Fonctions de plusieurs variables (mercredi 6 janvier)

Quelques références bibliographiques :
- Livres de classes préparatoires : ils ont tous des chapitres consacrés à ce sujet !
- F. Rouvière : petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (Cassini).

Leçons concernées :
- 216 : Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 227 : Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions composées. Fonctions de classe C^1. Exemples.
- 228 : Extremums d'une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 265 : Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
- 415 : Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 431 : Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 452 : Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.

Commentaires :
- Les exercices des sections 1 et 2 sont une base sur le calcul différentiel. Toutes les fonctions sont explicites de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Incontournables pour l'agrégation à l'écrit comme à l'oral. Beaucoup se répétent à titre d'entraînement. Ceux avec une étoile peuvent piquer.
- Dans la section 3, on généralise à des fonctions définies sur des espaces vectoriels normés, notamment à des fonctions définies sur des espaces de matrices. Attention, c'est plus dur, à ne pas tenter après le dessert de Noël.
- La dernière section porte sur les notions complexes du calcul différentiel : inversion locale et fonctions implicites. Idéal pour achever la dépression commencée lors du couvre-feu de 20h le soir du 31...

Bonnes fêtes de fin d'année malgré tout.

---

1 Continuité, différentiabilité

Exercice 1 Etudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes, pour lesquelles on donne $f(x,y)$

1. $$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$
2. $$\frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y}$$
3. $$\frac{xy}{x+y}$$
4. $$\frac{\sin x-\sin y}{\mathrm{sh}x-\mathrm{sh}y}$$
5. $$\frac{\sin x-\mathrm{sh}y}{\mathrm{sh}x-\sin y}$$

Exercice 2 Différentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

Exercice 3 ($\star$) Étude de la différentiabilité de la fonction définie par $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+ny}$.

Exercice 4 ($\star$) Étude de la fonction f définie pour x et y réels par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin(x^n y)$: définition, continuité et différentiabilité.

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

1. L'application f est-elle continue ?
2. Calculer les dérivées partielles de f. Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   On pourra écrire f sous la forme $g(x,y)\phi(y) - g(y,x)\phi(x)$.

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| > y \\ y^2 & \text{si} \quad |x| \leq y \end{cases}$$

Exercice 7 Une application $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite **harmonique** si et seulement si $\Delta f = 0$, où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est le laplacien de f.

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $f(x,y) = \ln |e^{ze^{-z}}|$; montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, si f est de classe C^3 et harmonique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Vérifier que $f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 8 Trouver toutes les applications $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que l'application $f : U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, vérifie :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3}.$$

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Comparer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Exercice 10 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$$

et

$$F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t).$$

1. Calculer $F(x,y)$.
2. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

2 Extrema

Exercice 11 Déterminer la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

— $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$;
— $f(x,y) = 4xy + y^2 - 8x^3$;
— $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

Exercice 12 Soit l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

On définit sur U l'application :

$$f(x,y) = xy + \alpha^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),$$

où α est un réel fixé strictement positif. Montrer que f est de classe C^2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que f admet un point critique et préciser sa nature.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 14 Déterminer les extrema de $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ sur $[0,1]^2$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \mapsto 6xy + (y-x)^3$. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$.

1. Dessiner Δ. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur Δ.
2. Calculer les extrema de f sur le bord de Δ puis dans l'intérieur de Δ.
3. En déduire les bornes de f sur Δ.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

Indication : on rappelle qu'une droite passant par $(0,0)$ a pour équation $y = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $x = 0$.

Exercice 17 Soit D l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$x \geq \frac{1}{4}, \quad y \geq \frac{1}{4}, \quad x + y \leq \frac{3}{4}.$$

Sur D on définit la fonction f ainsi

$$\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}.$$

1. Représenter D. Déterminer le bord de D.
2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local à l'intérieur de D.
3. Montrer que sur D, la fonction f admet un minimum m et un maximum M. Expliquer pourquoi ce minimum et ce maximum sont atteints sur le bord de D.
4. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(x, 1/4)$ est décroissante sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ (x, 1/4) \in D\}$. Calculer son maximum et son minimum.
5. Montrer que pour tout x tel que $(x, 3/4 - x) \in D$,
$$\frac{8}{3} = f(3/8, 3/8) \leq f(x, 3/4 - x) \leq \frac{10}{3}.$$
6. En déduire la valeur du minimum et du maximum de f sur D et en quels points ils sont atteints.

