Agrégation interne

Probabilités, séance 1 (mercredi 07 octobre)

Quelques références bibliographiques :

— Chafai D. *Probabilités. Préparation à l'agrégation interne*. Livre de cours, disponible gratuitement sur HAL (https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01374158).

— Meyre T. *Probabilités. Cours et exercices corrigés.*

— Dantzer J.-F. *Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités. Cours et exercices corrigés.* Vuibert

— Cotrell M., Genon-Catalot V., Duhamel C., Meyre T. *Exercices de probabilités.* Cassini.

— Ouvrard Y. *Probabilités, tomes 1 & 2.* Cassini.

Exercice 1 (Tribu)

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$.
   (a) Déterminer la plus petite tribu $\mathcal{F}_1$ sur Ω.
   (b) Déterminer la plus grande tribu $\mathcal{F}_2$ sur Ω.
   (c) Déterminer la plus petite tribu $\mathcal{F}_3$ contenant a.
   (d) Définir une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}_3$.
   (e) Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
      i. On pose $X(\omega) = 1$ pour tout Ω de Ω. Sur quelles tribus est définie X ?
      ii. On pose $X(\omega) = 1$ pour $\omega = a$, 0 sinon. Sur quelles tribus est définie X ?
      iii. On pose $X(\omega) = 1$ pour $\omega = b$, $X(\omega) = 2$ pour $\omega = c$, 0 sinon. Déterminer la tribu engendrée par X.
3. Définir la tribu utilisée pour $\Omega = \mathbb{N}$.
4. Définir la tribu utilisée pour $\Omega = \mathbb{R}$.

Réponse. Correction faite le 7 octobre. □

Exercice 2 (Propriété de la limite monotone)

1. Rappeler la définition d'une probabilité sur un ensemble $(\Omega, \mathcal{T})$.
2. Soit A_1 , A_2 , ..., A_n , ... une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements et $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

   Indication : construire des événements disjoints.

3. Soit A_1 , A_2 , ..., A_n , ... une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements et $A = \cap_{n\geq 1} A_n$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

   Indication : utiliser l'événement contraire.

Réponse. Pour la question 2, comme $A_n \subset A$, pour tout n, $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A)$. Et la suite $\mathbb{P}(A_n)$ est une suite croissante bornée donc convergente avec

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A).$$

De plus si $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour $k \geq 2$ et $B_1 = A_1$, alors ces événements sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(B_k).$$

Et

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=2}^{N} [\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})] + \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_N).$$

□

Exercice 3 (Dénombrement) Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont d'un même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de A se retrouvent côte à côte dans les cas suivants :

1. $n = 20,\ k = 3,\ p = 3$;
2. $n = 20,\ k = 5,\ p = 2$.

Réponse. Dans les deux cas, Ω est l'ensemble des dispositions des n livres, ou, autrement dit, est l'ensemble de toutes les permutations possibles de n livres. Donc le cardinal de Ω est égal à $n!$. Comme les livres sont rangés au hasard, on suppose que tous les rangements sont équiprobables. Ici $n = 20$.

1. $k = 3,\ p = 3$: intuitivement la probabilité est faible de voir les trois livres de A rangés côte à côte. Le raisonnement qui suit est valable dès que $p = k$ et pour tout n. On considère que les p livres forment un seul bloc, qu'il faut mettre à une place entre les $n - p$ autres livres. Combien y a-t-il de places différentes ? Il y en a $n - p + 1$: soit complètement à gauche, soit entre deux livres, soit complètement à droite. Il y a donc $n - p + 1$ façons de placer ce bloc des p livres de A.

   Puis au sein du bloc, il y a p ! façons de ranger les livres de A. Enfin pour les $n - p$ autres livres il y a $(n - p)!$ manières de les ranger. Au final, l'ensemble des rangements qui laissent les livres de A côte à côte a pour cardinal $(n - p + 1)(p\ !)((n - p)!)$. Donc la probabilité que l'on cherche est $\dfrac{(n-p+1)(p\ !)((n-p)!)}{n!}$.

   Pour $n = 20$ et $k = p = 3$, on trouve à peu près 1,6 %. Donc si quelqu'un entre dans la bibliothèque et voit les 3 livres de A rangés côte à côte, il en déduira que le bibliothécaire est venu mettre de l'ordre.

