TP 4 – Espérances conditionnelles

Exercice 0.1.

1. Créer un grand nombre de simulations indépendantes d'un vecteur gaussien, de dimension 2, noté (X, Y), de moyenne $m = (-1, 2)$ et de matrice de covariance $K = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. Tracer le nuage de points correspondant.
2. Calculer une approximation de $\mathbb{E}(Y|X)$. On pourra comparer le résultat obtenu avec la formule exacte donnée dans le cours.
3. Tracer le nuage de points $(X, Y - \mathbb{E}(Y|X))$. Que remarque-t-on ? Calculer la covariance entre X et $Y - \mathbb{E}(Y|X)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 0.2.

1. Créer un vecteur gaussien (Z, W) de dimension 2, centré et de matrice de covariance $K = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$. Appliquer à Z la fonction de répartition de la loi gaussienne de paramètres 0 et 1. Quelles sont les lois marginales de ce vecteur (U, W) ?
2. Appliquer à U la fonction quantile de la loi exponentielle de paramètre 2. Quelles sont les lois marginales du vecteur (V, W) ainsi créé ? Vérifier que V et W ne sont pas indépendantes.
3. Calculer grâce à ces deux vecteurs une approximation de $\mathbb{E}(V|W)$. On pourra utiliser les polynômes de Hermite : $\psi_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-y^2/2})$.

Exercice 0.3. Soit X de loi exponentielle de paramètre 1 et supposons que sachant $X = x$, la variable Y soit uniformément répartie sur $[0, \max(1, x - 1/2)]$.

1. Que vaut $\mathbb{E}(Y|X)$?
2. Calculer cette espérance par approximation. On pourra utiliser les polynômes de Laguerre : $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Quel est le problème rencontré ?

Exercice 0.4. Soient X, Y deux v.a.r. telles que

- X est uniformément répartie sur $[0, 1]$;
- sachant que $X = x$, Y admet une densité conditionnelle $f_Y^{X=x}$ donnée par

$$f_Y^{X=x}(y) = \begin{cases} (y - x)e^{-(y-x)} & \text{if } y > x, \\ 0 & \text{if } y \leqslant x; \end{cases}$$

On pose $U = Y - X$ et on laisse au lecteur le soin de vérifier que X et U sont indépendantes et que U a pour densité $u \mapsto ue^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$. On veut calculer numériquement $\mathbb{E}(Y|X)$, un peu de calcul montrant que $\mathbb{E}(Y|X) = 2 + X$.

1. Calculer la fonction de répartition de U et simuler U (on pourra utiliser `fsolve` de la librairie `scipy.optimize`).
2. Simuler le vecteur (X, Y).
3. On choisit comme base de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{P}_X)$ la famille $(1, X, X^2, \ldots)$. On sait alors que

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_i X^i \approx \sum_{j=0}^{5} a_i X^i.$$

   Calculer numériquement les coefficients a_i. On devrait obtenir $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = \ldots = a_5 = 0$: que remarque-t-on ?
4. On refait la même chose en choisissant comme base les polynômes de Legendre. Que constate-t-on ?
