Agrégation interne

Séries entières, séries de Fourier (mercredi 18 novembre)

Quelques références bibliographiques :

- Livres de classes préparatoires : ils ont tous des chapitres consacrés à ce sujet !
- Carnet de voyages en Analystan. Chapitre 6 (exercices corrigés).
- H. Queffélec, C. Zuily : analyse pour l'agrégation.
- J.-F. Dantzer : Analyse et probabilités.

Leçons concernées :

- 210 : Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriéte ?s de la somme. Exemples.
- 213 : Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π.
- 264 : Fonctions développables en série entière.
- 412 : Exemples de développements d'une fonction en série entière. Applications.
- 413 : Exemples d'applications des séries entières.
- 414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

De plus ces séries ont leur utilité pour les EDO (leçons 225 ou 429 par exemple), en probabilités (fonction génératrice), en algèbre (exponentielle matricielle), etc.

1 Séries entières

1.1 Rayon de convergence

Exercice 1

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

Réponse.

1. Soit la série de terme général $a_n z^n$. Le rayon de convergence est le seul nombre $R \in [0, +\infty]$ tel que
   — si $|z| < R$, la série converge absolument ;
   — si $|z| > R$, la série diverge ;
   — si $|z| = R$, on ne peut rien conclure en général.
2. Comme a_n est bornée, si $|z| < 1$, alors pour tout n, $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq M|z|^n$ et $\sum |z|^n < +\infty$. Donc la série entière converge si $|z| < 1$. Donc $R \geq 1$. Comme la série diverge pour $z = 1$, alors $R \leq 1$. Conclusion : $R = 1$.
3. Ici
$$0 \leq a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \begin{cases} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & n \text{ pair,} \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & n \text{ impair.} \end{cases}$$
   Comme pour tout $u \geq 0$, $\ln(1+u) \leq u$, on a
$$0 \leq a_n \leq \begin{cases} 1, & n \text{ pair,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$
   Donc c'est une suite bornée et comme $\ln(1+u) \sim u$ pour u proche de zéro, $\sum a_n$ diverge. D'après la question 2, $R = 1$.

□

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Déterminer le domaine de continuité de la somme S de cette série.
3. (a) Calculer $S(x)$.
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Réponse. Attention ici

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1} = \sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

Donc tous les a_{2n} sont nuls et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$.

1. Il est facile de voir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} < +\infty.$$

   Donc la série converge absolument pour $x = 1$, ainsi $R \geq 1$. Ensuite si $|x| > 1$,

$$|a_{2n+1}||x|^{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} |x|^{2n+1} \longrightarrow +\infty.$$

   La série des $u_n(x)$ diverge (grossièrement puisque la suite ne tend pas vers zéro). Donc $R = 1$.

2. De là la somme S est continue sur $]-1,1[$ (propriété valable pour toutes les séries entières). De plus pour tout $x \in [-1,1]$

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

   donc il y a convergence normale sur $[-1,1]$. Donc continuité sur cet ensemble.

3. (a) Soit $x \in]-1,1[$. On a

$$\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right).$$

   Or par intégration,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x) \Rightarrow -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2}.$$

   De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2k+1} = x^2(-\arctan(x)).$$

   Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}x^2(\arctan(x))$$

   et

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2(\arctan(x)) + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2}.$$

   (b) Par continuité, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = S(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

□

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
2. (a) Vérifier que cette série entière est le produit de deux séries que l'on déterminera.

   (b) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Réponse.

1. D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\ldots+\frac{1}{n+1}}{1+\ldots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1.$$

   Donc le rayon de convergence est 1.

2. (a) Prenons $b_n = 1/n$ et $c_n = 1$. Alors

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k}.$$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

□

Exercice 4 Soit (a_n) une suite de nombres réels déterminée par la donnée de $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que l'on a pour $n \geq 1$, $0 < a_n \leq 2^{n-1}$. En déduire que le rayon de convergence R de la série entière est minoré par un réel positif que l'on précisera.
2. On pose pour $|z| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que l'on a $(1 - z - z^2)f(z) = z$. En déduire que R est majoré par un réel positidf que l'on précisera.
3. Soient z_1 et z_2 les deux racines de $z^2 + z - 1 = 0$. Calculer les coefficients a_n en fonction de z_1 et z_2 en décomposant $f(z)$ en éléments simples. Trouver le rayon de convergence R.

Réponse.

1. Par récurrence. $R \geq 1/2$: en effet si $|x| < 1/2$, alors

$$\sum_n |a_n||x|^n \leq \frac{1}{2} \sum_n (2|x|)^n < +\infty.$$

2. Pour tout $|z| < R$,

$$\begin{aligned}(1-z-z^2)f(z) &= (1-z-z^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} z^m - \sum_{m=2}^{+\infty} a_{m-2} z^m \\ &= a_0 + a_1 z - a_0 z + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) z^n = z\end{aligned}$$

car $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$.

