Loi uniforme sur [0 , 1]

La fonction **ALEA( )** de Excel retourne un nombre pseudo aléatoire compris entre 0 et 1
et simule ainsi une variable aléatoire réelle continue X de loi uniforme sur l'intervalle [0 , 1] .

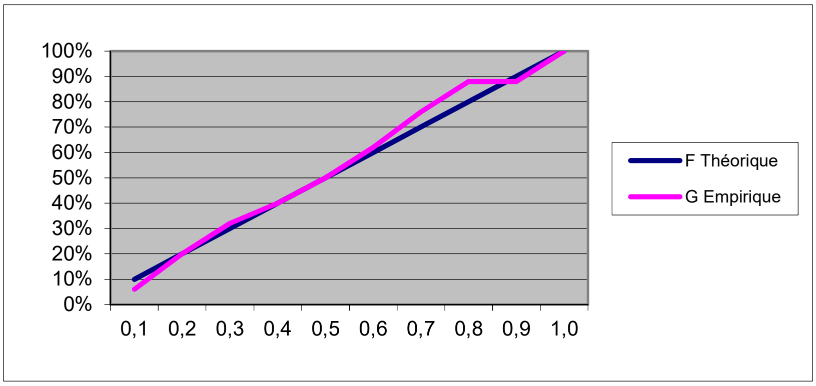
Question 1 : Simuler une cinquantaine de tirages et calculer la moyenne empirique des observations .
On remarquera que les résultats retournés sont volatils . Tester la touche F9 .

0,30438	0,75491	0,16689	0,20499	0,54390	0,71169	0,60242	0,74118	0,92853	0,41528
0,51591	0,48597	0,60160	0,31258	0,15734	0,36847	0,00292	0,51106	0,26641	0,39544
0,91221	0,64353	0,28195	0,92501	0,07474	0,47019	0,24690	0,14308	0,47765	0,23029
0,18200	0,78238	0,75470	0,94863	0,98053	0,54542	0,45129	0,78932	0,09484	0,58612
0,55113	0,62161	0,13892	0,26163	0,66365	0,19007	0,94806	0,11453	0,60563	0,68578

Moyenne empirique : 0,48587

Question 2 : Comparer la fonction de répartition théorique F de la v.a.r. X et la fonction de répartition empirique G définie par : $G(t)$ = fréquence des observations inférieures ou égales à t .

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$F(t)$	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
$G(t)$	6%	20%	32%	40%	50%	62%	76%	88%	88%	100%



Question 3 : (a) Simuler le tirage de deux v.a.r. indépendantes X et Y de même loi uniforme sur [0 , 1] .
(b) Etudier empiriquement les variables $S = X + Y$, $T = XY$, $U = \min(X , Y)$, $V = |X - Y|$.
(c) Conjecturer la valeur de l'espérance des variables aléatoires en question .

On se propose maintenant d'effectuer des statistiques sur 1 000 000 de réalisations.
Il n'est bien sûr pas question de visualiser tous les résultats dans les cellules de la feuille.
On va donc programmer en VBA des procédures qui gèrent automatiquement les calculs.
C'est la fonction **Rnd( )** qui remplace la fonction **ALEA( )** en VBA .
On remarquera que les résultats retournés par la fonction **Rnd( )** ne sont pas volatils.

Question 4 : (a) Ouvrir VBA et créer un module qui accueillera toutes les fonctions personnalisées .
(b) Programmer une fonction **ValeurX( )** qui simule une réalisation de la v.a.r. X .
(c) Programmer de même les fonctions **ValeurS( ), ValeurT( ), ValeurU( ), ValeurV( ) .**
(d) Programmer une fonction **MoyenneX(*n*)** qui simule n réalisations de la v.a.r. X et qui calcule la moyenne empirique des n résultats obtenus .
(e) Programmer de même **MoyenneS(*n*), MoyenneT(*n*), MoyenneU(*n*), MoyenneV(*n*) .**

MoyenneX(1000000)	0,49986	0,50011	MoyenneX(1000000)	0,50018	0,49999
MoyenneS(1000000)	1,00025	1,00049	MoyenneU(1000000)	0,33337	0,33307
MoyenneT(1000000)	0,24962	0,24988	MoyenneV(1000000)	0,33328	0,33349

Loi de Bernoulli - Loi binomiale

Question 1 : Programmer une fonction aléatoire **PileFace( )** qui retourne P ou F avec une probabbilité p.
On la testera une cinquantaine de fois et on comptera le nombre de P et de F obtenus .

p= 0,6

P	F	P	F	P	P	P	P	P	P
F	P	F	P	F	P	P	P	F	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	F
P	F	P	P	F	F	P	P	P	P
P	P	P	P	F	F	F	P	P	P

