Le Mans Université, Agrégation interne

Topologie (mercredi 14 octobre)

Quelques références bibliographiques :
- Livres de classes préparatoires : ils ont tous des chapitres consacrés à la topologie !
- Queffelec, Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Topologie des espaces de fonctions.
- Gonnord, Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Plein de problèmes intéressants, mais d'un niveau élevé.
- Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Surtout pour bien saisir les nuances entre espaces topologiques, métriques, normés.

Leçons concernées :
- 204 : Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
- 205 : Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
- 206 : Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Fonctions continues sur de telles parties. Exemples et applications.
- 263 : Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- 266 : Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
- 439 : Exemples d'étude et de calcul de la norme d'une application linéaire continue.

Un classement (subjectif forcément) des exercices :
- $\star\star$: grand classique.
- $\star$: important.

Table des matières

1 Généralités

Exercice 1 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ ($\star\star$)) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Montrer que f est constante.

Réponse. Basé sur le fait qu'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{R}_+$ soit dense dans $\mathbb{R}$ (voir Gourdon, Analyse, Chapitre 4.1, Exercice 5). La démonstration est basée sur $\inf\{G \cap]0,+\infty[\}$. De là on déduit que le groupe $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (sinon $\sqrt{2}$ sera rationnel).

Si f est 1 et $\sqrt{2}$ périodique, alors pour tous entiers m et n

$$f(m + n\sqrt{2}) = f(n\sqrt{2}) = f(0).$$

Donc f est constante sur G qui est dense dans $\mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite x_n déléments de G telle que x soit la limite des x_n. Donc par continuité

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(0) = f(0).$$

□

Exercice 2 (Somme d'ensembles d'un e.v.n.) Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n et A, B deux parties de E. On note $A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$.

1. Si A est ouverte (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouverte.
2. Si A est compacte et B fermée, montrer que $A + B$ est fermé. Ce résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée fermée ?

Réponse.

1. $A + B = \Cup_{b\in B} A + \{b\}$ et $A + \{b\}$ est ouverte, car si $B(x, \rho) \subset A$, alors $B(x + b, \rho) \subset A + \{b\}$.
2. Utiliser que $A + B$ fermée si pour toute suite convergente, la limite est dans $A + B$. Utiliser qu'une suite de A admet une sous-suite convergente.
   Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, e^x), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $A + B = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$. Ou $E = R$, $A = \mathbb{Z}$, $B = x\mathbb{Z}$ avec $x \notin \mathbb{Q}$. Alors $A + B$ non fermé, sinon $A + B = \mathbb{R}$, et $A + B$ dénombrable.

□

Exercice 3 (Distance ($\star\star$)) Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.
2. Soient A et B deux fermés disjoints de E.
   (a) Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ continue, $0 \le f \le 1$, telle que $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$.
   (b) En déduire l'existence de deux ouverts U et V de E, disjoints, tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Réponse. On rappelle que pour $A \neq \emptyset$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, z),\ z \in A\} \ge 0.$$

Cette borne inférieure existe bien car on a un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par zéro.

De plus par définition de la borne inférieure, il existe une suite z_n déléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, z_n) = d(x, A).$$

Donc $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

1. On vérifie que cette fonction est lipschitzienne : pour tout (x, y)
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
2. Posons
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{(d(x, A) + d(x, B))}.$$
   (a) D'abord elle est bien définie car $d(x, A) + d(x, B) = 0$ si et seulement si $d(x, A) = d(x, B) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Comme A et B sont fermés, $\overline{A} = A$ et $\overline{B} = B$. Donc $x \in A \cap B$ ce qui n'est pas possible.
   Il est immédiat que $0 \leq f(x) \leq 1$. Et $f(x) = 0$ si et seulement si $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$; $f(x) = 1 \Leftrightarrow d(x, B) = 0 \Leftrightarrow x \in B$. Ainsi $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$.
   Enfin f est continue comme quotient et somme de fonctions continues.
   (b) On définit
$$U = f^{-1}(]-1, 1/4[), \qquad V = f^{-1}(]3/4, 2[).$$
   Alors $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. De plus comme f est continue, l'image réciproque d'un ouvert est ouverte. Donc U et V sont ouverts.

Noter que les conditions sur A et B sont optimales. Ainsi $A = [0, 1/2[$ et $B = [1/2, 2]$ ne pourront pas être séparé car A n'est pas fermé. $\square$

Exercice 4 (Espace préhilbertien et projection sur une s.e.v.) E désigne un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E. Pour tout $x \in E$, on note

$$F_x = \left\{ y \in F,\ \|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z\in F} \|x-z\| \right\}.$$

1. Montrer que $y \in F_x$ si et seulement si $x - y \in F^\perp$.
2. Montrer que F_x a au plus un élément.
3. On considère ici $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$), muni du produit scalaire
$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Que représente $F^\perp$? Conclure.

Réponse.

1. *Condition nécessaire.* Soit $y \in F_x$. Poser $z = x-y$ et $w \in F$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|z+tw\| \geq \|z\|$, car $z+tw = x-(y-tw)$ et $y - tw \in F$. Donc $\|z+tw\|^2 = \|z\|^2 + 2t(z.w) + t^2\|w\|^2 \geq \|z\|^2$. Donc la fonction de t admet un min en $t = 0$. En dérivant on a : $2(z.w) + 2t\|w\|^2$ et il faut que cette fonction s'annule en $t = 0$, donc $(z.w) = 0$ pour tout w. Ainsi $z \in F^\perp$.
Condition suffisante. Supposons que $x - y \in F^\perp$. Pour tout $z \in F$, $y - z \in F$ et on développe $\|x-z\|^2$:
$$\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + 2((x-y).(y-z)) + \|y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2.$$
Donc pour tout $z \in F$
$$\|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2 \Rightarrow \inf_{z\in F} \|x-z\| \geq \|x-y\|.$$
Et on conclut puisque $y \in F$.
2. Supposons que y_1 et y_2 soient dans F_x avec $y_1 \neq y_2$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $ty_1 + (1-t)y_2 \in F$ et
$$\phi(t) = \|x - (ty_1 + (1-t)y_2)\|^2 = \|t(x-y_1) + (1-t)(x-y_2)\|^2 \geq d(x,F).$$
Or ϕ est un polynôme de degré au plus 2 tel que $\phi(0) = \phi(1) = d(x,F)$. Donc ceci n'est possible que si son terme de plus haut degré est négatif :
$$\phi(t) = t^2\|x-y_1\|^2 + (1-t)^2\|x-y_2\|^2 + 2t(1-t)((x-y_1).(x-y_2)).$$
Donc en identifiant le terme devant t^2 on a
$$\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2 - 2((x-y_1).(x-y_2)) = \|(x-y_1)-(x-y_2)\|^2 = \|y_1-y_2\|^2 \leq 0.$$
Et ainsi $y_1 = y_2$.
3. Soit $f \in F^\perp$. On pose $g(x) = xf(x)$ qui est bien dans E. Comme $g(0) = 0$, $g \in F$. Ainsi
$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 tf(t)^2 dt = 0.$$
Donc $t \mapsto t(f(t))^2 = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ (intégrale nulle d'une fonction positive et continue). Ainsi pour tout $t > 0$, $f(t) = 0$. Comme f est continue, on en déduit que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc $F^\perp = \{0\}$.

