), (5) et (6) et

- $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C(]0,T[;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$,
- $u \in C^1(]0,T[;L^2(\Omega))$;
- $u \in C^\infty([\varepsilon, T[\times\overline{\Omega})$, pour tout $\varepsilon > 0$;
- $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ avec

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Si de plus $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, alors $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$.

RÉGULARITÉ.

THÉORÈME

Supposons que $u_0 \in H^2(\Omega)$ et $\partial_t f \in L^2(\Omega)$. Alors

- $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$;
- $\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$;
- $\partial_t^2 u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$,

les normes dans ces espaces étant contrôlées par la norme de $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et la norme de $u_0 \in H^2(\Omega)$.

Régularité.

Régularité supérieure

Supposons que $u_0 \in H^{2m+1}(\Omega)$ et $\partial_t^k f \in H^{2m-2k}$ pour $k = 0, \ldots, m$.
Supposons que les relations de compatibilité soient satisfaites :

- $u_0 \in H_0^1(\Omega)$;
- $g_1 = f(0, .) + \Delta u_0 \in H_0^1(\Omega)$;
- etc.
- $g_m = \partial_t^{m-1} f(0, .) + \Delta g_{m-1} \in H_0^1(\Omega)$.

Alors pour tout $k = 0, \ldots, m$: $\partial_t^k u \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(\Omega))$.

Proposition

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty([\varepsilon, T] \times \overline{\Omega})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

RÉGULARITÉ.

POUR L'ÉQUATION HOMOGÈNE :

RÉGULARITÉ SUPÉRIEURE

Supposons que $u_0 \in H^k(\Omega)$ pour tout k et vérifie :

$$u_0 = \Delta u_0 = \ldots = \Delta^j u_0 = \ldots = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \ \forall j.$$

Alors $u \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$.