COPULES : THÉORIE ET SIMULATION.

Alexandre Popier

Le Mans Université

2022-2023

Simuler un vecteur aléatoire ?

Hypothèses : composantes indépendantes !

- Simuler N v.a. $(X_{n,i})_{1 \leq n \leq N}$ i.i.d. de même loi que X_i.
- Poser $X_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$.

► Voir TP 3, partie 1.

Problème : comment créer de la dépendance (non triviale) ?

Exemples :

- en finance : instants de défaut (prêts, CDS, CDO, etc.) ;
- en assurance ou actuariat : dates de sinistre, de catastrophes ;
- ...

Notations et définitions.

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Les coordonnées de $X = (X_1, \ldots, X_d)$ sont alors des v.a.r., dont les lois $\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_d}$ sont les lois marginales de X.

Loi de X caractérisée par

- sa densité f (si elle existe) ;
- sa fonction caractéristique : $\psi(z) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle z,X\rangle}\right)$, $z \in \mathbb{R}^d$;
- $\mathbb{E}(\varphi(X))$, $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée ;
- sa fonction de répartition : pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d).$$

Remarque : $f(x) = \dfrac{\partial^d F}{\partial x_1 \ldots \partial x_d}(x)$

PLAN

PLAN

1. COPULES 2-DIMENSIONNELLES
   - Fonctions de répartition bivariées
   - Copules et théorème de Sklar
2. EXEMPLES
   - Copules elliptiques.
   - Copules archimédiennes.
   - Autres exemples
3. GÉNÉRER DES VARIABLES CORRÉLÉES
4. MESURER LA DÉPENDANCE
5. COPULES MULTI-DIMENSIONNELLES ($d \geq 3$)

DÉFINITION

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

- *La loi de (X, Y) est caractérisée par*

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

  F est la fonction de répartition bivariée de (X, Y).

- *Lois marginales ou marginales de (X, Y) décrites par :*

$$F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty),$$

$$F_2(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y).$$

- Indépendance : $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$.
- $F(x,y) = \min(F_1(x), F_2(y))$: variables comonotones (ou parfaitement positivement corrélées) :
$$X = F_1^{-1}(F_2(Y)) = \varphi(Y).$$
X est une fonction croissante de Y (et vice-versa).
- $F(x,y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$: variables contra-monotones (ou parfaitement négativement corrélées) :
$$X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y)) = \psi(Y).$$
X est une fonction décroissante de Y (et vice-versa).

PROPOSITION

Soit F fonction de répartition bivariée.

1. *F est continue à droite :* $\lim_{x \downarrow x_0, y \downarrow y_0} F(x,y) = F(x_0, y_0)$.
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty, y \to +\infty} F(x,y) = 1$.
4. *F est 2-croissante : pour tout* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *avec* $-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq +\infty$ *et* $-\infty \leq a_2 \leq b_2 \leq +\infty$,

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0.$$

PROPOSITION

Une fonction de deux variables vérifiant les quatre propriétés précédentes est une fonction de répartition bivariée.

REMARQUES SUR LA CROISSANCE DE F.

- F croissante par rapport à x et par rapport à y n'implique pas F 2-croissante.
- F 2-croissante n'implique pas F croissante par rapport à x et par rapport à y.
- Mais F 2-croissante et $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$ implique F croissante par rapport à x et par rapport à y.
- Si F est de classe C^2, être 2-croissante équivaut à $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \geq 0$.

Bornes de Fréchet-Hoeffding.

Théorème

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(y)).$$

PLAN

Copule : définition.

Définition

On appelle copule (de dimension 2 ou 2-dimensionnelle) toute fonction de répartition bivariée C ayant pour marginales la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Autrement dit, C vérifie les quatre propriétés d'une fonction de répartition bivariée avec en plus :

- $C(x, y) = 0$ si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$,
- $C(x, y) = 1$ si $x \geq 1$ et $y \geq 1$,
- $C(x, y) = x$ si $y \geq 1$ et $x \in [0, 1]$,
- $C(x, y) = y$ si $x \geq 1$ et $y \in [0, 1]$.

Remarque

Il suffit de définir C sur $[0, 1]^2$!