---

3 Fonctions définies sur des e.v.n.

Exercice 18 Soient E, F, G des e.v.n et $\phi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que ϕ est continue, de sorte qu'il existe $C > 0$ tel que $\|\phi(x,y)\| < C\|x\|\|y\|$ pour tout $(x,y) \in E \times F$.

1. Montrer que ϕ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle.

Applications.

2. Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application produit scalaire $\langle \cdot \rangle : E^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = M^p$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 19 (Différentielle de l'inverse)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\mathrm{Inv} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{Inv}(M) = M^{-1}$ est de classe C^∞ sur $GL_n(\mathbb{R})$.
2. En calculant les dérivées partielles de Inv au point Id_n, calculer la différentielle de Inv au point Id_n.
3. En déduire la valeur de la différentielle de Inv en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$.

On veut généraliser le résultat précédent en dimension infinie. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles u de E tels que u et u^{-1} soient continus. La norme utilisée sur $\mathcal{L}(E)$ est $|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. On rappelle que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

4. Montrer que l'application $\mathrm{Inv} : GL(E) \to GL(E)$, $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable au point Id et calculer la différentielle de Inv en ce point.
5. Montrer que Inv est différentiable en tout point de $GL(E)$ et calculer sa différentielle.

Exercice 20 (Différentielle du déterminant) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application déterminant définie par $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \det(M)$ est de classe C^∞ et calculer sa différentielle.

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On définit l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x,x) = f'(x)$ et

$$F(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad x \neq y.$$

1. Montrer que F est continue.
2. Si f est de classe C^2, montrer que F est de classe C^1.

Exercice 22 (Théorème de Rolle en dimension n) On note

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 1\}$$

la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que la restriction de f à S soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < 1$, tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice 23 (Encore des extrema) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|M\|^2 = \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

où les m_{ij} sont les coefficients de la matrice M. Montrer que le groupe des matrices orthogonales directes $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(M) = 1\}$$

de norme minimale.

4 Inversion locale, fonctions implicites

Exercice 24 On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même

$$f : (x, y) \mapsto (s, p) = (x + y, xy).$$

Expliciter un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est un C^∞ difféomorphisme local.
2. L'application f est-elle un C^∞ difféomorphisme global ?

Exercice 26 Soit $\phi : (x, y, z) \mapsto (x + 3y^2 - z^3, 2x^2yz, 2z^2 - xy)$. Montrer qu'au voisinage de (1, -1,0), ϕ est bijective. Déterminer la matrice jacobienne de ϕ^{-1} en $\phi(1, -1, 0)$.

Exercice 27 (Deux contre-exemples)

1. Soient U le plan privé de l'origine et $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, mais n'est pas un difféomorphisme global. Expliciter des ouverts V et W, aussi grands que possible, tels que $f : V \mapsto W$ soit un difféomorphisme global.
2. Soit
$$f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \text{ si } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Que se passe-t-il ?
Indication : on pourra comparer les valeurs $f(1/(k+t))$ pour k entier pair et $t = 0$, $1/2$ et 1.

Exercice 28 Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(y) + xy^4 + x^2$.

1. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que pour tout $x \in U$, $\phi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x,y) = 0$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 10 de ϕ au voisinage de 0.

Exercice 29 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que l'application $f - \mathrm{Id}_n$ est k-contractante (avec $0 < k < 1$). Montrer que f est un C^1-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 30 (Logarithme d'une matrice) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de Id), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geq 2$.

Exercice 31 Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C1, supposée k-dilatante (pour une certaine norme), i.e.
$$\|f(x) - f(y)\| > k\|x - y\|$$
pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On veut montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Indication : on pourra raisonner sur des suites.
2. Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.
3. Montrer par inversion locale que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Conclure.
