Agrégation interne

Équations différentielles (mercredi 15 janvier)

N.B. : La fiche est longue, avec beaucoup d'exercices qui se ressemblent. Ceux de la partie 1 forment la base : dans l'idéal, il faudrait être capable de tous les résoudre. Ceux de la seconde partie vont des classiques non linéaires à nettement plus compliqués. Ils peuvent servir d'exemples pour des leçons et présentent quelques techniques usuelles sur les équations différentielles non linéaires.

Par ailleurs il faut absolument connaître LE théorème de Cauchy-Lipschitz qui est la base théorique sur les équations différentielles.

Théorème 1 *Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre $C = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d;\ |t - t_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ tel que*

$$\forall (t,x) \in C,\ \forall (t,y) \in C,\ |f(t,x)| \leq M, \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|,$$

le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$, avec $T = \min(a, b/M)$ et $(t, y(t)) \in C$, pour tout $t \in J$.

De ce résultat on déduit :

Proposition 1 *Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to \mathbb{R}^d$ deux solutions de $y' = f(t,y)$, avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I, alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I.*

Corollaire 1 *Si f est localement lipschitzienne en y sur U, pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^d$ et une seule.*

Géométriquement, cela signifie que deux solutions maximales ne peuvent pas se couper.

Proposition 2 *Si f est définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}^d$, et si (I, y) est une solution maximale avec $I =]T_*, T^*[$, alors,*

- *ou bien $T^* = b$, ou bien $T^* < b$ et $\lim_{t \to T^*} |y(t)| = +\infty$;*
- *ou bien $T_* = a$, ou bien $T_* > a$ et $\lim_{t \to T_*} |y(t)| = +\infty$.*

Corollaire 2 *Sous une des hypothèses suivantes :*

1. *$f :]a,b[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et bornée.*
2. *$f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et pour tout compact $K \subset I$ il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que : $|f(t,y)| \leq C_1|y| + C_2$, $\forall (t,y) \in K \times \mathbb{R}^d$.*

Alors toute solution maximale est globale.

Quelques références bibliographiques :

- Livres de classes préparatoires : ils ont tous des chapitres consacrés à ce sujet !

- H. Queffélec, C. Zuily : analyse pour l'agrégation, chapitre X.
- J.-P. Demailly : Analyse numérique et équations différentielles.

Leçons concernées :

- 224 : équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
- 225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
- 428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
- 429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).
- 449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
- 455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.

Sans compter les leçons où les équations différentielles peuvent servir d'applications (séries entières, séries de Fourier, transformées de Fourier ou de Laplace, etc.).

---

1 Équations linéaires

Premier ordre

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

1. $y' - 2y = 0$;
2. $y' - 2y = x$;
3. $y' = \tan(x)y + \cos(x)$;
4. $2xy' + y = 2\sqrt{x}$;
5. $xy' + (2x-1)y = x^2$;
6. $x^3 + 2xyy' = 2y^2$ (poser $z = y^2$).

Exercice 2 (⋆) Résoudre sur tout intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes :

1. $|x|y' + (x-1)y = x^3$;
2. $xy' = |y-1|$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
3. $(1-x^2)y' + xy + 1 = 0$;

Réponse.