Pour la question 1, l'existence de y n'est pas garantie. Autrement dit F_x peut être vide. Le projeté n'existe pas toujours. Sauf si E est de dimension finie ou s'il est complet et que F est fermé.

La question 2 montre que quand on projette sur un ensemble convexe, il y a un seul point (s'il existe) qui donne la distance minimale (la projection est unique). □

Exercice 5 Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) telle que

$$\sum_n d(x_{n+1}, x_n) < +\infty.$$

1. Montrer que x est de Cauchy.
2. Montrer par deux exemples que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ n'entraîne pas toujours x de Cauchy et que x de Cauchy n'entraîne pas toujours $\sum_n d(x_{n+1}, x_n) < +\infty$.

Réponse.

1. Si une série converge, son reste d'ordre m tend vers zéro. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_0 \leq k \leq m$
$$\sum_{n=k}^{m-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon.$$
Or l'inégalité triangulaire implique que
$$d(x_m, x_k) \leq \sum_{n=k}^{m-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon.$$
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_0 \leq k \leq m$, $d(x_m, x_k) \leq \varepsilon$.. C'est la définition d'une suite de Cauchy.
2. Soit $x_n = \sqrt{n}$. C'est une suite de $\mathbb{R}$ divergente, donc elle n'est pas de Cauchy ($\mathbb{R}$ est complet, les suites de Cauchy convergent). Mais
$$d(x_{n+1}, x_n) = |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
tend vers zéro.
On pourrait aussi prendre $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, qui diverge, mais $d(x_{n+1}, x_n) = \frac{1}{n+1}$ tend vers zéro.
Si on prend $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ alors c'est une suite convergente (vers zéro), donc de Cauchy. Mais
$$d(x_{n+1}, x_n) = |x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right| = \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}.$$
Donc
$$\sum_n d(x_{n+1}, x_n) = +\infty.$$

□

2 Espaces de dimension finie

Exercice 6 (Norme sur $\mathbb{K}^n$) Ici $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq n}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{K}^p$. On définit $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ par

$$N(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \right).$$

pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $n = p$, A est inversible et $\alpha_i \in]0,+\infty[$ pour tout i.

Réponse. Supposons que N soit une norme. Si A n'est pas injective, il existe $X \in \mathbb{K}^n$, $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. Donc $N(X) = 0$. Autrement dit, on contredit une propriété d'une norme. Donc A est injective. Le théorème du rang donne alors que $p = n$ (par hypothèse $p \leq n$) et A est inversible. Comme A est inversible, en prenant chaque élément e_k de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il existe $X \neq 0$ tel que $e_k = AX$. Et alors

$$N(X) = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \right) = \alpha_k > 0,$$

car X est non nul.

Réciproquement, on vérifie à la main que N est bien une norme.

$\square$

Exercice 7 ($\star$) Soit $\|\cdot\|$ la norme hermitienne usuelle sur $\mathbb{C}^n$, et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur l'espace E des applications linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$:

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|.$$

On identifie A à sa matrice (a_{jk}) sur la base canonique $e_1,\dots,e_n$ de $\mathbb{C}^n$ et on définit sur E une deuxième norme en posant :

$$\|A\|_1 = \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_{jk}|.$$

1. Montrer que pour tout A dans E,

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n^{3/2}\|A\|_\infty.$$

On considère la matrice de Schur $A = (a_{jk})$ avec $a_{jk} = \dfrac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

2. Vérifier que $\|A\|_\infty = 1$ et que $\|A\|_1 = n^{3/2}$. En déduire que les inégalités sont optimales.

Réponse. $(e_1,\cdots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Pour tout x de norme 1,

$$\begin{aligned}\|A(x)\| &= \left\| A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j)\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\|A(e_j)\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| \, \|e_k\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| \leq \|A\|_1.\end{aligned}$$

Donc

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_1. \tag{1}$$

De plus si on prend la matrice A telle que $a_{11} = 1$ et $a_{jk} = 0$ sinon, alors avec $x = e_1$,

$$\|A(e_1)\| = 1 = \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_{jk}| = \|A\|_1.$$

Ainsi la constante 1 est optimale dans l'inégalité (1).
Maintenant avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_{jk}| \times 1 \leq \left(\sum_{1\leq j,k\leq n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{1\leq j,k\leq n}\right)^{1/2} \\ &= n\left(\sum_{1\leq k\leq n} \|A(e_k)\|^2\right)^{1/2} \leq n\left(\sum_{1\leq k\leq n} \|A\|_\infty^2\right)^{1/2} = n^{3/2}\|A\|_\infty.\end{aligned}$$

2. On considère la matrice de Schur $A = (a_{jk})$ avec $a_{jk} = \dfrac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. A est une matrice unitaire, cést-à-dire que

$$A \times {}^t\overline{A} = Id_n.$$

En effet si $k \neq m$

$$\sum_j a_{kj}\overline{a_{mj}} = \frac{1}{n}\sum_j \omega^{jk}\overline{\omega}^{mj} = \frac{1}{n}\sum_j \alpha^j$$

avec $\alpha = \omega^{k-m}$, $\alpha \neq 1$ et $\alpha^n = 1$. Or pour les racines de l'unité autres que 1, on sait que cette dernière somme fera zéro. Si par contre $k = m$, on trouve 1.
Comme A est unitaire, c'est une isométrie. Donc $\|A(x)\| = \|x\|$, soit $\|A\|_\infty = 1$. Et

$$\|A\|_1 = \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_{jk}| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\leq j,k\leq n} 1 = n^{3/2}.$$

Donc la constante $n^{3/2}$ est optimale.

$\square$

Exercice 8 ($\star$) Considérons le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension deux

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

On munit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ des deux normes N_1 et N_2 définies par

$$\forall a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \quad N_1(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}|, \quad N_2(a+b\sqrt{2}) = |a|+|b|.$$

Montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. Conclusion ?

Réponse. Commencer par vérifier que ce sont bien des normes. En particulier $N_1(a+b\sqrt{2}) = 0$ implique que $\sqrt{2} = -a/b \in \mathbb{Q}$ si $b \neq 0$, ce qui n'est pas possible. Donc b est nul et a aussi.

