Calcul numérique d'espérance conditionnelle : introduction.

Alexandre Popier

Le Mans Université

2022-2023

PLAN DU COURS

But : calcul d'espérance conditionnelle.

But

Calculer numériquement $\mathbb{E}(Y|X)$ pour X et Y v.a.

Exemple en finance

- **Modèle de Black-Scholes :**
  - Prix actif : $S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$ avec $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$;
  - Prix option d'achat : $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[(S_T - K)^+ \middle| S_t\right]$.
- **Options américaines et bermudéennes**
  - Initialisation $P_T = g(X_T)$
  - Récurrence $P_i = \max[g(S_i), \mathbb{E}(P_{i+1}|S_i)]$

BUT : CALCUL D'ESPÉRANCE CONDITIONNELLE.

BUT

Calculer numériquement $\mathbb{E}(Y|X)$ pour X et Y v.a.

EXEMPLE EN ASSURANCE

- Calcul du CAPITAL RÉGLEMENTAIRE REQUIS (SCR) sous Solvency 2.

$$\mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{E}\left(h(Y_T)\middle|Z_1\right)\right)\right].$$

RÉGRESSION

- RÉGRESSION LINÉAIRE : $Y = aX + b + \epsilon$.
  - Hypothèse d'exogénéité $\mathbb{E}(\epsilon|X) = 0$: $\mathbb{E}(Y|X) = aX + b$.

PLAN

1. RAPPELS THÉORIQUES

2. APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES

ESPÉRANCE CONDITIONNELLE : EXISTENCE.

DÉFINITION

Soit Y une v.a. telle que $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$. Soit $\mathcal{D}$ une sous-tribu. On appelle espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{D}$ toute v.a. Z telle que

1. *Z est D-mesurable,*
2. *et pour tout ensemble $D \in \mathcal{D}$, $\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_D) = \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_D)$.*

THÉORÈME

Une telle v.a. existe et est unique $\mathbb{P}$-p.s. On la note $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$.

LEMME

Si $\mathcal{D} = \{\emptyset, D, D^c, \Omega\}$, alors

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{D}) = \frac{\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_D)}{\mathbb{P}(D)}\mathbf{1}_D + \frac{\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{D^c})}{\mathbb{P}(D^c)}\mathbf{1}_{D^c}.$$

Propriétés.

Cadre L^2 : Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour $\mathcal{D}$ sous-tribu, $H = L^2(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$ des v.a. $\mathcal{D}$-mesurables de carré intégrable (sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

Théorème

Si $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'élément de H qui minimise $\|Y - Z\|_2$ est $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$.

Propriétés :

Proposition

L'espérance conditionnelle est

- *linéaire : $\mathbb{E}(\alpha Y_1 + \beta Y_2|\mathcal{D}) = \alpha \mathbb{E}(Y_1|\mathcal{D}) + \beta \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{D})$;*
- *positive : si $Y_1 \geq Y_2$ p.s., alors $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{D}) \geq \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{D})$ p.s.*
- *Continuité monotone : si $Y_n \uparrow Y$ avec Y intégrable, alors $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{D}) \uparrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$.*

THÉORÈME

Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Si Y est une v.a. réelle intégrable, alors il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}(Y|\sigma(X)) = \mathbb{E}(Y|X) = f(X), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}.$$

PROBLÈME

Comment caractériser f ?

PROPRIÉTÉS : $\mathbb{P}_X$-p.s. on a

- si $Y_1 \rightsquigarrow f_1$ et $Y_2 \rightsquigarrow f_2$, alors $\alpha Y_1 + \beta Y_2 \rightsquigarrow \alpha f_1 + \beta f_2$;
- et si $Y_1 \geq Y_2$ alors $f_1 \geq f_2$.
- Si $Y_n \rightsquigarrow f_n$, si $Y_n \uparrow Y$ avec Y intégrable, et si $Y \rightsquigarrow f$, alors $f_n \uparrow f$.

CAS PARTICULIERS.

- *X* DISCRÈTE à valeurs dans $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors

$$\mathbb{E}(Y|X = a_n) = f(a_n) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = a_n)}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X=a_n} Y).$$

- V.A. (X, Y) AVEC DENSITÉ ψ sur $\mathbb{R}^2$ strictement positive. Alors loi de Y sachant $X = x$ de densité

$$h(y) = \frac{\psi(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)dy}.$$

CONSÉQUENCE :

$$\mathbb{E}(Y|X) = f(X), \text{ avec } f(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y\psi(x,y)dy}{\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)dy}.$$

PROBLÈMES :

- ψ pas toujours connue ;
- intégrales difficiles à calculer.

(X, Y) vecteur gaussien :

$$E(Y|X) = \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}\,(X)}(X - \mathbb{E}(X)) = f(X).$$

L'espérance conditionnelle coincide avec la régression linéaire.