3. Les racines sont : $z_1 = (\sqrt{5}-1)/2$ et $z_2 = (-\sqrt{5}-1)/2$. Avec $z_1 + z_2 = -1$ et $z_1 z_2 = -1$. Notons que $|z_1| = z_1 < |z_2|$. Si $|z| \leq z_1$, alors

$$\begin{aligned}\frac{z}{1-z-z^2} &= -\frac{z}{(z_1-z)(z_2-z)} = \frac{z_1}{z_1-z_2}\frac{1}{z_1-z} + \frac{z_2}{z_2-z_1}\frac{1}{z_2-z} \\ &= \frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{1-(z/z_1)} - \frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{1-(z/z_2)} \\ &= \frac{1}{z_1-z_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z/z_1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z/z_2)^n\right].\end{aligned}$$

Donc elle est bien défini et est analytique sur le disque de rayon $R = z_1$. Comme $z_1 - z_2 = \sqrt{5}$ et

$$\frac{1}{z_1} = 2\frac{1}{\sqrt{5}-1} = 2\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \frac{1}{z_2} = 2\frac{1}{-\sqrt{5}-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Et par identification :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

□

Exercice 5 α étant un nombre réel positif, on donne la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$.

1. Calculer le rayon de convergence de cette série. On désigne par $g_\alpha(x)$ la somme de cette série en un point x du disque de convergence. Établir pour $|x| < 1$ une relation entre $g_{\alpha+1}$ et g'_α.
2. Montrer que pour $|x| < 1$, on a : $g_p(x) = \dfrac{xQ_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$ pour tout entier p, Q_p étant un polynôme de degré $(p-1)$ pour $p \geq 1$. En déduire un mode de calcul par récurrence des polynômes Q_p.
3. Donner un équivalent de la somme en 1.
4. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{2^n}$.

Réponse.

1. Le critère de D'Alembert donne $R = 1$. En dérivant pour tout $|x| < 1$, $xg'_\alpha(x) = g_{\alpha+1}(x)$.
2. Par récurrence :
$$g_0(x) = \frac{x}{1-x}, \quad g_1(x) = xg'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
Donc $Q_0 \equiv Q_1 \equiv 1$. Ensuite
$$xg'_p(x) = \frac{xQ_p(x)}{(1-x)^{p+1}} + \frac{x^2Q'_p(x)}{(1-x)^{p+1}} + \frac{x^2(1+p)Q_p(x)}{(1-x)^{p+2}} = x\frac{Q_p(x)(1-x) + x(1-x)Q'_p(x) + (1+p)Q_p(x)}{(1-x)^{p+2}}$$
Donc
$$Q_{p+1}(x) = (1-x)(Q_p(x) + xQ'_p(x)) + (p+1)xQ_p(x).$$
Par récurrence on obtient le degré $(p-1)$.
3. On a : $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$, donc $Q_p(1) = p!$. Donc $g_p(x) \sim (p!)/(1-x)^{p+1}$.
4. $Q_2(x) = 1+x$, $Q_3(x) = 1+4x+x^2$ et $Q_4(x) = 1+11x+11x^2+x^3$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{2^n} = 2^4Q_4(1/2) = 150$.

□

Exercice 6 Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{(3n)!}{n!n^{2n}}$. Étude aux bornes de l'intervalle de convergence.

Réponse. On a
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 3\frac{(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}|x| \to \frac{27}{e^2}|x|.$$
Rayon de convergence $e^2/27$. Si $x = \pm e^2/27$, $|u_n| = \dfrac{(3n)!}{n!n^{2n}}\dfrac{e^{2n}}{3^{3n}} \sim \dfrac{e^{2n}}{3^{3n}n^{2n}}\dfrac{e^{-3n}(3n)^{3n}\sqrt{6\pi n}}{e^{-n}n^n\sqrt{\pi n}} = \sqrt{3}$. Donc divergence.

□

Exercice 7 Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe C^∞ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-R, R[, \quad f^{(2n)}(x) \geq 0.$$
Montrer la convergence de la série
$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$
pour tout $x \in]-R, R[$.

Réponse. L'idée est de se débarrasser des dérivées d'ordre impair en zéro sur lesquelles on n'a pas d'information. Or pour les fonctions paires, ces dérivées sont nulles !

Posons $F(x) = f(x) + f(-x)$. Cette fonction est paire et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k+1)}(0) = 0$. Donc en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral pour tout $x \in [0, r]$, $r < R$
$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0) + R_n(x)$$

avec
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt.$$
De plus pour tout k, $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$. Ainsi $0 \leq R_n(r) \leq F(r)$. Il faut maintenant montrer que $R_n(x) \to 0$ lorsque $0 \leq x < r$. Remarquons que pour tout $0 \leq t \leq x < r$,
$$0 \leq \frac{x-t}{b-t} \leq \frac{x}{b} < 1.$$
Donc
$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt &\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt \\ \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(r) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(r). \end{aligned}$$
Donc $R_n(x) \to 0$ pour tout $0 \leq x < r$ et ainsi
$$\forall x \in [0, r[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0). \tag{1}$$
Comme F est paire, c'est vrai aussi sur $]-r, r[$.

Revenons à f. Pour $x \in]-r, r[$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + r_n(x), \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)dt.$$
Or $0 \leq f^{(2n+2)}(t) \leq f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) = F^{(2n+2)}(t)$. Donc $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$. Ainsi si
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0),$$
alors $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}(x)$. Comme
$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$$
est le terme général d'une série convergence (voir (1)), elle tend vers zéro. Donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(x) = f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

À titre d'exemple, on peut considérer la fonction tangente, qui est de classe C^∞ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, qui satisfait les hypothèses. □

1.2 Développement en série entière

Exercice 8 Déterminer les DSE en 0 de :
- $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x}$;
- $g : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$;

— $h : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)(1+x^2)}$;

— $i : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

Réponse.

— Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{e^{-x}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) x^n$.

— Pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x+x^2) = \ln|1-x^3| - \ln|1-x| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x^3)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

— Pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right). \end{aligned}$$

Pour la seconde somme, on distingue $n = 2p$ pair et $n = 2p+1$ impair :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{2p} x^{4p+1} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{2p+1} x^{4p+3} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+3}.$$

Idem pour la troisième, n pair ou impair

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p} - \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+2}.$$

Enfin pour la première, on regarde n modulo $4 =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p} + \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+1} + \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+2} + \sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p+3}.$$

Ainsi en arrangeant le tout :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{4n} + x^{4n+1}\right). \end{aligned}$$

— Dériver i : $i'(x) = (1+x^2)^{-1/2}$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} x^{2n}.$$

Attention par convention $k! = 0$ ce qui permet de faire démarrer la somme à $n = 0$. C'est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} x^{2n}.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$i(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ est le coefficient binomial n parmi $2n$.

$\square$

Exercice 9 Développer en série entière

1. $f(x) = \cos x \ \mathrm{ch} x$
2. $g(x) = \exp(\mathrm{Arcsin}\ x)$
3. $h(x) = \exp\left(-x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$.

Réponse.

1. On a $f(x) = \dfrac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{x}+e^{-x}) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{4(2p)!}2^p.2.2(\cos p\pi/2)x^{2p}$.
2. Dériver deux fois $f''(x) = \dfrac{f(x)}{1-x^2}+\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)$. Remplacer par le DSE. Puis $a_{k+2} = \dfrac{k^2+1}{(k+1)(k+2)}a_k$ d'où
$$a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(1+4k^2)}{(2p)!}, \quad a_{2p+1} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(1+(2k+1)^2)}{(2p+1)!}.$$
Étudier séparément les deux séries (termes pairs et impairs) : rayon de convergence 1.
3. Le rayon de convergence est au moins égal au plus petit des deux rayons, soit $R=+\infty$. De plus $f(x) = \mathrm{Re}(e^{-x\sqrt{3}/2+ix/2}) = \mathrm{Re}\exp(xe^{-i\pi/3})$. Donc
$$\exp(-xe^{-i\pi/3}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\pi/3}\frac{x^n}{n!}.$$
Donc $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/3)}{n!}$.

$\square$

Exercice 10 Développer en série entière la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$.

Réponse. Dériver : $g'(x) = -xg(x)+1$. Et développer en série entière : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p-1} = \dfrac{(-1)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}$. Rayon de convergence $+\infty$. $\square$

Exercice 11 Étudier la convergence et calculer la somme de la série des $(a^n\cos^{2n}x)_{n\geq 0}$. Développer en série entière $f(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-a\cos^2 x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x dx$.

Réponse. Si $|a| < 1$ convergence normale des u_n vers $S(x) = \dfrac{1}{1 - a\cos^2 x}$. De plus $f(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} S(x)dx$. Permuter la somme et l'intégrale. Donc $f(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx$. On calcule $f(a)$ avec le chgt de var $\tan x = t$. Donc $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\left(1 - \frac{a}{1+t^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + (1-a)} = \frac{\pi}{2}(1-a)^{-1/2}$.

Ainsi $f(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 2^n n!} a^n$. $\square$

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ au voisinage de 0.
2. Déterminer la série de Taylor de f en 0.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Réponse. Cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Le seul problème est en zéro. Or pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} f(x), \qquad f^{(2)}(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) f(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6} f(x)$$

et par récurrence il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

et la fonction ainsi que toutes ses dérivées sont prolongeables par continuité en zéro, avec $f^{(n)}(0) = 0$.

Supposons que f soit développable en série entière en 0. Il existerait $r > 0$ tel que pour tout $|x| < r$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = 0.$$

Absurde puisque $f(x) > 0$ si $x \neq 0$. $\square$

1.3 Problèmes

Pour la correction, je vous renvoie aux livres cités.

Exercice 13 Soit n un entier strictement positif. On appelle *dérangement du groupe symétrique* S_n tout élément σ de S_n vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \sigma(k) \neq k.$$

On désigne par d_n le nombre de dérangements de S_n. On pose par convention $d_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$$
2. On considère la série entière f définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$
Montrer que R, le rayon de convergence de cette série entière, est supérieur ou égal à 1.
3. Donner le développement en série entière de la fonction $e^x f(x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$. En déduire que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$
4. En déduire que
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Réponse. Dantzer page 337. □

On trouvera dans Analystan un autre exemple d'utilisation des séries entières à l'arithmétique.

Exercice 14 Trouvez les applications développables en série entière solutions de l'équation différentielle
$$xy'' + (x-2)y' - 2y = 0.$$

Réponse. Dantzer page 343. □

Exercice 15 (Théorème d'Abel) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, où les a_n sont complexes, de rayon de convergence 1 sur $\mathbb{R}$. On note S la somme de cette série. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ est convergente. On se propose d'établir que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0,1]$.