Théorème

1. Si C est une copule, si F_1 et F_2 sont deux fonctions de répartition, alors $F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$ est une fonction de répartition bivariée, ayant F_1 et F_2 pour marginales.

2. Soit F une fonction de répartition bivariée de marginales F_1 et F_2. Il existe une copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)).$$

Si de plus F_1 et F_2 sont continues, C est unique.

COMMENTAIRES.

- La loi d'un vecteur aléatoire (X, Y), c'est deux fonctions de répartition, qui capturent les marginales, et une copule qui mesure la dépendance.
- En pratique, on connaît «bien» les marginales et mal la dépendance.
- Difficulté : choisir la copule qui capture le mieux les structures de dépendance entre les données.

1. Toute copule C satisfait : $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v).$$

2. M et W sont deux copules «extrêmes» :
   - M : composantes fonctions croissantes l'une de l'autre,
   - W : composantes fonctions décroissantes l'une de l'autre.

3. $C_{\amalg}(u, v) = uv$: composantes indépendantes.

4. Si u_1, u_2, v_1, v_2 sont dans $[0, 1]$,

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

Invariance par transformations croissantes.

Proposition

Si $C_{X,Y}$ est la copule de (X, Y), toute transformation croissante de (X, Y) a la même copule.

Conséquences :

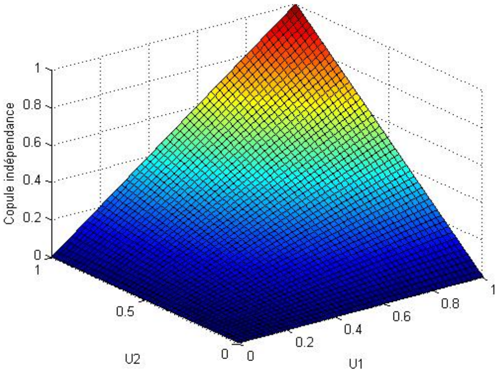
- Si $f \nearrow$ et $g \nearrow$, $C_{f(X),g(Y)}(u, v) = C_{X,Y}(u, v)$;
- Si $f \nearrow$ et $g \searrow$, $C_{f(X),g(Y)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v)$;
- Si $f \searrow$ et $g \searrow$, $C_{f(X),g(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v)$.

Définition

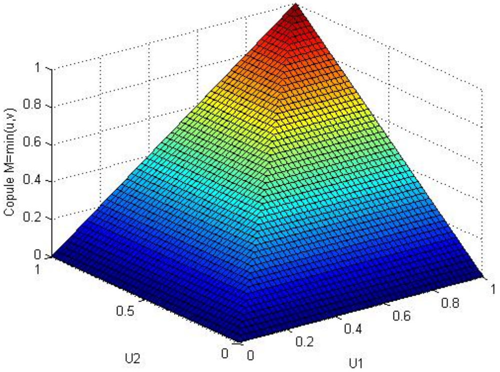
Si $(U_1, U_2) \sim C$, alors copules associées à $(1 - U_1, U_2)$, $(U_1, 1 - U_2)$ et $(1 - U_1, 1 - U_2)$.
Pour la dernière, on parle de copule de survie, notée C^*.

PLAN

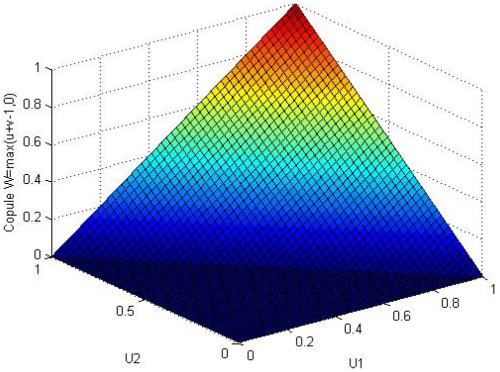
INDÉPENDANCE : $C_{\Pi}(u, v) = uv$. Densité constante : $\mathbf{1}_{[0,1]^2}$.



COPULE M : $M(u, v) = \min(u, v)$.



COPULE W : $W(u,v) = \max(u+v-1, 0)$.