De plus il est immédiat que

$$N_1(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}| \leq |a|+|b|\sqrt{2} \leq \sqrt{2}(|a|+|b|) = \sqrt{2}N_2(a+b\sqrt{2}).$$

Considérons $u_n = (1-\sqrt{2})^n$. Cette suite tend vers zéro et la formule du binôme de Newton donne

$$u_n = a_n - b_n\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$

avec a_n et b_n entiers. Or

$$N_1(u_n) = |a_n - b_n\sqrt{2}| = |1-\sqrt{2}|^n,$$

donc tend vers zéro. Mais si $v_n = (1+\sqrt{2})^n$, alors $v_n = a_n + b_n\sqrt{2}$ tend vers $+\infty$ et $a_n = (u_n+v_n)/2$. Donc

$$N_2(u_n) = |a_n| + |b_n|$$

tend vers $+\infty$. Il n'existe donc pas de constante C telle que pour tout $u \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $N_2(u) \leq CN_1(u)$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Attention. L'énoncé “espace vectoriel de dimension finie implique normes équivalentes” n'est vrai que si le corps de base de l'e.v. est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui sont eux-même complets ! Avec comme corps $\mathbb{Q}$ (incomplet), c'est faux ! Exercice : trouver où ceci joue dans la démonstration... □

Exercice 9 (Espace des polynômes, applicable à la leçon 168) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non nulle et positive.

1. Montrer que l'application

$$\phi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}, \quad (P,Q) \to \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$\forall i,j,\ \phi(P_i,P_j) = \delta_{i,j}\ (\delta_{i,j} = 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon}),\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P) = n.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a n racines simples réelles dans $[0,1]$.

Indication pour le 3. : on pourra noter par k le nombre de racines de P_n dans $]0,1[$ d'ordre de multiplicité impaire, par $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k$ ces racines et considérer le polynôme $Q = (X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_k)$. Si $k < n$, montrer qu'on aboutit à une absurdité.

Réponse. C'est classique et on obtient ainsi des familles de polynômes orthogonaux (Hermite, Legendre, Laguerre, Tchebychev, etc.)

1. Vérification standard. Si $\phi(P,P)$ est nul, alors l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle, donc la fonction fP^2 est nulle. Comme f est continue et non nulle, il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel elle est strictement positive. Donc le polynôme P est nul sur cet intervalle donc est nul.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
3. Si Q est un polynôme de degré $p < n$, alors il est dans $Vect(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$, donc il est orthogonal à P_n. Ainsi $\phi(Q, P_n) = 0$. Donc si $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$ sont les zéros de P_n de multiplicité impaire, alors on pose $Q = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k)$. Si $k < n$, c'est un polynôme orthogonal à P_n. Mais Q et P_n change de signe en même temps que P_n. Donc $x \mapsto Q(x)P_n(x)$ est de signe constat sur $[0, 1]$ et nulle en un nombre fini de points. Ainsi
$$\int_0^1 f(t)Q(t)P_n(t) \neq 0.$$
Contradictoire. Donc $k \geq n$. D'où $k = n$ et $P_n = Q$ est scindé à racines simples.

□

Exercice 10 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire f non continue sur E.
2. Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \|x\| + |f(x)|$. Montrer que N est une norme non équivalente à $\|.\|$.

Ainsi : un espace $\mathbb{K}$-vectoriel est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.

Réponse. D'abord notons qu'un espace vectoriel de dimension infinie admet une famille libre infinie dénombrable $(e_n,\ n \in \mathbb{N})$ (presque immédiat puisque cet espace n'est pas de dimension finie).

Plus compliqué. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E indépendants. Alors il existe un supplémentaire H de F contenant G.

1. Si E est de dimension infinie, on prend une famille libre infinie dénombrable $(e_n,\ n \in \mathbb{N})$, F est le s.e.v. engendré par cette famille et G son supplémentaire. Quitte à les normaliser, on peut supposer que $\|e_n\| = 1$. On pose
$$f(e_n) = n, \quad \forall x \in G,\ f(x) = 0.$$
Cette forme f n'est pas continue car non bornée sur la boule unité.
2. Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \|x\| + |f(x)|$. Clairement
$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq N(x).$$
Donc si $N(x) = 0$, alors $x = 0$. Les autres propriétés d'une norme se montrent directement.
Mais pour tout e_n, $\|e_n = 1$, alors que $N(e_n) = 1 + n$. Donc il n'y a pas équivalence.

On rappelle que dans un e.v. normé, une forme linéaire ϕ est continue si et seulement si son noyau est fermé. En effet si ϕ est continue, alors $\ker \phi = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé. Et si ϕ n'est pas continue, alors il existe une suite de vecteurs $(v_n,\ n \in \mathbb{N})$ telle que $v_n \in E$ et $\phi(v_n) \geq n\|v_n\|$ (car pour une application linéaire, continue est équivalente à lipschitzienne). On pose $z_n = \dfrac{1}{\phi(v_n)} v_n \in E$. Cette suite de vecteurs tend vers zéro car $\|z_n\| \leq \dfrac{1}{n}$. Et $\phi(z_n) = 1$. De plus $z_1 - z_n \in \ker(\phi)$ pour tout n, puisque $\phi(z_1 - z_n) = \phi(z_1) - \phi(z_n) = 0$. Donc $z_1 - z_n$ est une suite d'éléments de $\ker \phi$ qui converge vers $z_1 \notin \ker \phi$. Et comme $z_1 \notin \ker \phi$,
$$E = \ker \phi \oplus Vect(z_1).$$
Donc si $x \in E$, alors $x = y + \lambda z_1$ avec $y \in \ker \phi$ et $x_n = y + \lambda(z_1 - z_n)$ est une suite de $\ker \phi$ qui tend vers x. Autrement dit, $\ker \phi$ est dense dans E. Donc n'est pas fermé, sinon ce serait E lui même.

Donc si E est de dimension infinie, il admet un hyperplan dense dans E !

□

---

3 Espaces normés

Exercice 11 Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$, $\phi \in E$ et $Z = \{x \in [0,1],\ \phi(x) = 0\}$. Pour tout $f \in E$, on note $N(f) = \|\phi f\|_\infty$.

1. À quelle condition sur Z l'application $N : f \mapsto N(f)$ est-elle une norme sur E ?
2. À quelle condition sur Z l'application $N : f \mapsto N(f)$ est-elle une norme équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Réponse.

1. $\overline{[0,1] \setminus Z} = \overline{\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)} = [0,1]$.
2. $Z = \emptyset$.