1. Établir le résultat dans le cas particulier où les a_n sont tous positifs.
2. Étudier le cas particulier où $a_n = (-1)^n b_n$, (b_n) étant une suite décroissante et convergente vers 0.

3. Montrer alors le résultat dans le cas général. Pour cela, on pourra poser

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

puis montrer que pour tout entiers n et p tels que $p \geq n+2$

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x_k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p.$$

4. En déduire que la fonction S est continue.
5. Exemple : montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Réponse. Analystan Ex. 30 □

Exercice 16 (Théorème de Liouville) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence.

1. Montrer que pour tout $0 < r < R$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Supposons maintenant que $R = +\infty$.

2. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.
3. Plus généralement s'il existe un polynôme R à coefficients positifs tel que $|f(t)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que f est un polynôme.
4. Montrer que tout polynôme P à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Réponse. Gourdon, Analyse, Exercice 5, page 248. □

---

2 Séries de Fourier

Exercice 17 Soit f la fonction de période 2π, valant 1 si $0 \leq x < \pi$ et valant 0 si $\pi \leq x < 2\pi$.

1. Écrire la série de Fourier de f. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier.

Réponse. Cette fonction f est constante par morceaux, donc C^1 par morceaux, avec des sauts pour tous les $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs en tout point de discontinuité, la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite vaut $1/2$. Donc la série de Fourier de f au point x sera simplement convergente vers $f(x)$ si f est continue en x et vers $1/2$ sinon. Par ailleurs sur tout intervalle ouvert ne contenant pas de point de discontinuité (donc sur lequel f est continue et de classe C^1), il y a convergence uniforme de la série de Fourier. Maintenant il reste à calculer les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1dx = 1,$$

pour $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \left[\sin(nx)/n\right]_0^{\pi} = 0$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos(nx)/n\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Ainsi la série de Fourier de f au point x est

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x).$$

Remarques sur la convergence :

— Critère d'Abel : convergence simple de la série en tout point $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— La série des carrés converge :

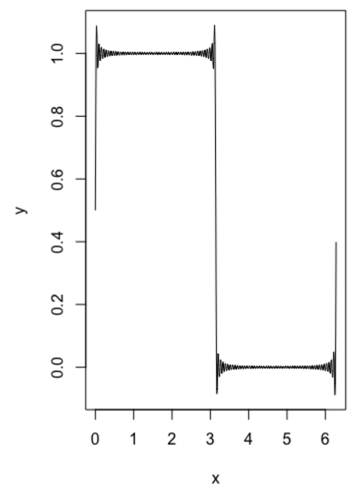
$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} |\sin((2n-1)x)|^2 < +\infty.$$

Ce qui correspond à l'inégalité de Bessel ou égalité de Parseval et à la convergence en moyenne quadratique.

— La convergence aux points $x = k\pi$ n'est pas évidente a priori.

Enfin on notera que $x \mapsto f(x) - 1/2$ est une fonction impaire, ce qui explique que les a_n sont nuls pour $n \geq 1$.

Tracé de la série de Fourier tronquée à $N = 50$:



Remarquez l'effet Gibbs aux points de discontinuité. □

Exercice 18 Soit f une fonction de période 10, valant $4x$ si $x \in]0, 10[$.

1. Écrire la série de Fourier de f.
2. Compléter la fonction f pour que $f(x)$ soit la somme de sa série de Fourier en tout point x de $\mathbb{R}$.

Réponse. Très ressemblant au premier, mais avec une période de 10 (au lieu de 2π). f est $T = 10$-périodique. Donc si $g(t) = f(Tt/(2\pi))$ est 2π-périodique :

$$g(t + 2\pi) = f(T(t + 2\pi)/(2\pi)) = f(Tt/(2\pi) + T) = f(Tt/(2\pi)) = g(t).$$

Donc les coefficients de Fourier de g sont

$$a_n^g = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(Tx/(2\pi))\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(u)\cos(2\pi nu/T)\frac{2\pi}{T}du$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(u)\cos(\omega nu)du = a_n^f,$$

et

$$b_n^g = \frac{2}{T}\int_0^T f(u)\sin(\omega nu)du = b_n^f,$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. De plus

$$S(f)(x) = \frac{a_0^f}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^f\cos(\omega nx) + b_n^f\sin(\omega nx).$$

Donc ici

$$a_0 = \frac{2}{10}\int_0^{10} 4udu = 40$$

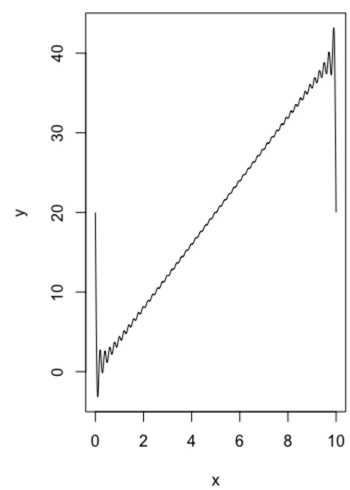
et pour $\omega = \pi/5$ et $n \geq 1$

$$a_n^f = \frac{2}{10}\int_0^{10} 4u\cos(\omega nu)du = \frac{4}{5}\left[u\sin(\omega nu)/(\omega n)\right]_0^{10} - \frac{4}{5}\int_0^{10}\sin(\omega nu)/(\omega n)du = 0$$

et
$$b_n^f = \frac{2}{10}\int_0^{10} 4u\sin(\omega nu)du = \frac{4}{5}\left[-u\cos(\omega nu)/(\omega n)\right]_0^{10} + \frac{4}{5}\int_0^{10}\cos(\omega nu)/(\omega n)du = \frac{-8}{\omega n}.$$
Finalement :
$$S(f)(x) = 20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\pi nx/5).$$
Là aussi on remarquera que $x \mapsto f(x) - 20$ est une fonction impaire.

