Introduction : EDP et finance.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

PLAN DU COURS

1. MODÈLE ET ÉQUATION DE BLACK SCHOLES

2. QUELQUES EXTENSIONS

PLAN

1. MODÈLE ET ÉQUATION DE BLACK SCHOLES

2. QUELQUES EXTENSIONS

ÉVALUATION ET COUVERTURE DE PRODUITS DÉRIVÉS.

GESTION DE PORTEFEUILLE :

- suivre le prix de marché de l'actif S_t (action, taux, commodité, etc.) ;
- gérer un portefeuille autofinançant de valeur V_t de la valeur initiale la prime π_0 ;
- surveiller le P&L final : $V_T - h(S_T)$ (tracking error), où $h(S_T)$ valeur (ou payoff) à la maturié T du contrat ;
- trouver π_0^* qui minimise le P&L (optimisation de portefeuille).

BLACK ET SCHOLES (1973) :

- π_0^* : prix du contrat à la date initiale ;
- portefeuille résultant : portefeuille de couverture ;
- Absence d'opportunité d'arbitrage : si P&L final nul, alors à toute date intermédiaire, prix du produit = valeur du portefeuille de couverture.

MODÈLE ET ÉQUATION DE BLACK ET SCHOLES.

PARAMÈTRES :

- $r > 0$: taux d'intérêt (non risqué) ;
- $\sigma > 0$: volatilité de l'actif ;
- $T > 0$: date de maturité du contrat ;
- $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: payoff du contrat.

CONTRATS TYPES

- Option d'achat : $h(x) = (x - K)^+ = \max(x - K, 0)$ avec K prix d'exercice.
- Option de vente : $h(x) = (K - x)^+$.
- Option digitale : $h(x) = \mathbf{1}_{[K,+\infty[}(x)$.

Théorème

Le contrat est duplicable par un portefeuille dont la valeur à la date t est $v(t, S_t)$, où v est solution de : pour $(t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + rx\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} - rv(t,x) = 0, \\ v(T,x) = h(x). \end{cases}$$

De plus il faut placer à chaque instant

- $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial x} v(t, S_t)$ sur l'actif (Delta du produit dérivé),
- $v(t, S_t) - \dfrac{\partial}{\partial x} v(t, S_t)$ au taux r.

MODÈLE ET ÉQUATION DE BLACK ET SCHOLES.

PROPOSITION (EN EXERCICE)

$v(t,x) = e^{rt} u\left(t, \frac{1}{\sigma}\left(\ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})t\right)\right)$ avec u solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, \\ \\ u(T,x) = e^{-rT} h\left(\exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma x\right)\right). \end{cases}$$

DÉFINITION

L'équation satisfaite par u est appelée équation de la chaleur avec donnée finale.

BUTS DU COURS :

- théorique : existence, unicité des solutions.
- numérique : calcul de la solution, quelles sont les difficultés.

LES GRECQUES : sensibilités par rapport aux paramètres :

- Delta = $\Delta = \dfrac{\partial v}{\partial x}$;
- Gamma = $\Gamma = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$;
- Theta = $\Theta = \dfrac{\partial v}{\partial t}$;
- Vega = $\dfrac{\partial v}{\partial \sigma}$;
- Rho = $\rho = \dfrac{\partial v}{\partial r}$.

Importance capitale dans des modèles plus aboutis.

AVANTAGES ET LIMITES DU MODÈLE.

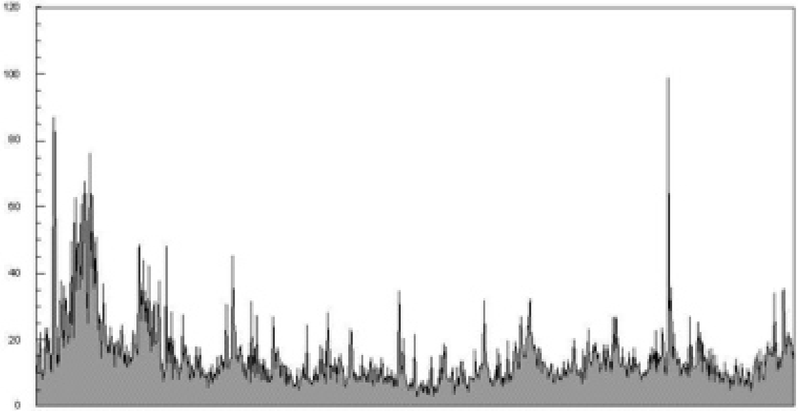
AVANTAGES :

- Formules d'évaluation fermées (voir cours sur l'équation de la chaleur).
- Grecques calculables facilement.
- Très simple à résoudre numériquement (voir cours différences et élémens finis).