2. Pour ce cas, on veut qu'au moins deux livres de A soient l'un à côté de l'autre. On passe au complémentaire : tous les livres de A sont rangés séparément les uns des autres. Il y a 15 livres qui ne sont pas de A, soit 16 places pour intercaler les livres de A. Il y a donc $16 \times 15 \times \ldots \times 12 = (16!)/(11!)$ façons de caser les livres de A : 16 pour le premier livre, plus que 15 pour le deuxième, etc. jusqu'au cinquième. Et ensuite on peut permuter les livres qui ne sont pas de A, soit 15! manières de les placer. Au final la probabilité du complémentaire vaut $p = \dfrac{15!(16!)/(11!)}{20!}$, et la probabilité recherchée vaut $1 - p$. Numériquement on trouve une valeur égale à 72 %.

□

Exercice 4 (Indépendance) On lance deux fois un dé équilibré et on s'intéresse aux événements suivants : A "le premier lancer est pair", B "le second est pair", C "la somme est paire".

Montrer que les événements sont indépendants 2 à 2 mais pas dans leur ensemble.

Réponse. Les dés étant non truqués, on dénombre les cas favorables, sachant qu'il y a 36 cas possibles. Si S est la somme

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2},$$

et

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(S = 2) + \mathbb{P}(S = 4) + \ldots + \mathbb{P}(S = 12) = \frac{1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1}{36} = \frac{1}{2}.$$

De plus

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap C).$$

Donc ils ont bien 2 à 2 disjoints. Mais

$$A \cap B \cap C = \{(2, 2), (4, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 6), (6, 2), (6, 4), (4, 6), (6, 6)\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

□

Exercice 5 (Indépendance) On dispose de deux pièces de monnaie non équilibrées. La probabilité d'obtenir pile est p_1 pour la première et p_2 pour la seconde. On jette un dé équilibré ; si on tire 1 on lance deux fois de suite la première pièce ; dans les autres cas on lance deux fois de suite la seconde.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile la première fois ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir pile la deuxième fois ?
3. À quelle condition ces événements sont-ils indépendants ?

Réponse. C'est typiquement des calculs de probabilités conditionnelles. On note A l'événement : “le dé tombe sur 1”, qui a pour probabilité 1/6.

1. La probabilité α d'obtenir pile la première fois est donnée par

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{pile}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{pile}|A^c)\mathbb{P}(A^c) = p_1 \times 1/6 + p_2 \times 5/6.$$

   en utilisant la règle des probabilités totales. Ce que fera la pièce au second lancer ne compte pas.

2. La probabilité β d'obtenir pile la deuxième fois est encore :

$$\beta = \mathbb{P}(\text{*-pile}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{*-pile}|A^c)\mathbb{P}(A^c) = p_1 \times 1/6 + p_2 \times 5/6.$$

   Le résultat du premier lancer ne compte pas non plus.

3. On calcule la probabilité γ d'obtenir pile-pile :

$$\gamma = \mathbb{P}(\text{pile-pile}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{pile-pile}|A^c)\mathbb{P}(A^c) = p_1^2 \times 1/6 + p_2^2 \times 5/6.$$

Ces événements sont indépendants si $\gamma = \alpha\beta$ soit

$$p_1^2 \times 1/6 + p_2^2 \times 5/6 = (p_1 \times 1/6 + p_2 \times 5/6)^2 = (1/36)p_1^2 + (5/18)p_1p_2 + (25/36)p_2^2.$$

D'où

$$0 = (5/36)p_1^2 + (5/36)p_2^2 - (5/18)p_1p_2 = (5/36)(p_1 - p_2)^2.$$

Il faut que $p_1 = p_2$.

□

Exercice 6 (Probabilités conditionnelles) On a trois boites numérotées 1,2 et 3. La première contient 1 boule blanche et 2 boules noires, la deuxième 2 blanches et 1 noire, enfin la troisième 3 blanches. On choisit au hasard une des trois boites, puis on tire une boule de cette boite. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche ? Sachant que la boule est blanche, quelle est la probabililté qu'elle provienne de la première boite ?

Réponse. Au hasard signifie équiprobabilité. Donc chaque boite a une chance sur trois d'être choisie. De même une fois la boite choisie, les boules sont tirées uniformément, ou avec la même probabilité.

— La probabilité $\mathbb{P}(B)$ d'avoir une boule blanche est donc donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|\text{boite } 1)\mathbb{P}(\text{boite } 1) + \mathbb{P}(B|\text{boite } 2)\mathbb{P}(\text{boite } 2\ ) + \mathbb{P}(B|\text{boite } 3)\mathbb{P}(\text{boite } 3) \\ &= (1/3)(1/3) + (2/3)(1/3) + 1(1/3) = 2/3.\end{aligned}$$

On peut remarquer que comme les boites sont tirées uniformément c'est équivalent à mettre les neuf boules dans une grosse boite (dans laquelle il y a donc 6 blanches) et à tirer une boule parmi les neuf.