La série de Fourier converge uniformément vers f sur tout intervalle $]\varepsilon, 10-\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ et elle converge simplement vers 20 aux points $x = 10k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tracé de la série de Fourier tronquée à $N = 50$:



Là aussi remarquez l'effet Gibbs aux points de discontinuité. □

Exercice 19 Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par
$$f(t) = \pi^2 - t^2.$$

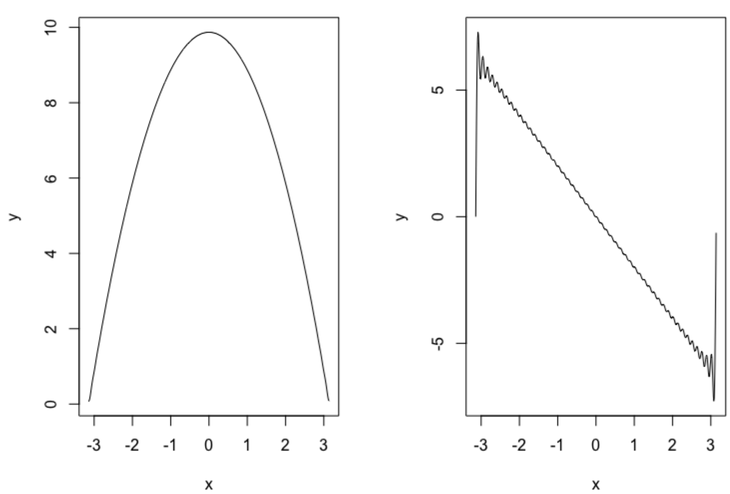
1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En quel sens la série de Fourier de f converge-t-elle ? Sur quel ensemble ? Déterminer sa somme.
3. Montrer que les séries numériques $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ sont convergentes. Calculer leur somme.
4. Étudier la nature de la convergence de la série de fonctions obtenue en dérivant terme à terme la série de Fourier de f. Calculer sa somme.

Réponse. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Donc on aura la convergence uniforme de la série de Fourier vers f sur tout $\mathbb{R}$.

1. La fonction est paire, donc $b_n = 0$. Et $a_0 = 4\pi^2/3$ et $a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$
3. Pour $x = \pi$
$$f(\pi) = 0 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Pour $x = 0$
$$f(0) = \pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
Donc
$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$
Enfin l'égalité de Parseval donne
$$\frac{4\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{8\pi^4}{15}.$$
Donc
$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
4. Formellement
$$f'(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$
En fait $f'(x) = -2x$ pour tout $-\pi < x < \pi$. f n'est pas dérivable en $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, f' est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux (sans être continue). Donc on fait le même raisonnement que pour les deux exercices précédents.

Tracé des séries de Fourier de f (à gauche) et de f' (à droite) tronquées à $N = 50$:



$\square$

Exercice 20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Développer f en série de Fourier. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et montrer que

$$|\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

2. Soit h une fonction intégrable sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b h(x)|\sin(\lambda x)|dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b h(x)dx.$$

3. Développer en série de Fourier la fonction définie par $g(x) = \max(\sin x, 0)$. Retrouver le résultat de la première question.

Réponse. f est une fonction 2π-périodique, continue et paire sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc sa série de Fourier converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Notons que $f(x) = \sin(x)$ sur $[0,\pi]$ et $-\sin(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$. On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{4}{\pi}$$

et pour $n \geq 1$, $a_{2n-1} = 0$ et $a_{2n} = \dfrac{-4}{\pi(4n^2-1)}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nx).$$

Comme $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, on a

$$f(x) = |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(4n^2-1)}\sin^2(nx).$$

Comme $f(0) = 0$, nécessairement

$$\frac{2}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

et

$$|\sin(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(4n^2-1)}\sin^2(nx).$$

Noter que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right].$$

Donc la somme de la série peut aussi se déduire par somme téléscopique.

2. Soit h une fonction intégrable sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b h(x)|\sin(\lambda x)|dx &= \int_a^b h(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)} \sin^2(\lambda n x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x) \sin^2(\lambda n x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x) \frac{1}{2}(1-\cos(2\lambda n x))dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^b h(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx.
\end{aligned}$$

Le lemma de Riemann-Lebesgue (qui justifie que les coefficients de Fourier tendent vers zéro quand n tend vers $+\infty$) dit : pour tout $n \geq 1$ fixé,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx = 0.$$

De plus on a convergence absolue de la série de terme général $u_n(\lambda)$:

$$u_n(\lambda) = \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx,$$

uniformément (normalement) par rapport à λ, car

$$|u_n(\lambda)| \leq \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b |h(x)|dx.$$

Donc

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b h(x)\cos(2\lambda n x)dx = 0.$$

3. La fonction $g(x) = \max(\sin x, 0)$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Et pour $x \in [0,\pi]$, $f(x) = g(x)$.