Premières familles paramétriques.

- **Famille de Fréchet** (1958) à deux paramètres $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ avec $\alpha + \beta \leq 1$:

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + \beta W(u, v) + (1 - \alpha - \beta) C_{\Pi}(u, v).$$

  - A une structure de dépendance peu riche...

- **Famille de Farlie-Gumbel-Morgenstern** (1960) à un paramètre $\theta \in [-1, 1]$:

$$C_\theta(u, v) = uv(1 + \theta(1 - u)(1 - v)).$$

  - Prieger (2002) : sélection dans des plans d'assurance-santé.
  - Dépendance faible entre les composantes.

Plan

NOTATIONS :

- ϕ : fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$;
- Φ_ρ : fonction de répartition du vecteur gaussien (X, Y) centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION

Copule gaussienne de paramètre $\rho \in]-1,1[$:

$$C_\rho(u,v) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)).$$

- De loin la plus populaire (= Black-Scholes des copules !).
- $C_\rho \to W$ si $\rho \to -1$, $C_\rho \to C_\amalg$ si $\rho \to 0$ et $C_\rho \to M$ si $\rho \to 1$.

t-COPULES.

DÉFINITION

Loi t_n de degré ν, de matrice de dispersion Σ, notée $t_n(\nu, \Sigma)$, et définie par densité :

$$t_n(\nu, \Sigma)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{(\nu\pi)^n |\det \Sigma|}} \left(1 + \frac{x^t \Sigma^{-1} x}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}.$$

- t_ν *: fonction de répartition de la loi t_1 de degré ν avec $\Sigma = 1$;*
- $\mathcal{T}_{\nu,\rho}$ *: fonction de répartition bivariée de $t_2(\nu, \Sigma)$ où $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.*

DÉFINITION

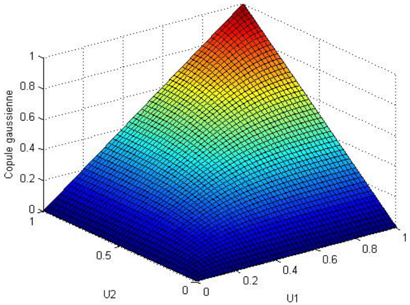
t-copule de corrélation $\rho \in]-1, 1[$ *et de degré de liberté* ν *:*

$$C_{\rho,\nu}(u, v) \quad = \quad \mathcal{T}_{\nu,\rho}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v)).$$

- Très proches des gaussiennes,
- corrélations très fortes pour les mouvements de même signe.

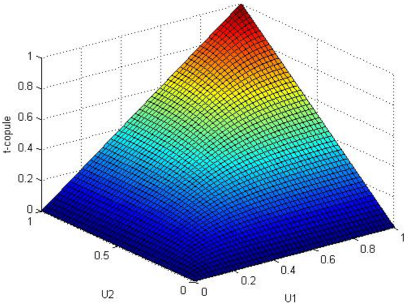
COPULES ET DENSITÉS.

GAUSSIENNES :



COPULES ET DENSITÉS.

DE STUDENT :



PLAN

DÉFINITION

Soit ϕ *strictement décroissante et convexe de* $[0,1]$ *dans* $[0,+\infty]$*.*

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)).$$

COPULE DE CLAYTON pour $\theta \in [-1,+\infty[\backslash\{0\}$:

$$\phi(u) = \frac{u^{-\theta} - 1}{\theta}, \qquad C_\theta(u,v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}.$$

- $C_\theta \to M$ si $\theta \to +\infty$ et $C_\theta \to C_{\amalg}$ si $\theta \to 0$.
- Pas de dépendance négative : risques positivement corrélés.
- Utilisation : syndrôme du cœur brisé, risque de défaut et récession.

DÉFINITION

Soit ϕ strictement décroissante et convexe de $[0,1]$ dans $[0,+\infty]$.

$$C(u,v)=\phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)).$$

COPULE DE GUMBEL pour $\theta \in [1,+\infty[$:

$$\phi(u)=(-\ln u)^\theta, \qquad C_\theta(u,v)=\exp\left[-\left((-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right].$$

- $C_\theta \to M$ si $\theta \to +\infty$ et $C_\theta \to C_{\rm II}$ si $\theta \to 1$.
- Pas de dépendance négative : risques positivement corrélés.