— On cherche $\mathbb{P}(\text{boite } 1|B)$, soit par définition

$$\mathbb{P}(\text{boite } 1|B) = \frac{\mathbb{P}(\text{boite } 1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|\text{boite } 1)\mathbb{P}(\text{boite } 1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{(1/3)(1/3)}{2/3} = \frac{1}{6}.$$

Un arbre peut aider à comprendre ces raisonnements. □

Exercice 7 (Modélisation classique) On estime que 10% de la population a une certaine maladie. Un test de détection existe mais n'est point parfait. La probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte par cette maladie est 0,05. La probabilité que le test soit négatif pour une personne qui en fait a la maladie est 0,01.

Sachant que son test est positif, quelle est la probabilité pour une personne d'avoir cette maladie ?

Réponse. Le grand classique de la formule de Bayes, qu'il est aussi simple de "redémontrer à chaque fois". On note par T^+ "le test est postif", M "la personne est malade". On cherche $\mathbb{P}(M|T^+)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|T^+) &= \frac{\mathbb{P}(M\cap T^+)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(T^+|M^c)\mathbb{P}(M^c)} \\ &= \frac{(1-\mathbb{P}(T^-|M))\mathbb{P}(M)}{(1-\mathbb{P}(T^-|M))\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(T^+|M^c)\mathbb{P}(M^c)} \\ &= \frac{(1-0,01)\times 0,1}{(1-0,01)\times 0,1+0,05\times 0,9} \approx 68,75\%.\end{aligned}$$

Si ce chiffre peut sembler anormalement bas, il est tout à fait conforme (même supérieur) aux chifffres connus pour ces tests médicaux. C'est une des raisons pour lesquelles une contre-expertise est toujours faite (SIDA, dopage, etc.). □

Exercice 8 (Loi discrète (1)) On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Réponse. Cet exercice utilise beaucoup les interversions de sommes doubles.

Y prend toutes les valeurs entières de 1 à n. Pour que Y soit égale à k sachant que on a choisi l'urne numéro j (une chance sur n de la choisir), il faut que $j \geq k$ et on a une chance sur j de choisir cette boule. Quand on rassemble les morceaux :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}.$$

Notons que ce sont bien des valeurs entre 0 et 1 et

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\frac{1}{j} = 1.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}k\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j+1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{n}(n^2+3n) = \frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

□

Exercice 9 (Loi discrète (2)) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p, $0 < p < 1$.

1. Montrer que pour une v.a. Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(Z \geq n)$.

2. En déduire $\mathbb{E}(X)$ de deux façons.
3. On note $T = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de T.

Réponse. Correction faite le 7 octobre. Une remarque complémentaire. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition respective F_X et F_Y, alors on peut déterminer facilement la loi de $T = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. En effet

$$T > t \Leftrightarrow X > t \text{ et } Y > t, \qquad V \geq v \Leftrightarrow X \leq v \text{ et } Y \leq v.$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)). \end{aligned}$$

Et pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(X \leq v \text{ et } Y \leq v) = F_X(v)F_Y(v).$$

Et on rappelle que la fonction de répartition caractérise complètement la loi d'une variable aléatoire. De plus si X et Y sont à densité, F_X et F_Y sont dérivables (là où les densités sont continues). Et on peut donc dériver F_T et F_V pour en déduire leur densité. $\square$

Exercice 10 (Code de la route) L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_i)$. Quelle est la loi de S ?
2. À quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Réponse.

1. À la question i, soit il connait la réponse (avec probabilité p) et il répond juste, soit il ne la connait pas et il a une chance sur 4 d'avoir juste. Donc

$$\mathbb{P}(A_i) = p + \frac{1}{4}(1 - p) = \frac{3p + 1}{4}.$$

Pour chaque question, il gagne avec probabilité $q = \frac{3p+1}{4}$. Par indépendance entre les 40 questions, S suit une loi binomiale de paramètres 40 et q.

2. L'espérance de S est $40q = 10(3p + 1)$. Donc cette espérance dépasse 36 si $3p + 1 \geq 3,6$, soit $p \geq 13/15$. Donc il ne peut pas faire beaucoup d'impasses...

$\square$

Exercice 11 (Série et probabilités) Soit la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\alpha_k = \frac{e^{-2}}{4} \times \frac{2^k}{k!} \times (1+ak),$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On veut définir une variable aléatoire X sur $\mathbb{N}$ par $\mathbb{P}(X = k) = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Trouver pour quelle valeur unique de a la loi de X est une loi de probabilité.
2. Dans ce cas, calculer son espérance et sa fonction génératice.