$\square$

Exercice 21 Pour tout entier n, on considère la fonction réelle numérique u_n définie par $u_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$. Soit la série de terme général $u_n(x)$.

1. Montrer que cette série est normalement convergente sur tout intervalle $[-a,a]$ ($a > 0$) de $\mathbb{R}$, ainsi que la série obtenue par dérivation terme à terme. En déduire que la somme f est une fonction paire, de période 1, égale en chaque point à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(2\pi n x).$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{1+x^2} dx,$$

et calculer cette intégrale.

Indication : on pourra poser pour $t > 0$, $\alpha_n(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\cos(2\pi nx)}{t^2+x^2} dx$, et vérifier que cette fonction est bornée et solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec $\alpha_n(0) = \pi$.

3. Montrer que $f(x) = \pi \dfrac{1-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}}$.

Réponse.

1. Pour tout x et n, $1+(x+n)^2 \geq 1$, donc la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in [-a,a]$ et tout $|n| > a$, x et n sont à distance au moins $|n| - |a|$ l'un de l'autre :

$$(|n| - |a|)^2 \leq (x+n)^2$$

et

$$0 \leq u_n(x) = \frac{1}{1+(|n|-|a|)^2}.$$

Quant à la série des dérivées,

$$u_n'(x) = -\frac{2(x+n)}{(1+(x+n)^2)^2}$$

on a pour tout $x \in [-a,a]$ et tout $|n| > a$

$$|u_n'(x)| = 2\frac{|x+n|}{(1+(x+n)^2)^2} \leq 2\frac{|a|+|n|}{(1+(|n|-|a|)^2)^2}.$$

Ainsi cette série et la série obtenue par dérivation terme à terme sont normalement convergentes sur tout intervalle $[-a,a]$ $(a>0)$ de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+n)^2}, \qquad f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\frac{2(x+n)}{(1+(x+n)^2)^2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, avec $n = -m$

$$f(-x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(-x+n)^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(-x-m)^2} = f(x)$$

et $p = n+1$

$$f(x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+1+n)^2} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+p)^2} = f(x).$$

Donc la somme f est une fonction paire, de période 1. Comme elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, elle est égale en chaque point à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(2\pi nx).$$

2. Par définition

$$\alpha_0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+n)^2} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \frac{1}{1+(x+n)^2} dx$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy.$$

et pour tout $n \geq 1$, comme cos est 2π-périodique :

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+k)^2}\cos(2\pi nx)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \frac{1}{1+(x+k)^2}\cos(2\pi nx)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{1+(y)^2}\cos(2\pi n(y-k))dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{1+y^2}\cos(2\pi ny)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{1+x^2}dx.
\end{aligned}$$

Posons pour $t>0$, $\alpha_n(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\cos(2\pi nx)}{t^2+x^2}dx$. Alors pour tout $t>0$

$$|\alpha_n(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{t^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{t^2+(ty)^2}|t|dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}dy = \pi.$$

Ainsi cette fonction est bornée et avec $x = ty$, $t>0$

$$\alpha_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nty)}{1+y^2}dy.$$

Par convergence dominée

$$\lim_{t\to 0} \alpha_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}dy = \pi.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\alpha_n'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(t^2+x^2)^2}\cos(2\pi nx)dx, \\
\alpha_n''(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^3-6tx^2}{(t^2+x^2)^3}\cos(2\pi nx)dx.
\end{aligned}$$

Or par intégrations par parties successives

$$\alpha_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xt}{(t^2+x^2)^2}\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^3-6tx^2}{(t^2+x^2)^2}\frac{\cos(2\pi nx)}{(2\pi n)^2}dx.$$

Donc

$$\alpha_n''(t) - (2\pi n)^2\alpha_n(t) = 0.$$

Comme c'est une solution bornée, pour $t>0$, $\alpha_n(t) = Ce^{-2\pi nt}$. Comme $\alpha_n(0) = \pi$, $C = \pi$. Enfin $\alpha_n = \alpha_n(1) = \pi e^{-2\pi n}$.

3. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(2\pi nx) = \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}\cos(2\pi nx) \\
&= \pi + 2\pi \mathrm{Re}\ \frac{e^{2\pi(-1+ix)}}{1-e^{2\pi(-1+ix)}} = \pi + 2\pi e^{-2\pi}\mathrm{Re}\ \frac{e^{2\pi ix}(1-e^{2\pi(-1-ix)})}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}} \\
&= \pi \frac{1-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 22 On considère les quatre cercles d'équations :

$$x^2 + y^2 \pm 2x = 0,$$

$$x^2 + y^2 \pm 2y = 0.$$

Les arcs de ces cercles, intérieurs au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$, dessinent une rosace à quatre pétales. Soit (Γ) cette courbe.