DÉFINITION

Soit ϕ strictement décroissante et convexe de $[0,1]$ dans $[0,+\infty]$.

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)).$$

COPULE DE FRANK pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\phi(u) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\right), \; C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right].$$

- $C_\theta \to C_\Pi$ si $\theta \to 0$, $C_\theta \to M$ si $\theta \to +\infty$ et $C_\theta \to W$ si $\theta \to -\infty$.
- Très populaire : atteint toutes les extrêmes, dépendance faible par rapport aux gaussiennes.
- Invariance : $(u,v) \to (1-u, 1-v)$ et $(u,v,\theta) \to (1-u, v, -\theta)$.

Copule MinMax.

Lemme

Soit $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi F, et $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ les statistiques d'ordre associées. Loi de $X_{(r)}$:

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i F^i(x)(1 - F(x))^{n-i}.$$

Loi du Max et du min :

$$F_M(x) = F^n(x), \qquad F_m(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Loi du couple (min,Max)

$$F_{(m,M)}(x, y) = (F(x)^n - (F(y) - F(x))^n)\mathbf{1}_{x<y} + F^n(y)\mathbf{1}_{x\geq y}.$$

Copule MinMax.

En résolvant : $C_{(m,M)}(F_m(x), F_M(y)) = F_{(m,M)}(x,y)$,

Définition

copule MinMax :

$$C_{(m,M)}(u,v) = \begin{cases} v - \left[v^{\frac{1}{n}} + (1-u)^{\frac{1}{n}} - 1\right]^n, & si\ 1-(1-u)^{\frac{1}{n}} < v^{\frac{1}{n}}, \\ v, & si\ 1-(1-u)^{\frac{1}{n}} \geq v^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Relation avec Clayton

Pour $\alpha = -1/n$:

$$v - C_{(m,M)}(1-u, v) = C_\alpha^{\text{Clayton}}(u,v).$$

DÉFINITION

Une copule C est une copule extrême ou max-stable si pour tout $n \geq 1$ et tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$:

$$C(u_1^{1/n}, u_2^{1/n})^n = C(u_1, u_2)$$

COPULE DE GUMBEL archimédienne pour $\theta \in [1, +\infty[$:

$$\phi(u) = (-\ln u)^\theta.$$

COPULE DE HÜSLER-REISS :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \exp\left[\Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\log\left(\frac{\log u_2}{\log u_1}\right)\right)\log u_1 \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\log\left(\frac{\log u_1}{\log u_2}\right)\right)\log u_2\right] \end{aligned}$$

avec Φ fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition

Pour α *et* β *donnés dans* $]0, 1[$*, la* ***copule de Marshall et Olkin*** *de paramètre* (α, β) *est*

$$C(u_1, u_2) = \min(u_1^{1-\alpha} u_2, u_1 u_2^{1-\beta}).$$

- Utilisée dans les modèles à choc commun.
- $\mathbb{P}(U_1 = U_2) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}$

Plan

PRINCIPE.

1. Choisir une copule C de dimension 2 et des marginales F_1 et F_2.
2. Générer U_1 et U_2, toutes uniformes sur $[0, 1]$, via la copule C.
   Les v.a. U_i sont donc corrélées.
3. Poser $X_i = F_i^{-1}(U_i)$.
   Chaque X_i a la loi marginale souhaitée, et X_1 et X_2 sont corrélés.

R

Différentes librairies, dont `fCopulae`, `Gumbel`, etc.

COPULES GAUSSIENNES.

V.A. GAUSSIENNES CORRÉLÉES : $\Gamma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrice de covariance avec coefficients diagonaux tous égaux à 1.

1. Calculer A "racine" de Γ : $\Gamma = AA^T$.
2. Générer deux v.a. i.i.d. Z_1 et Z_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$. $Z = (Z_1, Z_2)$.
3. Poser $X = AZ^T$.

LEMME

X est un vecteur gaussien, de dimension 2, centré et de matrice de covariance Γ (voir TP 3, partie 2).