Réponse. Exercice classique où à partir du terme général d'une série convergente, on construit une loi de probabilité discrète.

1. Il faut que $\alpha_k \geq 0$ pour tout k et que

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \frac{e^{-2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} + a\frac{e^{-2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} k = \frac{e^{-2}}{4} e^2 + a\frac{e^{-2}}{4} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{4} + \frac{a}{2}.$$

   Donc a doit valoir $3/2$. À noter qu'en toute rigueur il convient de prouver qu'on peut bien séparer les deux sommes infinies.

2. Comme c'est une variable aléatoire à valeurs positives (dans $\mathbb{N}$), son espérance existe toujours (même si elle peut valoir $+\infty$!). Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\alpha_k = \frac{e^{-2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{2^k}{k!} + \frac{3e^{-2}}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} k^2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3e^{-2}}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} k(k-1) + \frac{3e^{-2}}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} k \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3e^{-2}}{8} 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4}.
\end{aligned}$$

   On rappelle qu'une fonction génératrice $g(t)$ a un rayon de convergence toujours plus grand que 1 et que sa valeur en 1 doit valoir 1. Ici pour tout $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}
g(t) = \mathbb{E}(t^X) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \alpha_k = \frac{e^{-2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{2^k}{k!} + \frac{3e^{-2}}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} k t^k \\
&= \frac{e^{-2}}{4} e^{2t} + \frac{3e^{-2}}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{(k-1)!} = \frac{1}{4} e^{2t-2} + \frac{3}{4} t e^{2t-2} \\
&= \frac{1}{4} e^{2t-2} (1+3t).
\end{aligned}$$

   On a bien $g(1) = 1$ et $g'(t) = \frac{1}{4} e^{2t-2}(5+6t)$ avec $g'(1) = \mathbb{E}(X)$.

□

Exercice 12 (Fonction génératrice et polynôme)

1. Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $E = \{2, 3, \ldots, 12\}$?

2. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1} G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur E.

   Indication : on remarquera que $G_{X_i}(s) = s\phi_i(s)$ où $\phi_i(s)$ est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle.

3. Peut-on piper deux dés indépendants de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables ?

Réponse.

1. Pour la loi uniforme sur $E = \{2, 3, \ldots, 12\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$g(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{t^2}{11} \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.$$

2. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, la fonction génératrice G de $X_1 + X_2$ est donnée par le produit des fonctions génératrices $G_{X_1} G_{X_2}$. Or pour tout t
$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{6} p_k^1 t^k = t \sum_{k=1}^{6} p_k^1 t^{k-1} = t\phi_1(t).$$
   Ici les poids p_k^1 sont positifs et $p_1^1 + \ldots + p_6^1 = 1$. Donc $G_{X_1}(t)$ s'annule pour $t = 0$ et pour une valeur $\tau \neq 1$ telle que $\phi_1(\tau) = 0$. Car ϕ_1 est un polynôme de degré 5.
   Si la loi de $X_1 + X_2$ est la loi uniforme sur E, alors on a
$$t^2 \phi_1(t)\phi_2(t) = g(t) = \frac{t^2}{11} \frac{1 - t^{11}}{1 - t} \Rightarrow \phi_1(t)\phi_2(t) = \frac{1}{11} \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.$$
   Ainsi la fonction $\frac{1-t^{11}}{1-t}$ doit s'annuler en $\tau \neq 1$. Donc le nombre réel τ est une racine 11-ème de l'unité. Or celles-ci à part 1, sont toutes complexes. Donc ce n'est pas possible.

3. Non.

□

Exercice 13 (Somme de v.a.) Soit X et Y deux v.a. indépendantes définies sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Exprimer la loi de X+Y en fonction de celles de X et Y.
2. Montrer que, pour tout $s \in]-1, 1[$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$, G représentant la fonction génératrice.
3. Généraliser ce qui précède au cas de n variables aléatoires indépendantes.
4. Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ? Retrouver alors l'espérance et la variance de cette loi.
5. Quelle est la loi de la somme :

   - de deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres $(n; p)$ et $(m; p)$?

   - deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 ?

Réponse.

1. $X+Y$ peut prendre n'importe quelle valeur entière n et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X=k\}\cap\{Y=n-k\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(\{X=k\}\cap\{Y=n-k\}\right)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right).\end{aligned}$$

La troisième égalité est due à l'incompatibilité des événements, la dernière à l'indépendance entre X et Y.