□

Exercice 12 (Médiane)

1. Rappeler qu'un produit scalaire préhilbertien (sur un espace réel) vérifie l'identité de la médiane :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
2. Montrer qu'un espace vectoriel normé réel E est préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité de la médiane.
Indication : on pourra introduire la fonction $f(x,y)$ donnée par
$$f(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$
et commencer par montrer que $f(x,z) + f(y,z) = 2f(\frac{x+y}{2}, z)$.
3. Montrer que les espaces l_1 et l_∞ ont une norme qui ne peut provenir d'un produit scalaire.

Réponse.

1. On rappelle que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, d'où via la bilinéarité et la symétrie d'un produit scalaire
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$
2. Si le produit scalaire existe, alors nécessairement $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Donc il y a forcément unicité.
On pose $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ et on montre que c'est un produit scalaire. Pour cela on doit vérifier trois propriétés :
   - défini positif car $(x,x) = \|x\|^2$;
   - symétrique par définition ;
   - reste la linéarité.

On montre d'abord que c'est additif. Utiliser

$$\|a\|^2+\|b\|^2 = 2\left(\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2+\left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}
&\langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle+\langle x',y\rangle\\
&\iff \|x+x'+y\|^2-\|x+x'\|^2-\|y\|^2\\
&\qquad = \|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2+\|x'+y\|^2-\|x'\|^2-\|y\|^2\\
&\iff (\|x+x'+y\|^2+\|y\|^2)+(\|x\|^2+\|x'\|^2)\\
&\qquad = \|x+x'\|^2+(\|x+y\|^2+\|x'+y\|^2)\\
&\iff 2\left\|\frac{x+x'+2y}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{x+x'}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{x+x'}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{x-x'}{2}\right\|^2\\
&\qquad = \|x+x'\|^2+2\left\|\frac{x+x'+2y}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{x-x'}{2}\right\|^2
\end{aligned}$$

On montre ensuite la multiplicativité par rapport à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$. Comme pour $n\in\mathbb{N}$, $nx = x+\ldots+x$, $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$. Comme $\langle 0,y\rangle = 0$, $\langle nx-nx,y\rangle = 0$ soit $\langle -nx,y\rangle = -\langle nx,y\rangle$. Si $r=p/q\in\mathbb{Q}$, $q\langle rx,y\rangle = \langle qrx,y\rangle = \langle px,y\rangle = p\langle x,y\rangle$. Pour étendre à $\mathbb{R}$, on utilise la continuité. D'abord on prouve Cauchy-Schwarz. Si $r\in\mathbb{Q}$, $\|rx+y\|^2\geq 0$. Donc $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|$. Si $r_n\in\mathbb{Q}$ tend vers $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\lambda\langle x,y\rangle-\langle\lambda x,y\rangle| &\leq |\lambda-r_n||\langle x,y\rangle|+|\langle(r_n-\lambda)x,y\rangle|\\
&\leq |\lambda-r_n||\langle x,y\rangle|+\|(r_n-\lambda)x\|\|y\| = |\lambda-r_n|(|\langle x,y\rangle|+\|x\|\|y\|).
\end{aligned}$$

3. Prendre les suites
$$u=(1,0,0,\cdots)\quad v=(0,1,0,0,\cdots).$$
Alors $\|u\|_p=\|v\|_p=1$, quel que soit $p\in[1,+\infty]$. Mais pour $p>1$
$$\|u+v\|_p=\|u-v\|_p=2^{1/p}$$
et
$$\|u+v\|_\infty=\|u-v\|_\infty=1.$$
Et ainsi si l'identité de la médiane est vraie pour $p>1$
$$\|u+v\|_p^2+\|u-v\|_p^2 = 22^{2/p} = 2\|u\|_p^2+2\|v\|_p^2=4$$
donc $p=2$. Et
$$\|u+v\|_\infty^2+\|u-v\|_\infty^2 = 2\neq 2\|u\|_\infty^2+2\|v\|_\infty^2=4.$$

□

Exercice 13 On note $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$ et $N:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{R}$ l'application définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\quad N(P)=\sup_{z\in\mathbb{U}}|P(z)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $(\mathbb{C}[X],N)$ n'est pas complet. Pour ce faire, on pourra utiliser la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}2^{-k}X^k.$$

Réponse.

1. $\mathbb{U}$ est un compact de $\mathbb{C}$. Donc comme P est continue sur $\mathbb{C}$, $N(P) < +\infty$ pour tout polynôme P. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se montrent directement. Si $N(P) = 0$, alors P s'annule sur tout le cercle, donc a une infinité de racines, donc est nul.
2. On pourrait utiliser le fait qu'un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable n'est jamais complet (voir exercice suivant). Ici on utilise la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} X^k.$$

En effet pour tout m et n avec $m > n$

$$N(P_n - P_m) = \sup_{z\in\mathbb{U}} |P_n(z) - P_m(z)| = \sup_{z\in\mathbb{U}} \left| \sum_{k=n+1}^{m} 2^{-k} z^k \right|$$
$$\leq \sup_{z\in\mathbb{U}} \sum_{k=n+1}^{m} 2^{-k} \left| z^k \right| \leq 2^{-n}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $2^{-n_0} \leq \varepsilon$ et donc pour tout $m > n \geq n_0$, $N(P_n - P_m) \leq \varepsilon$. C'est donc une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C}[X], N)$. Mais elle ne converge pas dans $\mathbb{C}[X]$. En effet on peut vérifier que si on pose

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X^k = \frac{2}{2 - X},$$

cette fonction est définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \ |z| < 2\}$. Et

$$N(P_n - f) = \sup_{z\in\mathbb{U}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} z^k \right| \leq 2^{-n}.$$

Donc f est la limite de la suite (P_n) pour la norme N. Mais cette limite n'est pas un polynôme !

□

Exercice 14 Soit (E, d) un espace métrique complet.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Baire.
2. Prouver que $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Réponse.

1. Un espace topologique est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De façon équivalente, un espace topologique est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Le théorème de Baire dit qu'un espace métrique complet est un espace de Baire.
2. Plus généralement un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel E à base dénombrable n'est complet pour aucune norme. En effet soit $(e_n, \ n \in \mathbb{N})$ une base de E. On pose $F_n = Vect(e_0, \cdots, e_n)$. Ce s.e.v. F_n est fermé (car de dimension finie) et d'intérieur vide. Sinon il existerait une boule $B(x, r)$, $r > 0$, incluse dans F_n. Donc $x \in F_n$ et par translation (c'est un s.e.v.), la boule $B(0, r) = B(x, r) - x$ est incluse dans F_n. Comme F_n est invariant par homothétie, on aurait $E = F_n$. Ainsi on a une famille dénombrable de fermés F_n d'intérieur vide, dont la réunion est E, qui lui n'est pas d'intérieur vide. Donc ce n'est pas un espace de Baire, donc il n'est pas complet.