COPULES GAUSSIENNES : $U_i = \mathcal{N}(X_i)$ avec $\mathcal{N}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (`pnorm` en R).

V.A. GAUSSIENNES "CORRIGÉES" :

1. Calculer A "racine" de Γ : $\Gamma = AA^T$.
2. Générer deux v.a. i.i.d. Z_1 et Z_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$. $Z = (Z_1, Z_2)$.
3. Poser $X = AZ^T$ (vecteur gaussien).
4. Générer une v.a.r. S de loi χ^2_ν (`rchisq` en R).
5. Poser $Y = \sqrt{\frac{\nu}{S}} X$.

t-COPULES : $U_i = \mathcal{T}(Y_i)$, avec $\mathcal{T}$ fonction de répartition de la loi t de Student (`pt` en R).

Copules archimédiennes.

Méthode

1. *Générer R et S uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes.*
2. *Résoudre*
$$S = T - \frac{\phi(T)}{\phi'(T)}, \qquad \textit{inconnue } T.$$
3. *Poser $U = \phi^{-1}(R\phi(T))$, $V = \phi^{-1}((1-R)\phi(T))$.*

Proposition

U et V sont uniformes sur $[0,1]$ et leur copule est archimédienne donnée par ϕ.

Exemple

$\phi(u) = (u^{-1} - 1)^{\theta}$, $\theta > 0$.

PLAN

COEFFICIENTS DES COPULES : à quoi correspondent-ils ?

MESURE DE DÉPENDANCE : doit vérifier

1. Symétrie : $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$.
2. Normalisation : $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$.
3. Extrêmes :
   - $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow (X, Y)$ comonotone (copule M) ;
   - $\delta(X, Y) = -1 \Leftrightarrow (X, Y)$ contre-monotone (copule W).
4. T : transformation monotone

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & \text{pour } T \text{ croissante ;} \\ -\delta(X, Y) & \text{pour } T \text{ décroissante.} \end{cases}$$

DÉFINITION

Coefficient de corrélation appelé aussi Pearson's r :

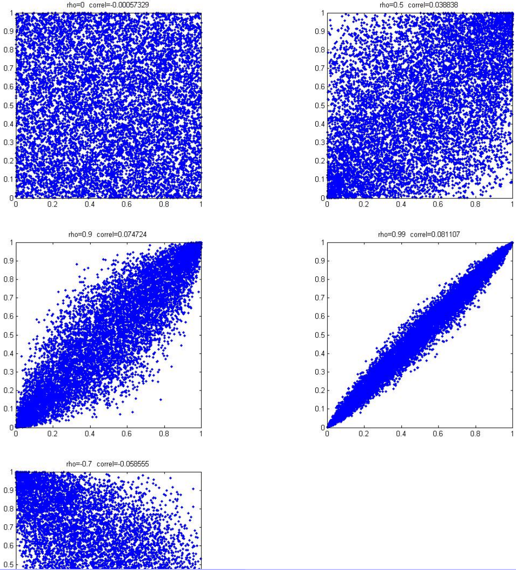
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- n'existe pas toujours.
- mesure de dépendance linéaire.
- Propriétés 1-2-3 : ok.
- Propriété 4 : invariance par transformations linéaires (pas pour des transformations monotones générales).

PROPOSITION

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\rho(X, Y) = 0$. Réciproque fausse (sauf si (X, Y) gaussien).

EN FONCTION DE ρ :



Rank correlation ($\approx$ corrélation de rang).

Définition

Spearman's ρ : $\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y))$.
Kendall's τ :

$$\tau_K(X, Y) = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

avec $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ *i.i.d.*

Proposition

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) du dv,$$
$$\tau_K(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Et $\rho_S = \tau_K = 1 \Leftrightarrow C = M$, $\rho_S = \tau_K = -1 \Leftrightarrow C = W$.

Lien entre corrélations et paramètres.

Remarque générale.

Il n'y a pas de lien simple entre les paramètres des copules et les mesures de corrélation !

