Feuille de TP n°2 – Méthode de Monte Carlo

1 Méthode de Monte Carlo

Dans ce T.P. on reprendra quelques lois simulées dans le T.P. 1 et on calculera leur espérance par la méthode de Monte Carlo. On prendra soin de donner systématiquement avec la moyenne, un intervalle de confiance avec niveau de confiance de 95%.

— Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ ($\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$).
— Loi uniforme sur $[a, b]$ ($\mathbb{E}(X) = (a + b)/2$).
— Loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ ($\mathbb{E}(X) = \mu$).
— Loi binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ ($\mathbb{E}(X) = np$).
— Loi de Weibull de paramètres $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ ($\mathbb{E}(X) = (1/\lambda)^{1/\alpha}\Gamma(1 + (1/\alpha))$).
— Loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ ($\mathbb{E}(X) = 1/p$).
— Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($\mathbb{E}(X) = \lambda$).

Influence du nombre de simulations

Pour une des lois précédentes, tracer sur un même graphique $\mathbb{E}(X)$ et les bornes de l'intervalle de confiance en fonction du nombre de simulations n. Sur un autre graphique, tracer la longueur de l'intervalle de confiance en fonction de n et retrouver une décroissance en $1/\sqrt{n}$.

Lois sans espérance

1. Illustrer graphiquement que la loi de Cauchy de paramètre c n'a pas d'espérance.
2. À quelle condition sur λ, la loi de Pareto admet-elle une espérance ?

2 Applications

Etant donné un risque X, la prime stop-loss pour une franchise $d \geqslant 0$ est définie par

$$\pi_X(d) = \mathbb{E}[(X - d)^+].$$

t^+ est la partie positive de t. Ce cas s'applique aussi pour un traité de réassurance stop-loss (ou excédent de perte) qui consiste à faire prendre en charge par le réassureur la partie de la charge totale X des sinistres qui dépasse une certaine somme d.

Exercice 2.1. On suppose que X suit une loi gamma de paramètres respectifs $(\alpha_X, \lambda_X) = (7,135; 1,178)$.

1. Calculer $\pi_X(d)$ pour différentes valeurs de d.
2. Vérifier numériquement que $d \mapsto \pi_X(d)$ est une fonction décroissante, convexe, $\pi_X(0) = \mathbb{E}(X)$ et avec pour limite 0 en $+\infty$.

On a vu en introduction du cours que le prix C d'une option européenne (contrat financier d'un type particulier) est donné dans le modèle de **Black-Scholes** par la formule suivante :

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right]$$

avec W_T qui suit une loi normale de paramètres 0 et T, r est encore un taux d'intérêt et σ est la volatilité de l'actif financier sous-jacent. S_0 est le prix initial de l'actif sous-jacent et K est le prix d'exercice. On prendra comme valeur $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 0,05 = 5\%$, $T = 10$, $\sigma = 30\%$.

Exercice 2.2.

1. Calculer le prix C.
2. Comment varie C en fonction de r ?
3. On fait varier la volatilité σ. Comment évolue le prix C en fonction de σ ?

Pour ce modèle on pourra comparer le résultat avec la formule théorique :

$$C = S_0 \mathcal{N}(d_0) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_1)$$

avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right) + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}, \qquad d_1 = d_0 - \sigma\sqrt{T}.$$

Facultatif, à titre d'entraînement. Pour ce même contrat, dans le modèle de **Cox-Ross-Rubinstein**, le prix est donné par

$$CRR = \frac{1}{(1+\rho)^N} \mathbb{E}\left[\left(S_0 \prod_{i=1}^{N} T_i - K\right)^+\right]$$

avec $\mathbb{P}(T_i = 1+d) = p = 1 - \mathbb{P}(T_i = 1+u)$ où $p = (u-\rho)/(u-d)$, ρ est un taux d'intérêt et u et d sont les facteurs de proportion à la hausse et à la baisse. Attention on doit avoir $d < \rho < u$. On prendra comme valeur $S_0 = 100$, $K = 105$, $\rho = 0,05 = 5\%$, $N = 10$, $u = 6\%$, $d = -2\%$.

Exercice 2.3. Calculer le prix CRR. Comment varie CRR en fonction de ρ ?

On reprend les paramètres (r, σ, T) du modèle de Black-Scholes et on pose

$$\rho = \frac{rT}{N}, \quad \ln((1+d)/(1+\rho)) = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \ln((1+d)/(1+\rho)) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Exercice 2.4. Montrer numériquement qu'alors $\lim_{N\to+\infty} CRR(N) = C$.