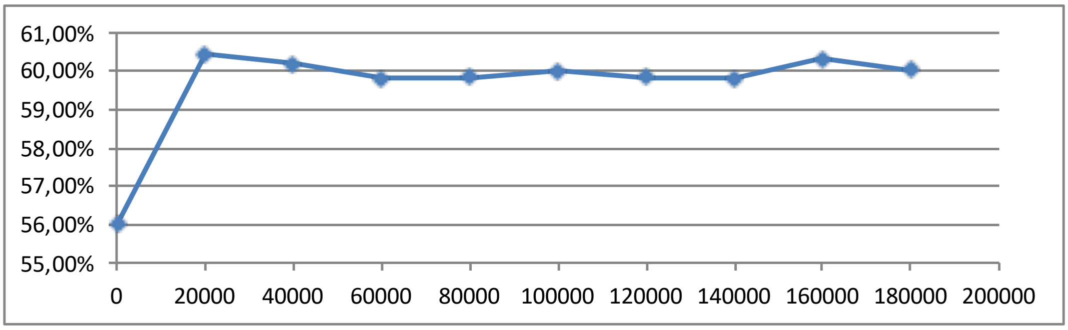
Nombre de P : 37 Nombre de F : 13

Question 2 : Programmer une fonction ListePileFace(*n*,*p*) qui renvoie *n* lancers de pile ou face.

ListePileFace(50) = PFPPPFFPPPFPPPPPFFPPFPPPFPPFFPPFPFPPPPPFFPPFPFFFFPP

Question 3 : Programmer une fonction **NombrePile(*n*,*p*)** qui renvoie le nombre de P sur n lancers
Tester pour plusieurs valeurs de *n*. Vous tracerez le graphique correspondant.
Que représente-t-il ?

n	100	20000	40000	60000	80000	100000	120000	140000	160000	180000
NombrePile(*n*,*p*)	56	12090	24071	35877	47877	59985	71792	83709	96498	108067
Fréquences	56,00%	60,45%	60,18%	59,80%	59,85%	59,99%	59,83%	59,79%	60,31%	60,04%



Question 4 : On rappelle qu'une somme de n variables de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres (n,p).
On souhaite comparer le calcul explicite des probabilités, la fonction pré-programmée Loi.binomiale.N(k,n,p,Faux) et le fréquences empiriques d'une variable aléatoire NombrePile(n,p).

n= 6 p= 0,4 k= 4

Pour cela on se propose de réaliser N séries de n lancers .

(a) Programmer une fonction Proba(n,p,k) qui calcule la probabilité par la formule explicite.
(b) Utiliser la fonction Loi.binomiale.N(k,n,p,Faux)
(c) Programmer un bouton Simulation qui simule Nbre séries de n lancers et qui calcule la fréquence d'apparation de k succès.

Proba(n,p,k)	0,138240005
loi.binomiale.N(k,n,p,Faux)	0,13824
simulation	0,1375

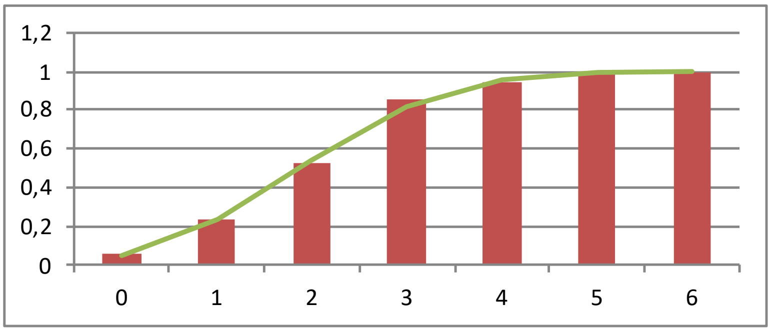
Nbre= 10000 Simulation

Question 5 : On souhaite tracer la fonction de répartition d'une loi binomiale b(n,p)
(a) Simuler Nbre=50 valeurs de la variable
(b) Calculer les frequences empiriques et les fréquences empiriques cumulées
(c) Calculer les frequences théoriques
(d) Tracer les fréquences empiriques cumulées en histogrammes et théoriques en courbe.

n= 6 p= 0,4

2	3	4	3	2	3	5	1	2	4
3	1	1	3	2	4	2	2	1	3
2	3	1	3	2	0	2	3	0	1
1	2	3	2	2	3	3	2	1	3
4	1	2	3	3	5	3	3	0	5

k=		0	1	2	3	4	5	6	total
fréq. empiriques		0,06	0,18	0,28	0,34	0,08	0,06	0	1
freq empiriques cumulées		0,06	0,24	0,52	0,86	0,94	1	1	
fréq théoriques		0,0467	0,2333	0,5443	0,8208	0,959	0,9959	1	



On rappelle que le modèle binomial (ou de Cox-Ross-Rubinstein, CRR) modèlise le prix d'un actif au cours du temps de la façon suivante.