- Farlie-Gumbel-Morgenstern ($\theta \in [-1, 1]$) : $\tau_K = (2/9)\theta$, $\rho_S = \theta/3$.
- Gaussienne ($\rho \in [-1, 1]$) :

$$\tau_K = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\,(\rho) \text{ et } \rho_S = \frac{6}{\pi}\text{Arcsin}\,(\rho/2).$$

- *t*-copule ($\rho \in [-1, 1]$, $\nu \in \mathbb{R}_+^*$) : $\tau_K = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\,(\rho)$.

REMARQUE GÉNÉRALE.

Il n'y a pas de lien simple entre les paramètres des copules et les mesures de corrélation !

- Archimédienne : $\tau_K = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$.
  - Clayton ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) : $\tau_K = \frac{\theta}{\theta+2}$;
  - Gumbel ($\theta \in [1, +\infty[$) : $\tau_K = 1 - \frac{1}{\theta}$;
  - Frank ($\theta \in \mathbb{R}$) : $\tau_K = 1 - 4\frac{1-D_1(\theta)}{\theta}$, $\rho_S = 1 - 12\frac{D_1(\theta)-D_2(\theta)}{\theta}$, avec $D_k(x) = \frac{k}{x}\int_0^x \frac{s^k}{e^s-1} ds$ (fonctions de Debye).

REMARQUE GÉNÉRALE.

Il n'y a pas de lien simple entre les paramètres des copules et les mesures de corrélation !

- MinMax :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2n-1}, \\
\rho &= 3 - \frac{12n}{C_{2n}^{n}} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2n-i} C_{2n}^{n+k} + 12(-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!}.
\end{aligned}$$

DÉPENDANCE DES QUEUES DE DISTRIBUTION.

DÉFINITION

Soit X et Y v.a. avec fonction de répartition F_X et F_Y. Coefficients de dépendance à gauche et à droite (upper and lower dependency) :

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= \lim_{u \to 0} \mathbb{P}\left(Y \leq F_Y^{-1}(u) | X \leq F_X^{-1}(u)\right), \\
\lambda_U &= \lim_{u \to 1} \mathbb{P}\left(Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)\right).
\end{aligned}$$

Si $\lambda_L \neq 0$ (resp. $\lambda_U \neq 0$), les queues de distribution de X et Y sont asymptotiquement dépendantes à gauche (resp. à droite).

PROPOSITION

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} \frac{C(u,u)}{u}, \qquad \lambda_U = \lim_{u \to 1} \frac{1 + C(u,u) - 2u}{1-u}.$$

EXEMPLES.

- COPULES EXTRÊMES : pour M, $\lambda_L = \lambda_U = 1$, pour W, $\lambda_L = \lambda_U = 0$.
- FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN : $\lambda_L = \lambda_U = 0$.
- GAUSSIENNES : $\lambda_L = \lambda_U = 0$.
- t-COPULES :

$$\lambda_L = \lambda_U = 2 - 2t_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right).$$

- CLAYTON : $\lambda_U = 0$, $\lambda_L = (1/2)^{1/\theta}$.
- GUMBEL : $\lambda_L = 0$, $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$.
- MINMAX : en exercice.

Plan

DÉFINITIONS.

DÉFINITION

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$.

- *La loi de* X *est caractérisée par*

$$F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i,\ \forall i = 1, \ldots, d), \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

  F *est la fonction de répartition multivariée de* X.

- *Lois marginales ou marginales de* X *: lois des* X_i *prises séparément. Décrites par :*

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = \lim_{x_j \to +\infty,\ j \neq i} F(x) \\ &= F(+\infty, \ldots, +\infty, x_i, +\infty, \ldots, +\infty). \end{aligned}$$

- F est continue “à droite”.
- $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.
- $\lim_{x_i \to +\infty,\ \forall i} F(x_1, \ldots, x_d) = 1$.
- F is *n*-croissante : si $a_k \leq b_k$ pour tout k, et si $H = [a_1, b_1] \times \ldots [a_d, b_d]$, alors

$$V_F(H) = \sum \text{sgn}\,(c) F(c) \geq 0,$$

la somme étant prise sur les sommets de H, avec

$$\text{sgn}\,(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_k = a_k \text{ pour un nombre pair de sommets;} \\ -1 & \text{si } c_k = a_k \text{ pour un nombre impair de sommets.} \end{cases}$$

BORNES DE FRÉCHET-HOEFFDING.