1. Distinguer $I \subset \mathbb{R}_+^*$ et $I \subset \mathbb{R}_-^*$.
   Dans le premier cas, on résout l'équation sans second membre : $y' + ((x-1)/x)y = 0$. On obtient $y(x) = \lambda x e^{-x}$ puis on utilise la métho de variation de la constante. Alors $\lambda'(x) = xe^x$; d'où en intégrant une solution particulière est $x \mapsto x(x-1)$. Finalement on obtient comme ensemble de solutions $x \mapsto \lambda x e^{-x} + x(x-1)$ avec $x > 0$.
   Dans le second cas la même méthode donne comme solution : $y(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + \mu \frac{e^x}{x}$ avec $x < 0$.
   Pour recoller en zéro, il faut avoir une solution continue en zéro, soit $\lim\limits_{x\to 0, x<0} y(x) = 0$. Or pour $x < 0$, $y(x) = x^2 + 3x + \dfrac{\mu e^x + 6 + 6x}{x}$. Si $\mu \neq -6$, alors $\lim\limits_{x\to 0, x<0} |y(x)| = +\infty$. Si $\mu = -6$, alors $\lim\limits_{x\to 0, x<0} y(x) = 0$, car $e^x = 1 + x + o(x)$.
2. Si y est une solution, alors nécessairement y est croissante.
   Si pour tout x, $y(x) \leq 1$, alors l'équation devient $xy' = 1 - y$, ce qui donne $y(x) = 1 + \lambda/x$ avec $\lambda \leq 0$. Si pour tout x, $y(x) \geq 1$, alors $xy' = y - 1$, d'où $y(x) = 1 + \mu x$ avec $\mu \geq 0$.
   Enfin s'il existe $x_0 > 0$ tel que $y(x_0) = 1$, alors en ce point $y'(x_0) = 0$. Donc nécessairement $\lambda = \mu = 0$. Autrement dit, y est constante, égale à 1.
3. Il faut distinguer les cas où 1 et -1 sont dans l'intervalle I. On obtient
   — $y(x) = -x + \lambda\sqrt{|x^2-1|}$ si $-1 \notin I$ et $1 \notin I$;
   — $y(x) = -x$ sinon.

□

Exercice 3 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Réponse. Raisonner par condition nécessaire et suffisante. Si f convient, poser $\alpha = \int_0^1 f(t)dt$, et f est solution de $y' = y + \alpha$; i.e. $f = -\alpha + \lambda e^x$. Puis faire la réciproque. Finalement :

$$f(x) = \frac{2e^x + 1 - e}{3 - e}.$$

□

Second ordre

Exercice 4 Résoudre sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = x \exp(-2x)$;
2. $y'' - 2y' + 2y = 0$ avec $[0, \pi] \subset I$, $y(0) = 0$, et $\sup_{[0,\pi]} y(x) = 1$;
3. $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$;
4. $y'' + y' + (1/2)y = \sin(x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$;
5. $y'' + y = e^{-|x|}$.

Réponse.

1. $y(x) = \mu e^x + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x + \lambda\right) e^{-2x}$
2. $y(x) = \sqrt{2} \exp(-3\pi/4)e^x \sin x$
3. Résoudre d'abord sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. $x = \varepsilon e^t$. $z(t) = y(x)$. En déduire $z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = \varepsilon e^t + 4$, soit $z(t) = \varepsilon e^t + 1 + (\lambda t + \mu)e^{2t}$, i.e. $y(x) = x + 1 + (\lambda \ln |x| + \mu)x^2$. Recoller en 0 : $y(x) = x + 1 + \mu x^2$.
4. Si $0 \notin I$, $y(x) = \lambda \cos \ln |x| + \mu \sin \ln |x|$, sinon $y = 0$.
5. Si $0 \notin I$, $y(x) = \frac{1}{x}(\lambda \ln |x| + \mu)$, sinon $y = 0$.

□

Exercice 5 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1. Pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, on note $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{si } 0 < t < \varepsilon \\ 1 & \text{si } \varepsilon \leq t \end{cases}$$

   Montrer que l'équation différentielle $y'' + (\omega)^2 y = g_\varepsilon$ admet une solution et une seule y sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in]-\infty, 0],\ y(t) = 0$. On note y_ε cette solution.

2. Montrer qu'il existe une application $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on précisera, telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_\varepsilon(t) - Y(t)| = 0$$

   .

Réponse.

1. La solution générale de $y'' + \omega^2 y = g_\varepsilon$ sur $]0, \varepsilon[$ est :
$$y : t \mapsto \frac{t}{\omega^2 \varepsilon} + A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$
et la solution générale de $y'' + \omega^2 y = g_\varepsilon$ sur $]\varepsilon, +\infty[$ est :
$$y : t \mapsto \frac{1}{\omega^2} + C \cos \omega t + D \sin \omega t.$$
Il reste à déterminer une CNS sur (A, B, C, D) pour avoir une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On trouve
$$A = 0,\ B = -\frac{1}{\omega^3 \varepsilon},\ C = -\frac{\sin \omega\varepsilon}{\omega^3 \varepsilon},\ D = \frac{\cos \omega\varepsilon - 1}{\omega^2 \varepsilon}.$$
2. Montrer d'abord la convergence simple de y_ε vers Y :
$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1 - \cos \omega t)/(\omega^2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
en utilisant pour $t > 0$ un $\varepsilon < t$. Pour étudier la convergence uniforme utiliser les inégalités suivantes :
$$|u - \sin u| \leq \frac{u^3}{6}$$
$$1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}.$$