INCONVÉNIENTS :

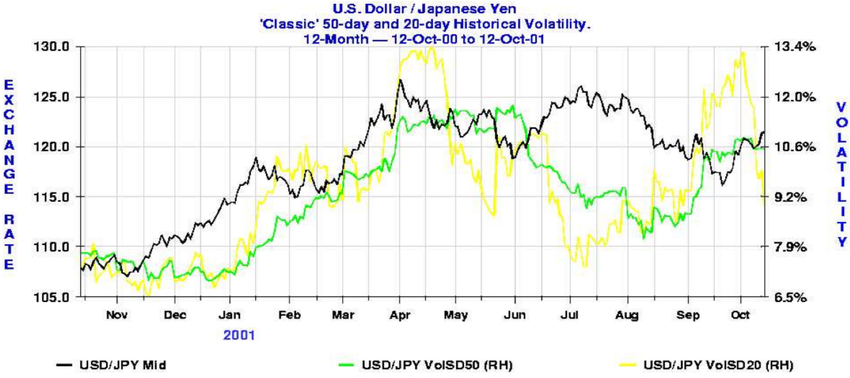
- Dépend (fortement) de σ non observable.
- Suppose la volatilité constante.

STANDARD AND POORS (S&P) 500 : de janvier 1928 à août 1999.



VOLATILITÉ HISTORIQUE.

COURS DU YEN : par rapport au dollar d'octobre 2000 à octobre 2001.



Volatilité implicite.

Marché liquide : deux prix pour une option d'achat de strike K et de maturité T :

- $C^{BS}(x, t, T, K, \sigma)$: prix calculé via Black-Scholes ;
- $C^{obs}(x, t, T, K)$: prix de marché fixé via l'offre et la demande.

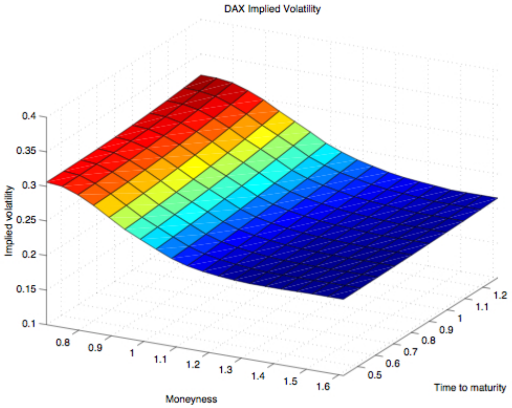
Problème d'inversion :

$$\boxed{C^{obs}(x, t, T, K) = C^{BS}(x, t, T, K, \sigma^{impl}).}$$

Comparaison volatilité et volatilité implicite.

Standard and Poors (SP) 500 : vol et vol implicite sur un an.

Black Scholes : volatilité constante incompatible avec le phénomène de smile : dépendance par rapport à T et K.



Plan

1. Modèle et équation de Black Scholes

2. Quelques extensions

OPTIONS SUR MULTI SOUS-JACENTS.

- Version multi-dimensionnelle de l'équation de Black-Scholes : pour $(t, x) \in [0, T] \times (\mathbb{R}_+^*)^d$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \Sigma_{i,j} x_i x_j \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + r \displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} - rv(t,x) = 0, \\ \\ v(T,x) = h(x). \end{cases}$$

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$: matrice symétrique positive dite de covariance.
- S'applique aux options sur plusieurs sous-jacents (dites panier).

▶ DIFFICULTÉ NUMÉRIQUE : la dimension.

NON LINÉARITÉ.

- Pénalisation de la revente instantanée :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - rv(t,x) + \gamma\left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right)^- = 0.$$

- Taux d'emprunt R différent du taux court r :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - rv(t,x) + (R-r)\left(v(t,x) - \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right)^- = 0.$$

► DIFFICULTÉS THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE : les termes non linéaires.

MODÈLE DE FOUQUE-PAPANICOLAOU-SIRCAR (2000) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r(t)\left(x \frac{\partial v}{\partial x} - v\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \rho\beta f(y) x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\alpha(m-y) - \beta\rho \frac{\mu - r(t)}{f(y)}\right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

- μ : dérive du sous-jacent,
- $f(y)^2$: volatilité de sous-jacent,
- ρ : corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité,
- $\beta > 0$: volatilité de la volatilité,
- $f(m)^2$: volatilité moyenne limite quand $t \to +\infty$ ($m > 0$),
- $\alpha > 0$: vitesse de retour à la moyenne.

▶ DIFFICULTÉ NUMÉRIQUE : la dimension.

Définition : peuvent s'exercer à n'importe quelle date entre 0 et la maturité T.

Modèle de Black Scholes : pour $(t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}_+^*$

$$\max\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r(x\frac{\partial v}{\partial x} - v), h(x) - v(t,x)\right] = 0$$

avec $v(T,.) = h$.

Définition

On parle d'inégalité variationnelle.

- **Difficultés :** inégalités, frontière libre $\simeq$ conditions de bord.

OPTIONS PERPÉTUELLES.

DÉFINITION : américaines sans date de maturité T.

MODÈLE DE BLACK SCHOLES : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial v}{\partial x} - v\right) = 0$$

+ conditions de bord...

DÉFINITION

On trouve une équation différentielle ordinaire.