THÉORÈME

Si F est une fonction de répartition multivariée de marginales F_i, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\max\left(\sum_{i=1}^{d} F_i(x_i) - d + 1, 0\right) = W(x) \leq F(x)$$
$$\leq M(x) = \min(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

ATTENTION !

M est toujours une fonction de répartition multivariée. W ne l'est a priori que si $d = 2$.

Copule : définition.

Définition

On appelle copule *(de dimension d ou d-dimensionnelle) toute fonction de répartition multivariée C ayant pour marginales la loi uniforme sur* $[0,1]$.

Autrement dit, C vérifie les quatre propriétés d'une fonction de répartition multivariée avec en plus :

- $C(x) = 0$ si $x_i \leq 0$ pour au moins un i,
- $C(x) = 1$ si $x_i \geq 1$ pour tout i,
- $C_i(x_i) = x_i$ pour tout i et $x_i \in [0,1]$.

Remarque

Il suffit de définir C sur $[0,1]^d$!

Théorème de Sklar.

Théorème

1. Si C est une copule d-dimensionnelle, si F_i sont n fonctions de répartition, alors $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ est une fonction de répartition multivariée, ayant F_i pour marginales.
2. Soit F une fonction de répartition multivariée de marginales F_i. Il existe une copule C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

   Si de plus les F_i sont continues, C est unique.

Remarque

En général C n'est unique que sur le produit des images des F_i.

Propriétés des copules.

1. Toute copule C satisfait : $\forall u = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$

$$W(u) = \max\left(\sum_{i=1}^{d} u_i + d - 1, 0\right) \leq C(u) \leq \min_i (u_i) = M(u).$$

2. W n'est pas une copule si $d \geq 3$. M en est toujours une.
3. $C_{\amalg}(u) = \prod_i u_i$: composantes indépendantes.
4. Si X est distribuée suivant F et si C est de classe C^d, alors la densité de X est :

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \frac{\partial^d C}{\partial u_1 \ldots \partial u_d}(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i).$$

EXEMPLES.

- **COPULES ARCHIMÉDIENNNES :** soit ϕ strictement décroissante et convexe de $[0,1]$ dans $[0,+\infty]$.

$$C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \ldots + \phi(u_d)).$$

  Exemples : Clayton, Frank, Gumbel, etc.

- **COPULES GAUSSIENNES :**
  - ϕ : fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$;
  - Φ_Σ : distribution d'un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ.

$$C_\Gamma(u) = \Phi_\Sigma(\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_d)).$$

- **t-COPULES :**
  - t_ν : fonction de répartition de la loi $t_1(\nu, 1)$;
  - $\mathcal{T}_d(\nu, \Sigma)$ fonction de répartition de la loi $t_d(\nu, \Sigma)$
  - Σ : matrice de covariance ;

$$C_{\nu,\Sigma}(u) = \mathcal{T}_d(\nu, \Sigma)(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)).$$

Extension en dimension d.

Méthode

1. *Simuler n v.a. i.i.d.* $V_1, \ldots, V_d$ *uniformes sur* $[0, 1]$.
2. *Pour* $k = 1, 2, \ldots, d-1$, *poser* $S_k = V_k^{1/k}$.
3. *Trouver la solution (d'inconnue* T*) de :* $V_d = F(T)$.
4. *Poser* $U_1 = \phi^{-1}(S_1 \ldots S_{d-1}\phi(T))$, $U_d = \phi^{-1}((1 - S_{d-1})\phi(T))$ *et pour* $k = 2, \ldots, d-1$ *:*

$$U_k = \phi^{-1}\left((1 - S_{k-1}) \prod_{j=k}^{d-1} S_j \phi(T)\right).$$

Avec $\phi^{-1(d)}$ dérivée d-ième de ϕ^{-1} et

$$F(t) = \frac{1}{(d-1)!} \int_0^t \phi^{-1(d)}(x)[\phi(x)]^{d-1}\phi'(x)dx.$$