Le temps est discrétisé de 0 à N (maturité). S(i) est le prix de l'actif à l'instant i, S(0)=S0 étant une constante fixée positive.
r, u, d désignent respectivement le taux d'intérêt sans risque, le "taux de montée" (up), le taux de descente (down), vérifiant d<r<u. On note p la valeur (u-r)/(u-d).
Alors S(i+1) = S(i)(1+u) avec probabilité 1-p et S(i+1) = S(i)(1+d) avec probabilité p.

Pour fixer les idées, on prendra N=10, S0=100, r=5%, u=8% et d=-4%.

Question 6 : En utilisant N variables de Bernoulli, correctement modifiées, simuler une trajectoire des prix.

Question 7 : A l'aide d'une fonction VBA, pour un entier i compris entre 1 et N et un entier M, simuler M variables aléatoires X(1), X(2), …, X(M) indépendantes et identiquement distribuées ayant la même loi que S(i),calculer X(k)/(1+r)^i, pour tout k entre 1 et M, et retourner la moyenne de ces M valeurs.

Que remarque-t-on quand M est grand ? Tracer la courbe qui à i associe cette valeur moyenne. Que voit-on ? Pourquoi cette probabilité p est-elle appelée risque-neutre ?

Question 8 : Soit K un nombre. A l'aide d'une autre fonction VBA, calculer la valeur moyenne de

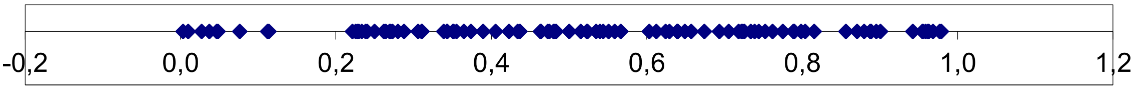
max (S(N) - K ; 0) / (1+r)^N

Cette quantité est le prix d'une option d'achat de maturité N et de prix d'exercice K.

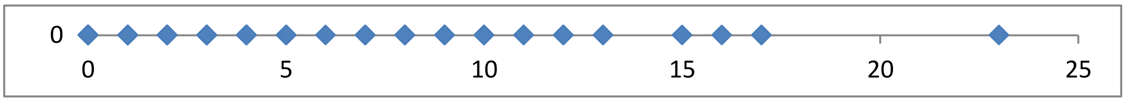
On fera M simulations de S(N) avec M grand.

Lois usuelles

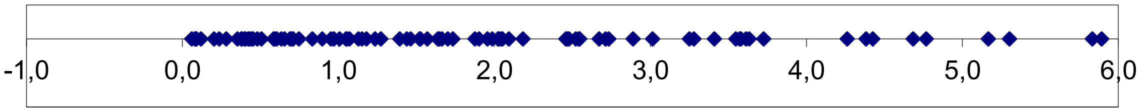
Question 1 : Simuler 100 valeurs de loi uniforme sur [0,1] et représentez les valeurs sur un segment.



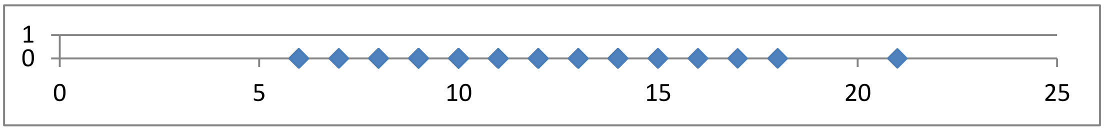
Question 2 : Lors d'une série de lancers indépendants, le premier lancer d'apparition de succès suit une loi géométrique. Programmer une fonction **LoiGeom(p)**, simuler 100 valeurs avec paramètre p=0,2 et donner une représentation.