2. En effet

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(s) &= \mathbb{E}(s^{X+Y})=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\mathbb{P}\left(X+Y=n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}s^n\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}s^{n-k}s^k\mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}s^{n-k}s^k\mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}s^k\mathbb{P}\left(X=k\right)\sum_{n=k}^{\infty}s^{n-k}\mathbb{P}\left(Y=n-k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\mathbb{P}\left(X=k\right)G_Y(s) \\ &= G_X(s)G_Y(s).\end{aligned}$$

3. Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n v.a. indépendantes et si $Z=X_1+\ldots+X_n$, alors

$$G_Z(s)=\prod_{k=1}^{n}G_{X_k}(s).$$

4. Si X suit une loi de Bernoulli (p), alors

$$G_X(s)=s^0\mathbb{P}(X=0)+s^1\mathbb{P}(X=1)=ps+(1-p).$$

Donc la somme de n Bernoulli (p) indépendantes a pour fonction génératrice :

$$G_Z(s)=(ps+(1-p))^n.$$

On rappelle que

$$G_X'(s)=\sum_{k=0}^{\infty}ks^{k-1}\mathbb{P}(X=k)\Rightarrow G_X'(1)=\mathbb{E}(X).$$

Dans notre cas

$$G_Z'(s)=np(ps+(1-p))^{n-1}\Rightarrow\mathbb{E}(Z)=np.$$

Et

$$G_X''(s)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)s^{k-2}\mathbb{P}(X=k)\Rightarrow G_X''(1)=\mathbb{E}(X(X-1)).$$

Dans notre cas

$$G_Z''(s)=n(n-1)p^2(ps+(1-p))^{n-1}\Rightarrow\mathbb{E}(Z^2-Z)=n(n-1)p^2.$$

Donc la variance vaut

$$\mathbb{E}(Z^2)-(\mathbb{E}(Z))^2=\mathbb{E}(Z^2-Z)+\mathbb{E}(Z)-(\mathbb{E}(Z))^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p).$$

5. Si X est une v.a. binomiale (n, p), alors
$$G_X(s) = (ps + 1 - p)^n.$$
Donc
$$G_{X+Y}(s) = (ps + 1 - p)^n (ps + 1 - p)^m = (ps + 1 - p)^{n+m}.$$
C'est donc une v.a. binomiale $(n + m, p)$.
Si X suit une loi de Poisson (λ), alors
$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$
Donc
$$G_{X+Y}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}.$$
C'est une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

□

Exercice 14 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) On pose $X_0 = 0$ et pour $n \geq 1$
$$X_n = Y_1 + \dots Y_n,$$
où les Y_n prennent leurs valeurs dans $\{-1; 1\}$, $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes, et pour tout n,
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer la probabilité $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Quelle est la nature de la série de terme général p_n ?
   Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de fois où la particule est passée en 0 entre les instants $t = 1$ et $t = 2n$.

2. Montrer que
$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n} \binom{2n}{n} - 1.$$
3. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(U_n) = +\infty$.

Réponse.

1. Pour calculer $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, on remarque d'abord que cette valeur est nulle pour n impair. En effet il faut faire autant de déplacements d'un côté que de l'autre. Ensuite la probabilité d'avoir un chemin particulier de longueur n est $(1/2)^n$ (équiprobabilité). Donc pour obtenir p_n, il faut compter le nombre de chemins allant de 0 à 0 en n étapes, soit choisir parmi les n étapes lesquelles consistent à ajouter +1. Ainsi $p_n = \binom{n}{n/2} (1/2)^n$ si n est pair.
   Autre méthode. Si on pose $Z_n = (Y_n + 1)/2$, les v.a. Z_n sont i.i.d. et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Donc
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \right) - n;$$

et

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k = \frac{n}{2}\right).$$

Or $\sum_{k=1}^{n} Z_k$, somme de n v.a. de Bernoulli indépendantes, suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Ceci permet de retrouver le résultat précédent.

Avec la formule de Stirling

$$\frac{(2p)!}{(p!)^2}(1/2)^{2p} \approx \frac{\sqrt{4\pi p}\ (2p/e)^{2p}}{2\pi p\ (p/e)^{2p}}(1/2)^{2p} = \frac{1}{\sqrt{\pi p}}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \binom{2p}{p} (1/2)^{2p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(2p)!}{(p!)^2}(1/2)^{2p} = +\infty.$$

La série est divergente.

2. Par définition

$$U_n = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{1}_{X_k=0}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(U_n) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(X_k = 0) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(X_{2m} = 0) = \sum_{m=1}^{n} \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m} = \mathbb{E}(U_{n-1}) + \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

On vérifie ensuite que la réponse donnée satisfait bien cette relation de récurrence.

3. La formule de Stirling donne encore que

$$\mathbb{E}(U_n) \sim \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} - 1.$$

□