□

3.1 Espace des suites

Exercice 15 Pour $p \in [1, +\infty[$, on note l_p l'espace des suites $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^p < +\infty \text{ et } \|u\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et on note l_∞ l'espace des suites bornés avec $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$.

1. Montrer qu'on a défini ainsi une norme respectivement sur l_p et l_∞.
2. Démontrer que pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $l_p \subset l_q$, mais que l'inclusion $i : l_p \to l_q$ n'est pas une isométrie.

On désignera par $c = c(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites convergentes et par $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel de $c(\mathbb{N})$ composé des suites convergentes vers 0. Ces deux espaces sont contenus dans l_∞ et sont munis de la norme induite par $\|.\|_\infty$.

3. Montrer que tous les espaces vectoriels normés définis ci-dessus sont complets.
4. Quelle est l'adhérence de l_p dans l_∞ ?

Réponse.

1. Une série à termes positifs converge vers zéro si et seulement si tous les termes sont nuls. Le reste est basé sur l'inégalité de Minkowski.
2. Si $u = (u_n)$ est dans l_p, alors la série de terme général $|u_n|^p$ converge. Donc en particulier la suite (u_n) tend vers zéro. Donc il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n| \leq 1$. Comme $q \geq p$, on en déduit que pour tout $n \geq N_0$,
$$|u_n|^q \leq |u_n|^p$$
Par comparaison la série de terme général $|u_n|^q$ converge. Donc $u \in l_q$.
Si $q = +\infty$, comme la suite (u_n) converge elle est bornée.
Si on choisit la suite $u = (1, 1, 0, \cdots)$, alors
$$\|u\|_p = 2^{1/p} \neq 2^{1/q} = \|u\|_q.$$
3. Il faut montrer que toute suite de Cauchy converge. Soit $u = (u_n)$ une suite de Cauchy dans l_∞. Donc chaque $u_n = (u_{n,k})$ est elle même une suite bornée de nombres réels. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n_1 \geq N_0$ et $n_2 \geq N_0$:
$$\|u_{n_1} - u_{n_2}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_{n_1,k} - u_{n_2,k}| \leq \varepsilon.$$
Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, la suite $(u_{n,k},\ n \in \mathbb{N})$ est une suite de Cauchy de nombres réels. Donc elle converge vers une limite $\ell_k \in \mathbb{R}$. On définit alors la suite de nombres réels $\ell = (\ell_k,\ k \in \mathbb{N})$. Montrons qu'elle est dans l_∞ et que c'est la limite dans l_∞ de u.
— D'abord en prenant $\varepsilon = 1$, on a l'existence d'un rang N_0 tel que pour tout $n_2 \geq N_0$:
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |u_{N_0,k} - u_{n_2,k}| \leq 1.$$
En passant à la limite sur n_2, k et n_1 étant fixés, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$|u_{N_0,k} - \ell_k| \leq 1 \Rightarrow |\ell_k| \leq 1 + |u_{N_0,k}| \leq 1 + \|u_{N_0}\|_\infty.$$
Donc $(\ell_k,\ k \in \mathbb{N})$ est bien une suite bornée.

— Ensuite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n_1 \geq N_0$ et $n_2 \geq N_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|u_{n_1,k} - u_{n_2,k}| \leq \varepsilon.$$

On passe à la limite sur n_2 :

$$|u_{n_1,k} - \ell_k| \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n_1 \geq N_0$ et $n_2 \geq N_0$

$$\|u_{n_1} - \ell\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Autrement dit la suite (u_n) converge dans l_∞ vers la suite $\ell \in l_\infty$.

Cet espace est donc bien complet. Preuve semblable à : la limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.

Pour les espaces l_p, c'est à peu près les mêmes arguments. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n_1 \geq N_0$ et $n_2 \geq N_0$:

$$\|u_{n_1} - u_{n_2}\|_p^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_1,k} - u_{n_2,k}|^p \leq \varepsilon.$$

Donc en particulier tous les termes de la somme sont plus petits que ε. Donc à k fixé on a convergence de $u_{n,k}$ vers ℓ_k et la suite ainsi définie est dans l_∞. Montrons qu'elle est dans l_p et que c'est la limite dans l_p de u.

— C'est un peu plus compliqué que pour l_∞. Mais pour $\varepsilon = 1$, il existe N_0 tel que pour tout $n_2 \geq N_0$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{K} |u_{N_0,k} - u_{n_2,k}|^p \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{N_0,k} - u_{n_2,k}|^p \leq 1.$$

Donc en passant à la limite sur n_2

$$\sum_{k=0}^{K} |u_{N_0,k} - \ell_k|^p \leq 1.$$

De là

$$\sum_{k=0}^{K} |\ell_k|^p \leq \sum_{k=0}^{K} \left(2^{p-1}|u_{N_0,k} - \ell_k|^p + 2^{p-1}|u_{N_0,k}|^p\right) \leq 2^{p-1} + 2^{p-1}\sum_{k=0}^{K} |u_{N_0,k}|^p \leq 2^{p-1}(1 + \|u_{N_0}\|_p^p).$$

Donc on a une série à termes positifs dont les sommes partielles sont bornées. Elle converge, autrement dit $\ell \in l_p$.

On a utilisé línégalité de convexité : pour tout $p \geq 1$

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}|a|^p + 2^{p-1}|b|^p.$$

— La convergence est plus simple car : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n_1 \geq N_0$ et $n_2 \geq N_0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_1,k} - u_{n_2,k}|^p \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout $n_1 \geq N_0$

$$\|u_{n_1} - \ell\|_p^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_1,k} - \ell_k|^p \leq \varepsilon.$$

4. Soit c_0 l'ensemble des suites convergentes vers zéro. C'est un sous-espace de l_∞. Admettons un temps qu'il soit fermé. Toute suite de l_p est dans c_0 (si une série converge, son terme général tend vers zéro). Soit $u \in c_0$. Posons $u^N = (u_0, u_1, \ldots, u_N, 0, \ldots)$ la suite tronquée. Elle est dans tous les espaces l_p (somme finie). De plus comme u converge vers 0,

$$\lim_{N \to \infty} \|u - u^N\|_\infty = \lim_{N \to \infty} \sup_{k \geq N} |u_n| = 0.$$

Donc l'adhérence de l_p dans l_∞ est c_0.

Si $u = (u_n)$ est une suite d'éléments de c_0, convergente dans l_∞. Cela signifie que chaque u_n est dans c_0 et qu'il existe une suite $\ell \in l_\infty$ telle que $\|u_n - \ell\|_\infty \to 0$. Il suffit de montrer que $\ell \in c_0$ et on aura la fermeture de c_0. Pour tout ε il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, et tout $k \in \mathbb{N}$

$$|u_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon.$$

Prenons $n = N_0$. Il existe un rang K_0 (qui dépend de ε et de N_0, donc que de ε) tel que pour tout $k \geq K_0$, $|u_{N_0,k}| \leq \varepsilon$ (car $u_n = (u_{n,k},\ k \in \mathbb{N})$ tend vers zéro). Ainsi pour tout $k \geq K_0$

$$|\ell_k| \leq |u_{N_0,k} - \ell_k| + |u_{N_0,k}| \leq 2\varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence vers zéro !