□

Exercice 6 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = (-2x + 2)e^x.$$

Réponse. Raisonner par condition nécessaire et suffisante. Soit f convenant. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$f'(x) = -f(-x) + (-2x + 2)e^x,$$
f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on en déduit que f est solution de
$$y'' + y = -2xe^x + (2x + 2)e^{-x}.$$
Solution générale :
$$(-x + 1)e^x + (x + 2)e^{-x} + A \cos x + B \sin x.$$
Réciproquement on montre que $A + B = 0$. □

Exercice 7 On considère l'équation linéaire du troisième ordre
$$y''' + y'' + y' + y = \cos t,$$
où y désigne une fonction inconnue de la variable $t \geq 0$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à cette équation.
2. À l'aide de la méthode de variation des constantes, déterminer la solution générale de l'équation.
3. Montrer qu'elle admet une solution et une seule de la forme $At \cos t + Bt \sin t$: la déterminer explicitement, et tracer son graphe.

Système linéaire

Exercice 8 Soient b et c deux fonctions continues sur un intervalle fixé $I = [0, T[$. Soit (S) le système différentiel linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x' &= \quad y + b(t) \\ y' &= 2x - y + c(t) \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système (S_0) sans second membre et calculer e^{tA}.
2. Déterminer la solution générale du système (S_0).
3. Déterminer la solution générale du système (S) pour $b(t) = 0$ et $c(t) = e^{-t}$.

Exercice 9 Déterminer les solutions réelles des systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' &= x + z \\ y' &= -y - z \\ z' &= 2y + z \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$
3. $\begin{cases} x'' + x' + 4y' - x - 3y &= 0 \\ y'' - 3y' + x + 3y &= 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x'' &= (\alpha + \beta)x + \beta y \\ y'' &= -\beta x + (\alpha - \beta)y \end{cases}$

Réponse.

1. $$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$
2. $$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}e^t \sin\sqrt{2}t \\ -2e^t \cos\sqrt{2}t \\ 2e^t \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}e^t \cos\sqrt{2}t \\ 2e^t \sin\sqrt{2}t \\ -2e^t \sin\sqrt{2}t \end{pmatrix}.$$
3. Remarque : en additionnant $(x' + y')' + (x' + y') = 0$. Calculer $x + y$, puis remplacer.
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
4. Remarque : en additionnant $(x + y)'' - \alpha(x + y) = 0$. Calculer $x + y$, puis remplacer. Si $\alpha = \omega^2$:
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = ae^{\omega t} \begin{pmatrix} \beta t/(2\omega) \\ 1 - \beta t/(2\omega) \end{pmatrix} + be^{-\omega t} \begin{pmatrix} -\beta t/(2\omega) \\ 1 - \beta t/(2\omega) \end{pmatrix} + ce^{\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + de^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 10 ($\star$) Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2(x(t) - ty(t)), \\ y'(t) = 2y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la solution globale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbb{N}$).
   (a) Écrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
   (b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0.
   (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte de (1).

---

2 Équations non linéaires

Bernoulli, Riccati

Exercice 11 ($\star$) Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^4}{x^3}$;
2. $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$.

Exercice 12 ($\star$) On considère l'équation différentielle

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x.$$

1. Possède-t-elle une solution particulière de type polynôme ?
2. Soit $y_{(1)}$ cette solution particulière. Quelle est l'équation satisfaite par z, si $y = y_{(1)} + z$?
3. Quelle l'équation satisfaite par $1/z$? En déduire la solution générale de l'équation initiale.
4. Soit f la fonction telle que $xy' = f(x, y)$. Les courbes isoclines sont les courbes $\Gamma_p : f(x, y) = p$. Quelle est l'équation de l'isocline de pente 0 dans le nouveau repère de vecteurs de base $(1, 1)$ et $(0, 1)$? Dessiner cette isocline en précisant les tangentes aux points d'abscisse 0 dans l'ancien repère.
5. Dessiner l'allure générale des solutions.
6. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Combien passe-t-il de solutions maximales de classe C^1 par (x_0, y_0) ? On précisera l'intervalle de définition de ces solutions et le cas échéant on indiquera les solutions globales.

