ESPACES DE BANACH, SÉRIES DE FOURIER, ESPACES DE HILBERT.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

PLAN

1. ESPACES DE BANACH
2. SÉRIES DE FOURIER
3. ESPACES DE HILBERT
   - Dual d'un espace de Hilbert
   - Bases hilbertiennes

RAPPELS :

DÉFINITION

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $\forall x \in E, \ p(x) \geq 0$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
3. $\forall (x, y) \in E^2, \ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(inégalité triangulaire)* ;
4. $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

DÉFINITION

Un espace de Banach est un espace vectoriel E muni d'une norme p qui le rende complet pour la distance associée $d(x, y) = p(x - y)$.

EXEMPLES.

- $C([0,1])$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
- $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.
- l^p, $1 \leq p < +\infty$:
  - ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$.
  - norme $\|u\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$.
- l^∞ :
  - ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées.
  - norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

THÉORÈME

Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ application linéaire. Alors équivalence entre :

1. T est continue sur E ;
2. T est continue en 0 ;
3. T est lipschitzienne ;
4. il existe $C_T \geq 0$ t.q. pour tout $x \in E$, $\|Tx\|_F \leq C_T \|x\|_E$.

DÉFINITION

La norme de T est définie par

$$|||T||| = \sup\{\|Tx\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}.$$

DÉFINITION

La norme de T est définie par

$$|||T||| = \sup\{\|Tx\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}.$$

PROPOSITION

$|||.|||$ *est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues.*

PROPOSITION

Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de $|||.|||$ est de Banach.

DÉFINITION

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace dual de E, noté E'.

PLAN

1. ESPACES DE BANACH
2. SÉRIES DE FOURIER
3. ESPACES DE HILBERT
   - Dual d'un espace de Hilbert
   - Bases hilbertiennes

DÉFINITION

Pour que $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ soit C^k par morceaux sur $[a,b]$, il faut et il suffit qu'il existe

- *une subdivision $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b)$,*
- *des fonctions f_i, $i = 0, \ldots, n-1$, telles que f_i soit de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$,*
- *et que f restreinte à $]a_i, a_{i+1}[$ soit égale à f_i.*

Une fonction f, définie sur un intervalle I, à valeurs complexes, est de classe C^k par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I l'est.

NOTATIONS ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- $C^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-e.v. des fonctions continues de classe C^k, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
- $C^k_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-e.v. des fonctions continues de classe C^k par morceaux, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Si $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $L^p = L^p(0, 2\pi)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et Lebesgue-mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$ avec

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_\infty = \text{sup ess}|f(t)|.$$

On a pour $1 \leq p < q \leq \infty$, les inclusions suivantes

$$C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^q \subset L^p.$$

ATTENTION : ceci est faux dans le cas général !

Lemme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique dont $T > 0$ est une période. Pour que f soit C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'existe un segment $J = [a, a+T]$ de longueur T tel que $f|_J$ le soit.

Lemme

Si f est une fonction T périodique, alors si J est un segment de longueur T, on a :

$$\int_J f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Proposition

Soit $T > 0$ un réel et g une fonction définie sur un segment $[a, a+T]$ de longueur T, à valeurs complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x-kT) & si\ a+kT < x < a+(k+1)T, \\ \lambda & si\ x \in a+T\mathbb{Z}, \end{cases}$$

est T-périodique,

- *de classe C^k par morceaux si g l'est,*
- *dans L^p si g l'est.*

De plus, sur tout segment J de longueur T, on a :

$$\int_J f(x)dx = \int_a^{a+T} g(x)dx.$$

DÉFINITION

Soit f une fonction dans L^1 ; si $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\boxed{\hat{f}(k) = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt},$$

qui s'appelle coefficient de Fourier exponentiel d'indice k de f.

DÉFINITION

On définit aussi pour $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt},$$

qui s'appellent coefficients de Fourier trigonométriques d'indice n de f.

Lien pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}, \qquad b_0(f) = 0,$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2}\left[a_k(f) - ib_k(f)\right], \qquad c_{-k}(f) = \frac{1}{2}\left[a_k(f) + ib_k(f)\right],$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad b_n(f) = i\left[c_n(f) - c_{-n}(f)\right].$$

PROPOSITION

Si f est une fonction de L^1, les fonctions

$$\bar{f},\ g : t \mapsto f(-t),\ \textit{et, pour } a \in \mathbb{R},\ f_a : t \mapsto f(t+a),$$

le sont également et

- *pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(\bar{f}) = \overline{c_{-k}(f)}$.*
- *Si f est à valeurs réelles, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.*
- *De plus $c_k(g) = c_{-k}(f)$, $a_n(g) = a_n(f)$ et $b_n(g) = -b_n(f)$.*
- *Si f est paire (resp. impaire), les $b_n(f)$ (resp. les $a_n(f)$) sont tous nuls.*
- *Enfin $c_k(f_a) = e^{ika} c_k(f)$.*

Cas des fonctions T-périodiques.