QUELQUES TECHNIQUES.

HYPOTHÈSES : $Y \in L^2$ et $\mathbb{E}(Y|X) = f(X)$, avec f version régulière de Y sachant X.

DIFFÉRENTES MÉTHODES : on cherche une approximation de f.

- Décomposition et approximation dans L^2.
- Estimateurs de régression à noyau.
- Quantification (cellules de Voronoï).

APPROXIMATION DANS L^2.

$\mathbb{E}(Y|X) = f(X)$ où f minimise

$\mathbb{E}(|Y - g(X)|^2)$ parmi toutes les fonctions g t.q. $g(X) \in L^2$.

ALGORITHME :

- Choisir une base (ϕ_i) de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_X)$:

$$g(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i \phi_i(x).$$

- Tronquer la somme :

$$g(x) \approx \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \phi_i(x).$$

- Minimiser sur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in \mathbb{R}^K$

$$\mathbb{E}\left(\left|Y - \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \phi_i(X)\right|^2\right).$$

CALCUL DES α_i.

TECHNIQUE : pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$

$$\Psi(\alpha) = \mathbb{E}\left(\left| Y - \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \phi_i(X) \right|^2 \right).$$

Condition d'optimalité du premier ordre :

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \mathbb{E}(\phi_i(X))^2 - 2\mathbb{E}(Y\phi_i(X)) + 2\sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbb{E}(\phi_i(X)\phi_j(X)).$$

SYSTÈME LINÉAIRE : $A\alpha = B$ avec

$$\begin{array}{rcl} B & = & (b_i) \in \mathbb{R}^K \quad \text{où} \quad b_i = \mathbb{E}(Y\phi_i(X)) \\ A & = & (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad \text{où} \quad a_{ij} = \mathbb{E}(\phi_i(X)\phi_j(X)). \end{array}$$

CALCUL DES ESPÉRANCES.

MONTE CARLO : fixer N, simuler N fois Y et X et remplacer par moyennes empiriques.

$$b_i = \mathbb{E}(Y\phi_i(X)) \approx \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} Y_l \phi_i(X_l)$$

$$a_{ij} = \mathbb{E}(\phi_i(X)\phi_j(X)) \approx \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \phi_i(X_l)\phi_j(X_l).$$

ALGORITHME :

- Fixer N et K, simuler N fois Y et X ;
- poser
$$\Phi = (\phi_i(X_l)) \in \mathbb{R}^{K\times N}, \qquad \Theta = (Y_l) \in \mathbb{R}^{N\times 1};$$
- calculer
$$\alpha \approx (\Phi\Phi^T)^{-1}(\Phi\Theta).$$

DÉCOMPOSITION DANS L^2.

PROPOSITION

Supposons que le support de X n'est pas un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. L'ensemble des variables

$$1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$$

forme un système libre et total dans $L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$.

ORTHOGONALISATION : par le procédé de Schmidt on peut trouver une base orthonormale $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ et

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(YR_n(X))R_n(X) \approx \sum_{n=0}^{K} \mathbb{E}(YR_n(X))R_n(X).$$

EXEMPLES.

- X UNIFORME SUR $[0,1]$. Polynômes de Legendre :

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^n x^n \right].$$

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= 1, \quad R_1(x) = \sqrt{3}(2x-1), \\
R_2(x) &= \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1), \\
R_3(x) &= \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1), \\
R_4(x) &= \sqrt{9}(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1), \\
R_5(x) &= \sqrt{9}(252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1).
\end{aligned}$$

EXEMPLES.

- X UNIFORME SUR $[0,1]$. Polynômes de Legendre :

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^n x^n\right].$$

- X EXPONENTIELLE(1). Polynômes de Laguerre :

$$R_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x}\right].$$

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= 1, \quad R_1(x) = 1 - x, \\
R_2(x) &= (1/2)(x^2 - 4x + 2), \\
R_3(x) &= (-1/6)(x^3 - 9x^2 + 18x - 6), \\
R_4(x) &= (1/24)(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24), \\
R_5(x) &= (-1/120)(x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120).
\end{aligned}$$

EXEMPLES.

- X UNIFORME SUR $[0,1]$. Polynômes de Legendre :

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^n x^n\right].$$

- X EXPONENTIELLE(1). Polynômes de Laguerre :

$$R_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x}\right].$$

- X NORMALE $\mathcal{N}(0,1)$. Polynômes d'Hermite :

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2/2}\right].$$

$$R_0(x) = 1,\ R_1(x) = x,\ R_2(x) = (1/\sqrt{2})(x^2-1),$$
$$R_3(x) = (1/\sqrt{6})(x^3-3x),\ R_4(x) = (1/\sqrt{24})(x^4-6x^2+3),$$
$$R_5(x) = (2/\sqrt{30})(x^5-10x^3+15x).$$