Séparation de variables

Exercice 13 Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $y' = e^{x+y}$;
2. $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$.

Exercice 14 ($\star$) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = (a-y)(b-y), \tag{2}$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

1. Montrer que pour toute donnée initiale $\alpha \in \mathbb{R}$ fixée, l'équation (2) admet une unique solution y maximale telle que $y(0) = \alpha$.
2. Que vaut cette solution si $\alpha = a$ ou $\alpha = b$?
3. On suppose que $a = b$. Trouver toutes les solutions de (2). Tracer l'allure de ces solutions en fonction de a et α.

   Indication : on pourra diviser l'équation par $(a-y)^2$ en le *justifiant* et intégrer.
4. On suppose que $a = 1$, $b = 2$, $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq b$. Déterminer la solution de (2) en fonction de $y(0) = \alpha$. Tracer l'allure de ces solutions en fonction de α.

Réponse.

1. La fonction $y \mapsto (a-y)(b-y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1, donc localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
2. Si $\alpha = a$ ou $\alpha = b$, la solution est la solution constante $y(t) = \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. On suppose que $a = b$. On peut diviser par $(a-y)^2$ car si $\alpha \neq a$ alors pour tout t, $y(t) \neq a$. Les solutions maximales ne se croisent pas. Dans ce cas, on a

$$y(t) = a - \frac{a-\alpha}{1+(a-\alpha)t}.$$

   Alors
   — f est croissante si $\alpha < a$, décroissante sinon.
   — $\lim_{t\to+\infty} f(t) = a$.
4. On suppose que $a = 1$, $b = 2$, $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq b$. Dans ce cas, on sait que pour tout $t \geq 0$, $y(t) \neq a$ et $y(t) \neq b$. Donc on peut diviser :

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{(1-y)(2-y)} = 1 \quad & \Longrightarrow \quad \frac{y'}{1-y} - \frac{y'}{2-y} = 1 \\
& \Longrightarrow \quad \ln\left|\frac{1-\alpha}{1-y(t)}\right| + \ln\left|\frac{2-y(t)}{2-\alpha}\right| = t \\
& \Longrightarrow \quad \left|\frac{1-\alpha}{1-y(t)}\frac{2-y(t)}{2-\alpha}\right| = e^t \\
& \Longrightarrow \quad \left|\frac{2-y(t)}{1-y(t)}\right| = \left|\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right| e^t.
\end{aligned}$$

   Il faut ensuite discuter pour supprimer les valeurs absolues. Soit I l'intervalle de définition de la solution maximale.

   (a) Si $1 < \alpha < 2$, alors pour tout $t \in I$, $1 < y(t) < 2$. Et alors on a

$$\frac{2-y(t)}{1-y(t)} = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}e^t \Longrightarrow y(t) = \frac{2 - \frac{2-\alpha}{1-\alpha}e^t}{1 - \frac{2-\alpha}{1-\alpha}e^t} = \frac{2-2\alpha-(2-\alpha)e^t}{1-\alpha-(2-\alpha)e^t}.$$

   On remarquera que y est alors définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et qu'elle est décroissante et tend vers 1 en $+\infty$, vers 2 en $-\infty$.

(b) Si $1 > \alpha$, alors pour tout $t \in I$, $1 > y(t)$. Et alors on a de même

$$y(t) = \frac{2 - 2\alpha - (2-\alpha)e^t}{1 - \alpha - (2-\alpha)e^t}.$$

Cette fois-ci le dénominateur s'annule pour $t = t_0 = \ln \frac{1-\alpha}{2-\alpha} < 0$. Donc y est croissante sur $]t_0, +\infty[$, tend vers 1 en $+\infty$, vers $-\infty$ en t_0.

(c) Si $\alpha > 2$, alors pour tout t , $2 < y(t)$. Et de même

$$y(t) = \frac{2 - 2\alpha - (2-\alpha)e^t}{1 - \alpha - (2-\alpha)e^t}.$$

Alors le dénominateur s'annule pour $t = t_0 = \ln \frac{\alpha-1}{\alpha-2} > 0$. Donc y est croissante sur $]-\infty, t_0[$, tend vers 2 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en t_0.