$\square$

Exercice 16 (Bases de Schauder) On dit qu'une famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs d'un e.v.n. E forme une base de Schauder si pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(a_n)_n$ de scalaires telle que

$$\lim_{N \to +\infty} \left(x - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \right) = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on appelle $e^{(n)}$ la suite définie par

$$e_k^{(n)} = 1 \text{ si } k = n, \quad e_k^{(n)} = 0 \text{ si } k \neq n.$$

1. Démontrer que la famille $\{e^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de Schauder dans l_p, pour $p \in [1, +\infty[$ et dans c_0.
2. En déduire que les espaces l_p, $p \in [1, +\infty[$, et c_0 sont séparables.
3. Ce résultat subsiste-t-il dans l_∞ ?

Réponse.

1. Soit $u = (u_n)$ une suite dans l_p ou c_0. Alors

$$u^N = \sum_{n=1}^{N} u_n e^{(n)}$$

est une suite finie, donc dans l_p et dans c_0 telle que

$$\|u - u^N\|_p^p = \sum_{k \geq N+1}^{\infty} |u_k|^p, \quad \text{ou} \quad \|u - u^N\|_\infty = \sup_{k \geq N+1} |u_k|.$$

Dans les deux cas, on a le reste d'une série convergente ou les derniers termes d'une suite qui tend vers 0. Donc

$$\lim_{N \to +\infty} \|u - u^N\|_p = \lim_{N \to +\infty} \|u - u^N\|_\infty = 0.$$

Donc la famille $\{e^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de Schauder dans l_p, pour $p \in [1, +\infty[$ et dans c_0.

2. Un espace est séparable s'il existe une famille au plus dénombrable et dense. On vient de montrer que la famille des $e^{(n)}$ fait le travail dans les espaces l_p, $p \in [1, +\infty[$, et c_0.

3. L'espace l_∞ n'est pas séparable. Prouvons le.
   On considère l'ensemble $E = \{x \in l_\infty |\ \forall k \geq 1,\ x_k = 0,\ \text{ou } x_k = 1\}$. Pour toute suite $x \in E$, $\|x\|_\infty = 1$. De plus E n'est pas dénombrable (en bijection avec $\mathbb{R}$) et si x et y sont dans E avec $x \neq y$, alors $\|x - y\|_\infty = 1$.
   Supposons que l_∞ soit séparable. Alors il existe un ensemble $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ dénombrable et dense dans l_∞. Considérons maintenant $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les boules fermées $B(x, 1/3)$ de centre $x \in E$ et de rayon $1/3$.
   (a) La densité de A implique que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - a_k\|_\infty \leq 1/3$.
   (b) Si on choisit deux boules B et B' dans $\mathcal{F}$ différentes alors $B \cap B' = \emptyset$.

   En effet supposons que $y \in B \cap B'$. Alors
   $$\|x - x'\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty + \|y - x'\|_\infty \leq 2/3.$$
   Mais on a remarqué plus haut que $\|x - x'\|_\infty = 1$, d'où une contradiction.
   On peut définir alors une application $\phi : \mathcal{F} \to A$ qui à une boule associe un élément $a \in B \cap A$ (ceci est possible d'après le point 1). Cette application est injective. En effet si $a = \phi(B) = \phi(B')$ alors $a \in B \cap A$ et $a \in B' \cap A$, i.e. $a \in B \cap B'$. Donc d'après le point 2, $B = B'$. Or si ϕ est injective, alors le cardinal de $\mathcal{F}$ est inférieur ou égal à celui de A. Donc $\mathcal{F}$ est au plus dénombrable. Ceci est impossible car $\mathcal{F}$ contient E, donc est non dénombrable.
   Conclusion : l_∞ n'est pas séparable. Donc il n'existe pas de base de Schauder dans l_∞.

$\square$

Exercice 17 Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$, $1 \leq p < +\infty$, et soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$. Soit l'opérateur $T : l_p \to l_p$ définie par $Tx = a.x = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que T est un opérateur linéaire et continu.
2. Déterminer la norme de T.

Réponse.

1. Linéaire à vérifier. Si $x \in l_p$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{n=0}^{N} |a_n x_n|^p \leq \left(\sup_n |a_n|\right)^p \sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \leq \|a\|_\infty^p \|x\|_p^p.$$
   Donc T est continue avec $|||T||| \leq \|a\|_\infty$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|a\|_\infty - \varepsilon \leq |a_N| \leq \|a\|_\infty$. Soit x la suite définie par $x_n = \delta_n^N$ (symbole de Kronecker). Alors $\|x\|_p = 1$ et $\|Tx\|_p = |a_N| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon$. Donc
   $$|||T||| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\square$

Exercice 18 (Application du lemme de Schur) Soit (e_i) la base orthonormée canonique de $l_2(\mathbb{R})$ (suites à valeurs réelles). On pose $\langle A(e_i), e_j \rangle = \dfrac{1}{i + j + 1}$. Montrer que A définit un opérateur continu dont la norme est bornée par π.

Réponse. Toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_2 se décompose ainsi

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i e_i, \quad \text{la convergence ayant lieu dans } l_2.$$

Comme A doit être linéaire, on doit avoir :

$$A(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i A(e_i).$$

Donc pour obtenir la suite $A(x)$ il suffit de connaître sa décomposition dans la base (exactement comme pour une matrice) :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \langle A(x), e_j\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \langle A(e_i), e_j\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_i}{i+j+1}.$$

Par l'inégalité de Hölder, cette somme a bien un sens. Ainsi pour tout $x \in l_2$ on devrait avoir :

$$A(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_i}{i+j+1} \right) e_j.$$

Il reste à justifier que $A(x) \in l_2$ et que A ainsi défini est continu. C'est un cas particulier du lemme de Schur :

Lemme 1 *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs ou nuls. On suppose qu'existent un réel $C > 0$ et une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de sorte que :*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\omega_j \leq C\omega_i,\ \text{ et } \forall j \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\omega_i \leq C\omega_j.$$

Alors si $x \in l_2$ la suite y définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} x_j$$

est dans l_2 et $\|y\|_2 \leq C\|x\|_2$.

Dans notre cas, on pose $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. En comparant les sommes avec des intégrales, on obtient les majorations suivantes :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\omega_j \quad = \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)\sqrt{j+1}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+i)} = \frac{\pi}{\sqrt{i}}.$$

Donc on peut appliquer le lemme de Schur avec $C = \pi$.