1. Montrer que, en coordonnées polaires, (Γ) a pour équation $r = f(\theta)$ où f est une fonction périodique de période $\pi/2$, définie par

$$\begin{array}{ll} f(\theta) = 2\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \\ f(\theta) = 2\cos\theta & \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{array}$$

   Représenter en coordonnées cartésiennes (θ en abscisse, r en ordonnée) le graphe de la fonction $r = f(\theta)$.
2. Montrer que f est développable en série de Fourier et que la série de Fourier converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. En déduire la somme de la série numérique

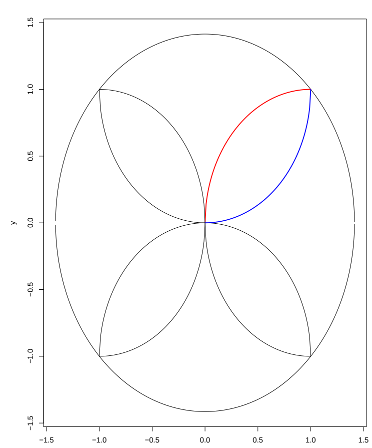
$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{2} - 2}{16n^2 - 1}.$$

5. Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.
6. Pour quelles valeurs de θ peut-on représenter la dérivée f' de f par la série dérivée terme à terme de la série de Fourier de f ?

Réponse. Réécrivons les quatre cercles d'équations :

$$(x \pm 1)^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 + (y \pm 1)^2 = 1.$$



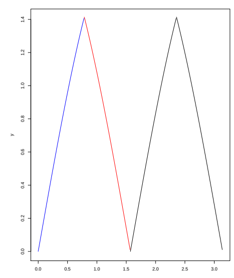
1. Commençons par $(x-1)^2+y^2=1$ (partie rouge). En coordonnées polaires, pour $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$(r\cos(\theta)-1)^2 + r^2\sin^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow r = 2\cos(\theta).$$

Pour la partie bleue, $x^2+(y-1)^2=1$, on a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et

$$r^2\cos^2(\theta) + (r\sin(\theta)-1)^2 = 1 \Leftrightarrow r = 2\sin(\theta).$$

Le reste de la courbe (Γ) s'obtient par rotations successives d'angle $\pi/2$, d'où la périodicité de f. Voici son graphe :



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Donc sa série de Fourier converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. C'est une fonction paire, donc tous les b_n sont nuls,

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} 2\sin(x)dx = \frac{16}{\pi}(1-\sqrt{2}/2)$$

et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(4nx)dx = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/4} 2\sin(x)\cos(4nx)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos(x)\cos(4nx)dx\right)\\
&= \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/4} -\sin((4n-1)x)+\sin((4n+1)x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos((4n-1)x)+\cos((4n+1)x)dx\right)\\
&= \frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{\cos((4n-1)x)}{4n-1} - \frac{\cos((4n+1)x)}{4n+1}\right]_0^{\pi/4} + \left[\frac{\sin((4n-1)x)}{4n-1} + \frac{\sin((4n+1)x)}{4n+1}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right)\\
&= \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{16n^2-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi}(2-\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{16n^2-1}\cos(4n\theta).$$

4. Comme $f(0)=0$ on a

$$0 = \frac{4}{\pi}(2-\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{16n^2-1}.$$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{16n^2-1} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}.$$

5. Voir plus haut.
6. f est de classe C^∞ pour $\theta \neq k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc si $\theta \neq k\pi/4$, $f'(\theta)$ est égale à

$$f'(\theta) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{16n^2-1}4n\sin(4n\theta).$$

□

Exercice 23 (Phénomène de Gibbs) Soit f la fonction impaire périodique de période 2π et valant $\frac{\pi}{4}$ pour $0 < x < \pi$.

1. Montrer que si $0 < x < \pi$
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$
2. Pouvait-on prévoir la valeur du développement de f en série de Fourier pour $x = 0$?
3. On désigne par $S_n(x)$ la somme partielle :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$
   (a) Montrer que l'on peut écrire $S_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(2n\pi)}{\sin x}dx$, et étudier le graphe de S_n pour $x \in [0, \pi]$.
   (b) Montrer que la courbe $y = S_n(x)$ subit des oscillations autour de la valeur $y = \pi/4$ et trouver le point $M_n(x_n, y_n)$, premier maximum de $S_n(x)$.
   (c) Montrer que pour n tendant vers $+\infty$, x_n tend vers 0 et y_n tend vers $M = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{\pi}{4} \times 1,18$. Commenter.

Réponse. Voir Analystan, Exercice 32 ou Gourdon Analyse, Exercice 6 p. 286. □

Exercice 24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, telle que
$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right].$$

1. Vérifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ on pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,\nu} = \int_0^\pi \cos(nt) \sin\frac{(2\nu+1)t}{2}dt, \qquad \forall q \in \mathbb{N}, \quad s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}.$$
Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$, montrer que $s_{q,\nu} \geq 0$ pour tout (q, ν) et montrer l'existence d'une constante $B > 0$ telle que $s_{\nu,\nu} > B \log \nu$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Réponse. Gourdon Analyse, Exercice 4 p. 264. □

Exercice 25 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$$

est bien définie, qu'elle est 2π-périodique et qu'elle est continue. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |nb_n(f)|^2$ converge, mais que pourtant f n'est pas dérivable en 0.