□

Exercice 15 ($\star$) L'équation différentielle de la vitesse d'un corps en chute libre s'écrit

$$v' = f(v)v + g, \quad t > 0, \qquad v(0) = 0.$$

où f est la physique des frottement dans l'air.

1. En posant $f(t) = -k_1$ (qui correspond aux frottements « aux petites vitesses », résoudre l'équation différentielle en v. On note v_1 cette solution. Calculer

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t).$$

2. Les forces de frottements aux grandes vitesses d'exprime comme $f(v) = -k_2 v$. Résoudre l'équation différentielle en v. On note v_2 la solution. Comparer

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t)$$

avec la limite précédente.

3. Tracer les portraits de phase des deux solutions.

Exercice 16 ($\star$) On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y^2 e^x - y = 0$.

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions.
2. Montrer qu'en divisant par y^2, on obtient une équation différentielle linéaire.
3. Résoudre (E).

Réponse. Diviser par y^2 : $z = 1/y$ et $xz' + z = e^x$. $y = \dfrac{x}{e^x + b}$. Regarder ce qui se passe en $x = 0$. Pour $b \neq -1$, prolongement en 0. □

Exercice 17 ($\star$) On considère l'équation différentielle (E) : $y'(1-x^3) = y^2 - x^2y - 2x$.

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions.
2. Trouver une solution particulière. Quelle est l'équation (E') satisfaite par z égale à y moins cette solution particulière ?
3. Montrer qu'en divisant (E') par z^2, on obtient une équation différentielle linéaire.
4. Résoudre (E).

Réponse. $y = -x^2$ sol. particulière. Poser $y = -x^2 + z$: $z'(1-x^3) = -3zx^2 + z^2$. Diviser par z^2 et $u = 1/z$: $-u'(1-x^3) + 3x^2 = 1$. On obtient $y = -x^2 + \dfrac{1-x^3}{a-x}$. □

Exercice 18 ($\star$) On considère l'équation différentielle (E) :

$$(xy - 2x^2)y' - 2y^2 + 3xy = 0.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions.
2. Résoudre (E).

Indication : on pourra poser $y = xt(x)$.

Réponse. On obtient

$$\left(\frac{t-2}{t^2-t}\right) t' = \frac{1}{x}.$$

□

Exemples provenant de sciences expérimentales

Exercice 19 (Lotka-Volterra ($\star\star$)) On considère le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= N(a-bP), \\ \frac{dN(t)}{dt} &= P(cN-d), \end{aligned}$$

a, b, c et d étant quatre constantes positives.

1. Montrer que ce système se ramène à l'étude du système

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma u(1-v), \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u-1),$$

en posant $u = cN/d$, $v = bP/a$, $\tau = at$ et $\gamma = d/a$.

2. Justifier l'existence et l'unicité des solutions maximales du problème de Cauchy pour $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Quels sont les points fixes de ce système ? Que se passe-t-il si u_0 ou v_0 est nul ? En déduire $(0,0)$ est un point fixe instable.
3. On suppose maintenant que $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus (1,1)$. Montrer qu'il existe $C > 1+\gamma$ tel que si (u,v) est une solution maximale du problème de Cauchy telle que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$, alors
$$\gamma u + v - \ln(u^\gamma v) = C.$$
En déduire que toute solution maximale est globale.
4. Cette question est plus difficile : montrer que ces solutions globales sont périodiques.
5. Discuter brièvement de la généralisation suivante :
$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= N(a - bP) - \lambda N^2, \\ \frac{dN(t)}{dt} &= P(cN - d) - \mu P^2. \end{aligned}$$
C'est un modèle dit *proie-prédateur logistique*. Indication : on mettra en évidence les droites $a - bP - \lambda N = 0$ et $cN - d - \mu P = 0$, et on distinguera deux cas suivant que les droites se coupent ou non dans l'ensemble $\{(N,P);\ N > 0,\ P > 0\}$.