Définition

Soit une fonction f à valeurs complexes, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (resp. C^k par morceaux, L^p). La fonction g définie par :

$$x \mapsto f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

est alors 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (resp. C^k, L^p). Les coefficients de Fourier de f sont, par définition, ceux de g.

CAS DES FONCTIONS T-PÉRIODIQUES.

Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2\pi i\frac{kx}{T}}dx},$$

et de manière analogue :

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx.$$

PROPOSITION

L'application $\mathcal{F}$ de l'espace vectoriel L^1 dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie par :

$$f \mapsto \hat{f}$$

est linéaire. La suite $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et :

$$\|\hat{f}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

PROPOSITION

Soit une fonction f, 2π-periodique, **continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$**, *à valeurs complexes. Alors, si $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\boxed{c_k(f') = ikc_k(f)}.$$

Si f est **de classe C^{p-1} sur $\mathbb{R}$ et de classe C^p par morceaux sur $\mathbb{R}$**, *alors*

$$c_k(f^{(p)}) = (ik)^p c_k(f).$$

En particulier, dans ce cas,

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{|k|^p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(t)| dt \right).$$

Sommes partielles.

Définition

Soit f une fonction 2π-périodique. Pour tout entier naturel p, la somme :

$$S_p(f)(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

est appelée somme partielle de rang p de la série de Fourier de f au point x.

Si la suite $(S_p(f)(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série de Fourier de f est dite convergente au point x de somme : $S(f)(x) = \lim_{p\to\infty} S_p(f)(x)$.

Remarque

Le coefficient $c_0(f) = a_0(f)/2$ représente la valeur moyenne de f sur un intervalle de periode.

PROPOSITION

L'espace vectoriel L^2 peut être muni du produit scalaire $(.|.)$ défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où e_k est la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est une famille famille orthonormale de L^2 et :

$$\forall f \in L^2,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = (e_k|f).$$

Pour $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on notera $\|f\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

Convergence en moyenne quadratique.

Théorème de Parseval

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2}.$$

Proposition

Pour toute fonction $f \in L^2$

$$\lim_{k \to +\infty} c_k(f) = 0, \ \textit{et} \ \lim_{k \to +\infty} c_{-k}(f) = 0.$$

THÉORÈME

Pour tout élément de L^2 la suite $(S_p(f))$ des sommes partielles de la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f, à savoir :

$$\lim_{p \to \infty} \|S_p(f) - f\|_2 = 0.$$

FORMULE DE PARSEVAL

Si $f \in L^2$,

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2}\ .$$

Si g est un autre élément de L^2, les séries :

$$\sum_{k\geq 0} \overline{c_k(f)} c_k(g), \text{ et } \sum_{k\geq 0} \overline{c_{-k}(f)} c_{-k}(g)$$

sont absolument convergentes. On en déduit la convergence de la série de terme général :

$$\sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)} c_k(g)$$

dont la limite vaut $(f|g)$:

$$(f|g) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)} c_k(g).$$

Analogue dans le cas réel.

Analogue réel : pour $L^2(I, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< .|. >$:

$$< f|g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0, \\ \cos(px) & \text{si } n = 2p-1, \text{ et } p \geq 1, \\ \sin(px) & \text{si } n = 2p, \text{ et } p \geq 1, \end{cases}$$

est orthonormale pour $< .|. >$.

ANALOGUE DANS LE CAS RÉEL.

Si f est à valeurs réelles, propriétés analogues en remplaçant $(.|.)$ par $< .|. >$:

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right) \leq \|f\|_2^2 =< f|f > .$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left[a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right]$ converge et les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

- La suite des sommes partielles de la série de Fourier de f (exprimée en sinus et cosinus) converge vers f dans l'espace réel des fonctions de L^2 à valeurs réelles muni du produit scalaire $< .|. >$.
- Parseval s'écrit :

$$< f|f >= \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right).$$

- Si g est une autre fonction

$$< f|g >= \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)).$$

PROPOSITION

Si f est de classe C^p avec $p \geq 2$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ |c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|^p}.$$

Donc la série de Fourier converge normalement.

THÉORÈME DE CONVERGENCE NORMALE

Soit f une fonction 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Les sommes $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2$ sont majorées. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} |c_k(f)|$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} |c_{-k}(f)|$ convergent.
- Convergence normale sur $\mathbb{R}$ des deux séries de fonctions :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k}(f)e^{-ikx}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{p\to+\infty} S_p(f)(x) = f(x).$$

THÉORÈME

Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à :

$$\frac{1}{2} \lim_{h \to 0,\ h>0} [f(x+h) + f(x-h)] = \frac{1}{2} \left[f(x^+) + f(x^-) \right].$$

Phénomène de Gibbs.