Réponse. Gourdon Analyse, Exercice 5 p. 265. □

Exercice 26 (Méthode de séparation de variables) On considère l'EDP suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

avec les conditions de bord $u(t,0) = u(t,1) = 0$ et une condition initiale $u(0,x) = f(x)$.

1. Supposons que $u(t,x) = \phi(t)\psi(x)$ soit une solution de l'EDP. Quelles équations satisfont ϕ et ψ ? Quelles conditions de bord vérifie ψ ?
2. Déterminer les fonctions ψ possibles.
3. Vérifier que si u et v sont solutions de l'EDP avec les conditions de bord voulues, alors la somme est aussi solution.
4. En déduire la forme générale des solutions de l'EDP avec condition initiale f.

Si on considère l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

avec les conditions de bord $u(t,0) = u(t,1) = 0$, montrer que les mêmes arguments permettent de trouver la solution telle que

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x).$$

Réponse. On cherche u sous la forme $u(t,x) = f(t)g(x)$. L'EDP devient donc

$$f'(t)g(x) = f(t)g''(x) \Longrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Pour qu'une fonction de t soit égale à une fonction de x, il faut qu'elles soient constantes. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t et tout x :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = a \Longrightarrow f'(t) = af(t) \text{ et } g''(x) = ag(x).$$

On a donc deux EDO.

Si $u(t,0) = u(t,1) = 0$, alors il faut que $g(0) = g(1) = 0$. Donc pour g on a une EDO avec deux conditions de bord :

$$g''(x) = ag(x), \quad g(0) = g(1) = 0.$$

Cas 1 $a > 0$. Alors les solutions de cette EDO sont de la forme :

$$g(x) = \lambda \exp(x\sqrt{a}) + \mu \exp(-x\sqrt{a}).$$

Comme $g(0) = 0$, on a $\lambda + \mu = 0$, soit $\lambda = -\mu$ et $g(1) = 0$ implique que

$$\lambda \exp(\sqrt{a}) + \mu \exp(-\sqrt{a}) = \lambda \left(\exp(\sqrt{a}) - \exp(-\sqrt{a})\right) = 0.$$

Donc $\lambda = \mu = 0$, soit $g(x) = 0$.

Cas 2 $a = 0$. Alors les solutions de cette EDO sont de la forme : $g(x) = \lambda x + \mu$. Pour que $g(0) = g(1) = 0$, il faut que $\lambda = \mu = 0$, soit $g(x) = 0$.

Cas 3 $a < 0$. Posons $b = \sqrt{-a} > 0$. Alors

$$g(x) = \lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx).$$

Comme $g(0) = 0$, alors $\lambda = 0$. Puis $g(1) = \mu \sin(b) = 0$ si $\mu = 0$ ou si $b = n\pi$ avec n entier strictement positif. Donc pour μ quelconque

$$g(x) = \mu \sin(n\pi x), \quad a = -(n\pi)^2.$$

À partir du troisième cas, on en déduit que

$$f(t) = c \exp(-(n\pi)^2 t),$$

donc

$$u(t,x) = c\mu \exp(-(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x) = C \exp(-(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x).$$

Autrement dit, toutes les fonctions de la forme précédente, avec C quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$, sont solutions de l'EDP et vérifient $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Comme l'EDP est linéaire et homogène, toutes les combinaisons linéaires de ces solutions

$$(t,x) \mapsto \sum_{n=1}^{N} c_n \exp(-(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x)$$

sont encore solutions. On note aussi que si $t > \varepsilon$

$$\sum_{n=0}^{N} \left| c_n \exp(-(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} |c_n| \exp(-\pi^2 \varepsilon n^2).$$

Autrement dit il y a convergence normale de cette série de fonctions sur $[\varepsilon, +\infty[\times \mathbb{R}$ pour la plupart des suites $(c_n,\ n \in \mathbb{N})$ qui ne croissent pas trop vite ; par exemple :

$$|c_n| \leq a + b e^{kn}.$$

pour trois constantes positives a, b et k. Ainsi on peut considérer la solution (sous réserve de convergence) :

$$u : (t,x) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x).$$

Considérons d'abord quelques cas simples. Si $u(0,x) = \sin(2\pi x)$, alors par identification il faut que $C = 1$ et $n = 2$. Alors que si $u(0,x) = -3\sin(6\pi x)$, alors il faut que $C = -3$ et $n = 6$. Par superposition de ces deux solutions :

$$u(t,x) = \exp(-4\pi^2 t) \sin(2\pi x) - 3 \exp(-36\pi^2 t) \sin(6\pi x)$$

est solution avec condition initiale

$$f(x) = \sin(2\pi x) - 3 \sin(6\pi x).$$

Plus généralement si f est une fonction de carré intégrable sur $[0,1]$, on la prolonge sur $[-1,0]$ par imparité : $f(-x) = -f(x)$, puis sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité. Alors dans $L^2([-1,1])$, on decompose f en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x),$$

avec

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx.$$

L'égalité de Parseval donne

$$2\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Si on pose

$$u : (t,x) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x)$$

il est facile de voir qu'il y a convergence normale de la série et de toutes ces dérivées sur $[\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$. Donc u est C^∞ sur cet ensemble, donc sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ (*effet régularisant de l'équation de la chaleur*) et vérifie l'EDP. Et elle vaut f au bord par construction.

$\square$