Démonstration du lemme de Schur. On doit calculer

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty} y_i^2 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{a_{i,j}\omega_j} \sqrt{\frac{a_{i,j}}{\omega_j}} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\omega_j \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_{i,j}}{\omega_j} x_j^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} C\omega_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_{i,j}}{\omega_j} x_j^2 \right) = C \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x_j^2}{\omega_j} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\omega_i \\
&\leq C^2 \|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

La première inégalité est celle de Hölder, et l'interversion des deux sommes est licite car tous les termes sont positifs.
□

3.2 Espace des fonctions régulières

Exercice 19 Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues définies sur $I = [0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit sur E trois normes en posant respectivement, pour tout $f \in E$:

$$N_\infty(f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|; \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt; \quad N_2(f) = N_\infty(f) + N_1(f).$$

2. — Montrer que N_∞ et N_2 sont équivalentes.
   — Montrer que N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.
   — Montrer que E est de dimension infinie.

Réponse.

□

Exercice 20 (Dérivée) Soit $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'opérateur différentiel défini par $Df = f'$.

1. Montrer que $C^1([0,1])$, muni avec la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.
2. Montrer que $D : C^1([0,1], \|.\|) \to C([0,1], \|.\|_\infty)$ est une application linéaire bornée, donc continue. Cependant, si on regarde $C^1([0,1])$ comme sous espace normé de $C([0,1])$, alors D n'est pas continue.

Réponse.

□

Exercice 21 (Fonctions lipschitziennes) Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne sur $[0,1]$ s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \; |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup\{|f(x)|, \; x \in [0,1]\} + \sup\left\{\left|\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\right|, \; (x,y) \in [0,1]^2, \; x \neq y\right\}.$$

Montrer que

1. E est un espace vectoriel ;
2. pour tout $f \in E$, $N(f) < +\infty$;
3. N est une norme sur E ;
4. (E, N) est un espace de Banach.
5. la norme N et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Réponse.

1. Si f et g sont deux fonctions de E et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |\lambda||g(x) - g(y)| \leq (K_f + |\lambda| K_g)|x-y|.$$
Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Si $f \in E$, alors f est continue sur $[0,1]$, qui est compact. Donc f est bornée. De plus, pour $x \neq y$:
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq K.$$
Donc $N(f) < +\infty$.
3. Il est immédiat que pour $f \in E$, $N(f) \geq 0$ comme supremum de termes positifs. De plus $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ s'obtient aisément. Ensuite si $N(f) = 0$, alors
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\} = 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [0,1].$$
Donc $f = 0$. Seule l'inégalité triangulaire demande un peu plus de travail. Rappelons que $\|.\|_\infty$ est une norme, donc pour f et g dans E :
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$
De plus pour $x \neq y$
$$\frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq \sup \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}.$$
Ainsi $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Ainsi
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$, donc $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$;
   - pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $p \geq M$ et $q \geq M$:
   $$\|f_p - f_q\|_\infty \leq N(f_p - f_q) \leq \varepsilon,$$
   la première inégalité étant toujours vraie.

   Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Cet espace étant complet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Il ne reste donc qu'à montrer que
   - $f \in E$;
   - $\lim\limits_{n\to\infty} N(f_n - f) = 0$.

   Pour le premier point, on a pour tout $p \geq M$ et M :
   $$N(f_p) \leq N(f_p - f_M) + N(f_M) \leq \varepsilon + N(f_M),$$
   soit pour tout $x \neq y$
   $$\frac{|f_p(x) - f_p(y)|}{|x-y|} \leq \varepsilon + N(f_M).$$
   Mais les suites $(f_p(x))$ et $(f_p(y))$ convergent vers $f(x)$ et $f(y)$. Ainsi on obtient
   $$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \varepsilon + N(f_M) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (\varepsilon + N(f_M))|x-y|.$$
   Donc $f \in E$ avec une constante de Lipschitz K inférieure à $\varepsilon + N(f_M)$.
   Pour le second point, on a pour tout $x \neq y$, $p \geq M$ et $q \geq M$:
   $$|(f_p - f_q)(x)| + \frac{|(f_p-f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)|}{|x-y|} \leq N(f_p - f_q) \leq \varepsilon.$$
   Donc en passant à la limite sur p :
   $$|(f - f_q)(x)| + \frac{|(f-f_q)(x) - (f - f_q)(y)|}{|x-y|} \leq \varepsilon \Rightarrow N(f - f_q) \leq \varepsilon.$$
   Finalement on a bien : $\lim\limits_{n\to\infty} N(f_n - f) = 0$.

□

Exercice 22 (Fonctions continues et norme L^p) Nous considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ nx + 1 - (1/2)n & \text{si } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que cette suite est de Cauchy, mais ne converge pas dans $C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_p$ si $1 \leq p < +\infty$.

Réponse.

□

Exercice 23 (Espace de fonctions continues par morceaux) Soit F l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $I = [0,1]$, à valeurs réelles, continues sauf éventuellement en un nombre fini de points où elles admettent des disontinuités de première espèce (fonctions continues par morceaux).

1. Montrer que pour tout $f \in F$ le nombre suivant est fini :

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

   Montrer ensuite que $f \mapsto \|f\|$ est une norme.

2. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(0) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}; \; f_n(x) = \frac{1}{p} \text{ pour } \frac{1}{p+1} \leq x \leq \frac{1}{p}, \; p = 1, 2, \ldots, n.$$

   — Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy.
   — Prouver que pour tout $x \in [0,1]$, la limite de $f_n(x)$ converge. Soit $f(x)$ la limite. Prouver que f ne peut pas avoir un nombre fini de discontinuités sur I.
   — Montrer que F n'est pas un espace de Banach.

3. Trouver une suite (u_n) convergente de F dont les éléments sont tous différents, chaque fonction u_n étant discontinue sur I. La limite d'une telle suite peut-elle être continue ?

Réponse.

1.
2. La limite f vaut $1/p$ sur chaque intervalle $]1/(p+1), 1/p]$.
3. $u_n(x) = 1 + (1/n)$ sur $[0, 1/2]$ et $u_n(x) = 1 - (1/n)$ sur $]1/2, 1]$.

□

Exercice 24 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, et F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions impaires dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle. Soit ϕ l'élément de E donné par $\phi(t) = t$.

1. Vérifier que F est fermé.
2. Montrer que la distance de ϕ à F est égale à $1/2$, mais que l'on a $\|\phi - \psi\| > 1/2$ pour tout $\psi \in F$.

Le théorème de projection sur un convexe fermé est donc faux dans un espace de Banach où la norme ne dérive pas d'un produit scalaire.

Réponse.