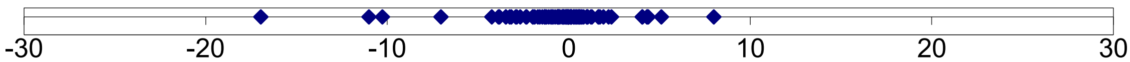
Question 3 : Justifier que si U est de loi uniforme sur [0,1] alors **-Ln(*U*)/λ** est de loi exponentielle de paramétre λ.
Programmer sous VBA une fonction **LoiExp(lambda)** et simuler 100 valeurs de loi exponentielle de paramètre 0,3



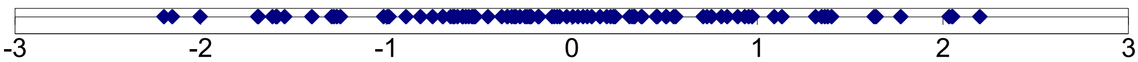
Question 4 : Si X1,X2,,,, sont des variables de loi exponentielle de paramètre λ alors le premier n tel que **X1+X2+…+Xn<1** suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Programmer une fonction **LoiPoisson(lambda)** et simuler 100 valeurs de loi de Poisson de paramètre 10.



Question 5 : Soit ***Y*** = **tan(Pi * (*U* - 1/2))** avec **U** de loi uniforme sur [0,1].
Justifier que ***Y*** suit une loi de Cauchy dont on précisera le paramètre .
Programmer sous VBA une fonction aléatoire **LoiCauchy( )** qui simule une réalisation de ***Y*** .



Question 4 : Monter que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est bijective.
Si **U** est de loi uniforme sur [0,1], justifier que **G(*U*)** suit une loi normale où G est la fonction de répartition inverse de la loi normale.
Programmer une fonction **LoiNormale( )** qui simule une loi loi normale centrée réduite.

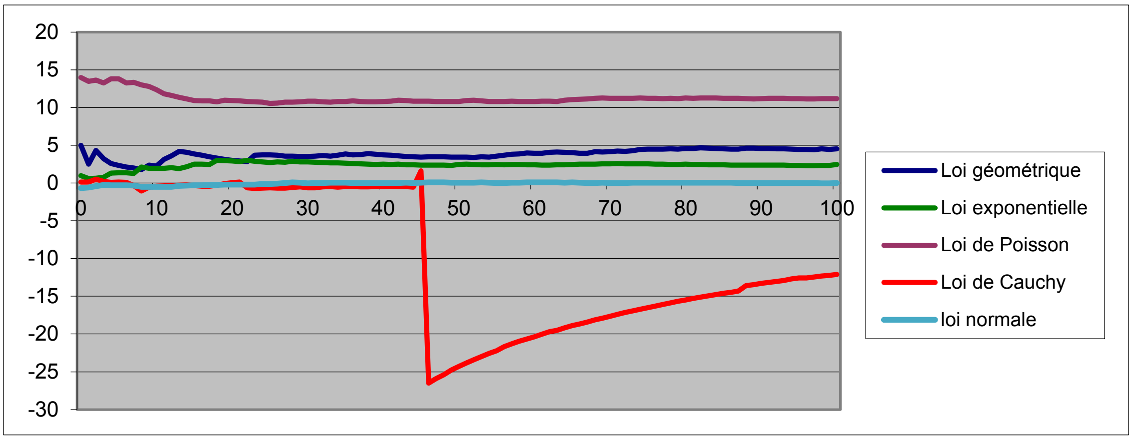


Question 5 : Programmer un bouton de commande qui permet de simuler 500 observations de chacune des variables et de calculer les valeurs moyennes, minimales et maximales observées.

Simuler

	LoiGeom	*LoiExp*	*LoiPoisson*	*LoiCauchy*	*LoiNormale*
Observation courante	9	1,013	10	-0,985	-0,924
Observation minimale	1	0,009	1	-3103,052	-2,716
Observation moyenne	4,902	3,426	9,742	-6,555	-0,013
Observation maximale	37	19,837	26	64,166	2,939

Question 6 : Etudier les variations des moyennes empiriques en fonction du nombre d'observations .



Question 7 :

(a) Reproduire le tableau ci-dessous et calculer les probabilités à l'aide d'une fonction Excel .

(b) Programmer un bouton à bascule ToggleButton1 qui, tant qu'il est enfoncé (Value = True) , simule des observations de LoiGeom et met à jour la colonne des effectifs de manière dynamique . Les fréquences et la moyenne empirique seront calculées par des formules Excel .

ValeurT	Probabilités	Effectifs	Fréquences
0	36,79%	199	35,79%
1	36,79%	191	34,35%
2	18,39%	106	19,06%
3	6,13%	45	8,09%
4	1,53%	13	2,34%
5	0,31%	2	0,36%
6	0,05%		0,00%
7	0,01%		0,00%
8	0,00%		0,00%
9	0,00%		0,00%
10	0,00%		0,00%
Total	100,00%	556	100,00%

Simuler

Espérance	1	Moyenne	1,07914

(d) Représenter enfin les probabilités et les fréquences à l'aide d'un histogramme double .