Exercice 20 (Équation de Van der Pol ($\star\star$)) On considère l'équation :
$$x'' + x'(3x^2 - 1) + x = 0.$$
1. Justifier qu'on peut ramener cette équation au système différentiel d'ordre 1
$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) - x^3(t) + x(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que le problème de Cauchy admet une solution globale unique (utiliser le premier exercice).
3. On appelle trajectoire associée à une solution de (3), l'ensemble parcouru dans le plan euclidien par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. Montrer que les trajectoires associées à deux solutions distinctes de (3) coïncident ou n'ont aucun point commun ; montrer que par chaque point du plan passe une trajectoire et une seule ; montrer que si une trajectoire a un point double (i.e. correspondant à deux valeurs distinctes de t), les solutions associées à (3) sont périodiques (et tous les points sont doubles). Quelles sont les trajectoires réduites à un point ?
4. Montrer que la courbe symétrique d'une trajectoire par rapport à $(0,0)$ est encore une trajectoire.

5. On considère maintenant les sous-ensembles du plan

$$
\begin{aligned}
&D^+ = \{(0,y),\ y>0\}\,; \quad D^- = \{(0,y),\ y<0\}\,;\\
&E_1 = \Big\{(x,y);\ x>0 \text{ et } y > x^3-x\Big\}\,; \quad \Gamma_+ = \Big\{(x,x^3-x);\ x>0\Big\}\,;\\
&E_2 = \Big\{(x,y);\ x>0 \text{ et } y < x^3-x\Big\}\,;\\
&E_3 = \Big\{(x,y);\ x<0 \text{ et } y < x^3-x\Big\}\,; \quad \Gamma_- = \Big\{(x,x^3-x);\ x<0\Big\}\,;\\
&E_4 = \Big\{(x,y);\ x<0 \text{ et } y > x^3-x\Big\}\,.
\end{aligned}
$$

Soit $(x(t),y(t))$ une solution de (3). Montrer que, si $(x(t_0),y(t_0)) \in D^+$, il existe $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0$ tels que $(x(t),y(t)) \in E_i$ pour $t \in]t_{i-1},t_i[$, $i=1,2,3,4$, et $x(t_1),y(t_1)) \in \Gamma^+$, $(x(t_2),y(t_2)) \in D^-$, $(x(t_3),y(t_3)) \in \Gamma^-$, $(x(t_4),y(t_4)) \in D^+$.

6. Soit $y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$; il existe une solution de (3) telle que $(x(t_0),y(t_0)) = (0,y_0)$; on pose $\sigma(t_0) = y(t_2)$; montrer que $\sigma(y_0)$ ne dépend que de y_0 (et non de t_0), et que σ est une application monotone continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$.

7. En utilisant la question 4, montrer que $(0,y_0)$ appartient à la trajectoire d'une solution périodique si et seulement si $\sigma(y_0) = -y_0$.

8. Soit $\beta > 0$ tel que pour la solution de (3) vérifiant $(x(t_0),y(t_0)) = (0,\beta)$ on ait $(x(t_1),y(t_1)) = (1,0)$. Montrer que pour $y_0 < \beta$, on a $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 > 0$ (regarder $\displaystyle\int_0^{t_2} \frac{d}{dt}\left[x(t)^2 + y(t)^2\right] dt$).

9. Soit y_0 grand. Soit $\mathcal{C}$ la courbe formée des arcs suivants :
   — le segment $(0,y_0)$, $(1,y_0)$;
   — l'arc de cercle de centre O passant par $(1,y_0)$ et coupant $(y = x^3 - x)$ en (x_1,y_1) avec $x_1 > 1$;
   — le segment (x_1,y_1), $(x_1,0)$;
   — l'arc de cercle de centre O passant par $(x_1,0)$ et coupant $(x=1)$ en (x_1',y_1') ;
   — la tangente en (x_1',y_1') à cet arc de cercle qui recoupe Oy en $(0,y_2)$.

   Faire un dessin ! Montrer que la solution de (3) passant par $(0,y_0)$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}$. En déduire que $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 < 0$.

10. En déduire qu'il existe une trajectoire et une seule correspondant à des solutions périodiques de (3). Montrer que les trajectoires non réduites à $(0,0)$ convergent asymptotiquement vers cette trajectoire quand t tend vers $+\infty$.