1. Soit f_n une suite d'éléments de F convergente vers g et montrons que $g \in F$. Pour tout n, $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$. La convergence uniforme assure que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$
De plus par convergence simple, g est impaire.
Ainsi F est fermé. De plus c'est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si $\psi \in F$, alors $\int_0^1 (\phi - \psi) = 1/2$. Donc si $\|\psi - \phi\| < 1/2$ alors $\left|\int_0^1 (\phi - \psi)dx\right| \leq \|\psi - \phi\| < 1/2$. Donc nécessairement $\|\psi - \phi\| \geq 1/2$.
Supposons que $\|\psi - \phi\| = 1/2$. Alors pour tout $x \in [0,1]$ on a
$$x - 1/2 \leq \psi(x) \leq x + 1/2.$$
Donc
$$\int_0^1 \psi(x)dx \geq \int_0^1 (x - 1/2)dx = 0.$$
Ainsi si $\psi \in F$, $\psi(x) = x - 1/2$. Et on perd la continuité de ψ en zéro !
Donc si $\psi \in F$, $\|\phi - \psi\| > 1/2$.
Prenons la fonction ψ impaire définie sur $[0,1]$ par
$$\psi(x) = \begin{cases} -nx/2 & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ (2x-1)/(2(1-2/n)) & \text{si } 0 \leq 1/n < x < 1/2 \\ x - 1/2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Alors $\psi \in F$ et $\|\phi - \psi\| = 1/2 + 1/n$. La distance de ϕ à F vaut donc $1/2$.

□

3.3 Applications linéaires

Exercice 25 Soit $E = C([0,1])$ et $T : E \to E$ l'opérateur de Volterra défini par
$$\forall x \in [0,1],\ (Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est un opérateur linéaire continu.

2. Déterminer sa norme.
3. Montrer que T est injectif et non surjectif (on pourra montrer que $\text{Im } T = \{g \in C^1([0,1]);\ g(0) = 0\}$) ;

Réponse.

1. Linéaire : ok. Continu
$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$
2. De l'inégalité précédente, on a $|||T||| \leq 1$. De plus si on prend f constante égale à 1, alors $Tf(x) = x$ qui est de norme infinie 1. Donc $|||T||| = 1$.
3. Si $Tf = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$,
$$\int_0^x f(t)dt = 0.$$
Donc en remarquant qu'on peut dériver Tf car f est continue, on a $Tf'(x) = 0 = f(x)$. Ainsi T est injective. Soit g dans l'image de T. Il existe f continue telle que pour tout $0 \leq x \leq 1$,
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Donc g est de classe C^1, avec pour dérivée f et $g(0) = 0$. Réciproquement si g est de classe C^1 avec $g(0) = 0$, alors $g = T(g')$.

□

Exercice 26 Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $u : E \to E$, $f \mapsto u(f) = g$ avec
$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt.$$
Étudier la continuité et, le cas échéant, calculer la norme d'opérateur de u

1. En munissant E de la norme N_∞,
2. Puis en munissant E de la norme N_1.

Réponse.

□

---

4 Compacité

Exercice 27 (Espace compact et valeur d'adhérence) Soit X un espace métrique compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X, $a \in X$ et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que :

1. Si $A \subset \{a\}$, (x_n) converge vers a.
2. Si A a au plus un élément, (x_n) converge.

Application. Soit (X,d) un espace métrique, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ et $fX \to \mathbb{U}$ une application continue non surjective. Montrer qu'alors il existe $g : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = e^{g(x)}$, pour tout $x \in X$.

Réponse.

$\square$

Exercice 28 Soient E un espace métrique, K un compact non vide de E et f une application de K dans K telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y))$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α.
2. Soit la suite récurrente (x_n) définie par $x_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite est convergente, et qu'elle converge vers l'unique point fixe α de f.

Réponse.

$\square$

Exercice 29 ($\star$) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre :

1. l'image réciproque de tout compact est un compact ;
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

Réponse.

$\square$

Exercice 30 (Théorème de Riesz) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

1. Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $a \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $d(a,F) = d(a,b) = \|a - b\|$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x,F) \geq 1 - \varepsilon$.
3. Montrer que $B_f = \overline{B(0,1)}$ n'est pas compacte.

   Construire une suite d'éléments (e_n) de B_f tels que $\|e_n - e_m\| \geq 1/2$ pour tout $n \neq m$.

Nous avons prouvé le théorème de Riesz : un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte. Et que la sphère $S(0,1)$ n'est pas compacte.

Réponse.

1. Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $a \in E \setminus F$.
   (a) D'abord F est fermé (à prouver en prenant $X \in \overline{F}$ et une suite tendant vers X. Elle est bornée et $\overline{B(0,R)} \cap F$ est un fermé borné de F de dimension finie, donc compact, donc sous-suite...).
   $d = d(a,F) = \inf\{\|a - x\|, x \in F\}$. $d + 1/(n+1)$ n'est pas un minorant et $x_n \in F$ t.q. $d \leq d(a, x_n) \leq d + 1/(n+1)$. x_n dans un compact de F donc convergence vers b.

   (b) En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\|c\| = d(c, F) = 1$.

2. Montrer que $\overline{B(0,1)}$ n'est pas compacte. Nous avons prouvé le théorème de Riesz : un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.
3. Trois applications. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.
   (a) Montrer que aucune sphère de E n'est compacte.
   (b) Montrer que tout compact de E est d'intérieur vide.
   (c) Soit $f \in L_c(E)$ telle que pour toute partie bornée B de E, $f(B)$ soit une partie compacte de E. Montrer que f n'est pas un homéomorphisme.

□

Exercice 31 (Théorèmes de Dini ⋆⋆) Nous allons voir deux théorèmes de Dini.

1. Soient E un espace vectoriel normé, X un compact de E, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ croissantes continues qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Une application. Soit la suite de fonctions polynômes définie par $P_0(x) = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, 1], \quad 2P_{n+1}(x) = x + 2P_n(x) - (P_n(x))^2.$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}$, puis que la suite $(P_n)_{n\ge0}$ converge simplement vers $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
   (b) En déduire la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\ge0}$ vers f sur [0, 1].

Réponse.

□

---

5 Connexité

Exercice 32 (⋆⋆) Soient $E = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right),\ 0 < x \le 1 \right\}$ et X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que X est connexe et que $X = E \cup \{0\} \times [-1; 1]$.
2. Montrer qu'un point de $\{0\} \times [-1; 1]$ ne peut pas être joint à un point de E par un chemin continu tracé sur X.
3. Conclure.

Réponse. Gostiaux. □

Exercice 33 Montrer que

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ;
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs ; $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont les deux ouverts composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$;
3. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs ; $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ sont les deux fermés composantes connexes par arcs de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Réponse.

$\square$