Modèle binomial - Options européennes

On rappelle que le modèle binomial (ou de Cox-Ross-Rubinstein, CRR) modèlise le prix d'un actif au cours du temps de la façon suivante.

Le temps est discrétisé de 0 à N (maturité). S(i) est le prix de l'actif à l'instant i, S(0)=S0 étant une constante fixée positive.
r, u, d désignent respectivement le taux d'intérêt sans risque, le "taux de montée" (up), le taux de descente (down), vérifiant d<r<u. On note p la valeur (u-r)/(u-d).
Alors S(i+1) = S(i)(1+u) avec probabilité 1-p et S(i+1) = S(i)(1+d) avec probabilité p.

Pour fixer les idées, on prendra N=10, S0=100, r=5%, u=8% et d=-4%.

Question 1 : Calculer toutes les valeurs possibles de S=(S(0),…,S(N)) sous forme d'un tableau de taille (N+1)×(N+1). Seule la partie supérieure du tableau sera remplie. Le début est donné à titre d'exemple dans la feuille Calculs. On pourra utiliser les fonctions SI et DECALER.

Question 2 : Calculer les distributions des prix à tous les instants (aussi sous forme d'un tableau triangulaire).
On pourra utiliser toujours SI et DECALER avec COMBIN.

Question 3 : Vérifier qu'en moyenne les prix actualisés (S(i)/((1+r)^i) sont constants.
La probabilité p est appelée risque-neutre.
On pourra utiliser la fonction SOMMEPROD.

Ce modèle permet de calculer "facilement" le prix des produits dérivés type options.
Considérons une option d'achat européenne (appelée Call) de maturité N et de prix d'exercice (ou strike) K. Ici on prendra K=110. Le payoff de cette option est la partie positive de S(N)-K :

$$(S(N)-K)^+ = \max(S(N)-K,0)$$

C'est son prix à l'instant final. On peut maintenant valoriser (pricing) cette option à toute date comprise entre 0 et N-1. Sous la probabilité risque-neutre, le prix à l'instant n est la moyenne pondérée des prix à l'instant n+1 et actualisée. Autrement dit

C(n) = E(C(n+1))/(1+r), E étant l'espérance.

Le prix de l'option dépend de la valeur de l'actif sous-jacent de prix S(n).

Question 4 : Toujours avec un tableau (N+1)×(N+1), remplir la dernière colonne en calculant le payoff. On utilisera la fonction MAX.
Puis par "récurrence descendante", remplir le tableau qui donne à l'instant n le prix de l'option.
Que vaut le prix de cette option à l'instant initial ?

Question 5 : Faire les mêmes calculs pour l'option de vente (Put) européenne de payoff

$(K-S(N))^+ = \max(K-S(N),0)$

On notera P(n) son prix à l'instant n.

Question 6 : Vérifier la relation dite de parité Call-Put : à tout instant n

C(n) - P(n) = S(n) - K/((1+r)^(N-n))

Par la suite, nous allons reprendre ces calculs mais pour des options américaines.
L'exercice de l'option peut être fait à n'importe quel moment. Donc à chaque instant, le détenteur choisit entre garder l'option ou l'exercer.

Question 7 : Calculer la valeur d'un call américain et vérifier qu'elle est la même que celle du call européen.
On utilisera toujours une récurrence descendante en cherchant le maximum entre la valeur espérée et la valeur d'exercice de l'option.

Question 8 : Montrer en revanche que celle du put américain est toujours plus élevée que celle du put européen.
Déterminer les instants optimaux d'exercice.