Comportement de : $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Proposition

Pour tout $0 < x < 2\pi$*,*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} = f(x).$$

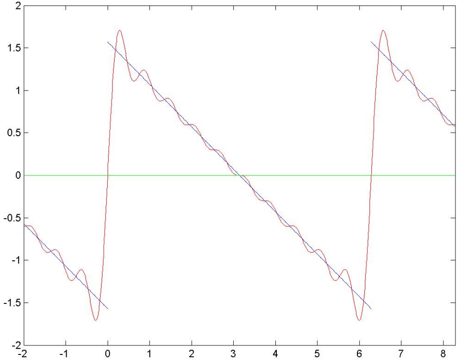
Proposition

Soit $p \in \mathbb{N}$ *et* $x_p = \frac{2\pi}{2p+1}$*. Alors*

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x_p) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{\pi}{2} \times 1,1789797.$$

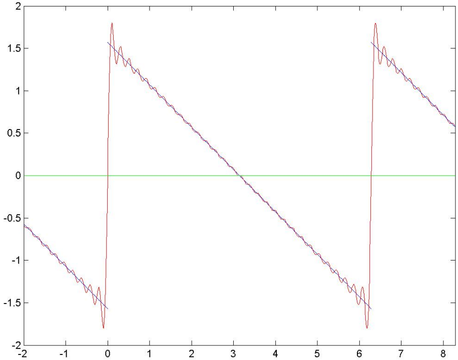
PHÉNOMÈNE DE GIBBS.

POUR $p = 10$



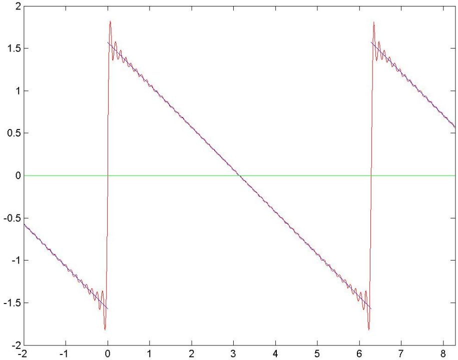
PHÉNOMÈNE DE GIBBS.

POUR $p = 30$



PHÉNOMÈNE DE GIBBS.

POUR $p = 50$



PLAN

1. ESPACES DE BANACH

2. SÉRIES DE FOURIER

3. ESPACES DE HILBERT
   - Dual d'un espace de Hilbert
   - Bases hilbertiennes

Définitions.

Définition

Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique, définie positive.

Lemme

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall (u,v) \in H^2, \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2} \langle v, v\rangle^{1/2}.$$

- $u \in H \mapsto \|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ *est une norme sur H.*
- *Identité du parallélogramme :*

$$\forall (u,v) \in H^2, \qquad \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right).$$

DÉFINITION

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{1/2}$

EXEMPLES

- $H = \mathbb{R}^d$, *avec* $a_1, \ldots, a_d$ *réels strictement positifs et*
$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^d)^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i u_i v_i.$$
- $H = l^2$ *: ensemble des suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q.* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, *avec*
$$\forall (u,v) \in H^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_i v_i.$$
- $H = L^2(\Omega)$ *avec* $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$

Théorème de projection.

Théorème

Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$ unique t.q.

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| = \min_{w \in K} \|u - w\|.$$

De plus v caractérisé par

$$\boxed{v \in K, \qquad \langle u - v, w - v \rangle \leq 0, \forall w \in K.}$$

Définition

v est appelé la projection de u sur K et noté $P_K u$.

Proposition

Pour tout $(u_1, u_2) \in H^2$, $\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$.

THÉORÈME

Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$ unique t.q.

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| = \min_{w \in K} \|u - w\|.$$

De plus v caractérisé par

$$\boxed{v \in K, \qquad \langle u - v, w - v \rangle \leq 0, \forall w \in K.}$$

COROLLAIRE

Soit $M \subset H$ sev fermé et $u \in H$. Alors $v = P_M u$ caractérisé par

$$\boxed{v \in M, \qquad \langle u - v, w \rangle = 0, \forall w \in M.}$$

$u - v \in M^\perp$ et P_M est un opérateur linéaire, dit projecteur orthogonal.

Sommes hilbertiennes.

Définition

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de H. H est somme hilbertienne des (E_n), noté $H = \bigoplus_n E_n$ si

- *les E_n sont 2 à 2 orthogonaux : $\langle u, v\rangle = 0$ pour tout $u \in E_m$, $v \in E_n$, $m \neq n$;*
- *et $\overline{Vect\,(E_n,\ n \in \mathbb{N})} = H$.*

Théorème

Soit $H = \oplus_n E_n$. Soit $u \in H$ et $u_n = P_{E_n} u$. Alors

1. $$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n,$$
2. $$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|^2$$ (égalité de Bessel-Parseval).

Bases hilbertiennes.

Définition

Une base hilbertienne *est une suite* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* H *t.q.*

- $\|e_n\| = 1, \forall n\,;\, \langle e_m, e_n\rangle = 0$ *si* $m \neq n$.
- *et* $\overline{Vect\,(e_n,\ n\in\mathbb{N})} = H$.

Théorème

Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Exemples

Dans $H = L^2(0,\pi)$, *base formée des fonctions*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx.$$