Le modèle de Black et Scholes

Alexandre Popier

février 2001

1 Introduction : exemple très simple de modèle financier

On considère un marché avec une seule action cotée, sur une période donnée T. Dans un premier temps, on va supposer pour simplifier, qu'il est possible d'emprunter de l'argent à taux 0.

Au temps $t = 0$, une part de cette action vaut 4 euros et durant la période T, son prix peut soit monter à 8 euros, soit descendre à 2 euros. Considérons maintenant une option d'achat européenne sur cette action (on dit aussi un **call européen**). Une option europénne est un titre donnant à son détenteur le droit, et *non l'obligation* d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance. Dans notre cas on va supposer que l'option donne le droit d'acheter cette action au prix de 5 euros à l'instant T. Si le prix de l'action grimpe à 8 euros, le détenteur exerce son droit d'achat, donc achète l'action à 5 euros et la revend immédiatement pour 8 euros. Il a gagné 3 euros. Dans l'autre cas, si le prix de l'action baisse, il n'exerce pas son droit et ne gagne rien. Ainsi à l'instant T, l'option vaut 3 ou 0 euros suivant le cours de l'action. De façon plus formelle, si S_T désigne le prix de l'action à l'instant T, le prix de l'option est donné par : $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$, si K est le prix d'exercice, égal ici à 5 euros. Le prix de l'option est donc connu pour $t = T$, mais reste le problème suivant, dit de valorisation de l'option :

quel doit être le prix de l'option au temps 0 ?

1.1 quel prix pour l'option ?

Notons p_h la probabilité que le prix de l'action soit à la hausse entre les instants 0 et T et p_b celle d'être à la baisse. Bien sûr, on a : $p_h \geq 0$, $p_b \geq 0$ et $p_h + p_b = 1$.

Une façon naturelle d'évaluer le prix de l'option est de calculer l'espérance de sa valeur au temps T, soit :

$$E\left[\text{valeur de l'option en} T\right] = 3 \times p_h + 0 \times p_b = 3 \times p_h$$

Si ce calcul de prix est justifié, on note que le prix de l'option dépend de la probabilité p_h.

On va développer maintenant une autre approche pour évaluer ce prix. Au temps $t = 0$, achetons une action et empruntons 2 euros. La valeur du portefeuille ainsi constitué est $V = 4 - 2$ euros. Au temps $t = T$, si le marché est à la hausse, cette valeur de portefeuille devient $V = 8 - 2 = 6$ euros. Si le marché est en baisse, la valeur devient $V = 2 - 2 = 0$ euros. Autrement dit, au temps T, l'option a la même valeur que le protefeuille constitué par une moitié d'action et un emprunt d'un euro. Donc un prix initial raisonnable pour l'option devrait être $0.5 \times 4 - 1 = 1$ euro. Nous avons *dupliqué* les valeurs de l'option au temps T par un portefeuille (constitué de parts d'action et d'emprunts) et la valeur de ce protefeuille au temps 0 est un candidat naturel pour être le prix initial de l'option.

En fait, si on donne un prix différent à l'option, on crée la possibilité de faire des profits sans prendre de risque. En effet si P est le prix initial de l'option et si $P < 1$, on achète une option, et on constitue le portefeuille suivant : on vend une moitié d'action et on prête un euro. Au temps T, la valeur du portefeuille est soit -3 euros en cas de hausse, soit 0 euro en cas de baisse, ce qui compense exactement la valeur de l'option. Donc on a réalisé dans tous les cas un gain de $1-P$ euros. De même, si $P > 1$, en vendant l'option et en achetant le portefeuille. Un tel profit sans risque est appelé **une opportunité d'arbitrage**. Le choix $P = 1$ apparait comme le seul prix évitant de telles opportunités. Notons que *ce prix ne dépend pas des probabilités régissant le prix de l'action.*

1.2 Ajout d'un taux d'intérêt

On ajoute au modèle précédent la possibilité de prêter ou d'emprunter n'importe quelle somme au taux r. Pour représenter mathématiquement cela, on introduit un nouvel actif, dit *non risqué*, noté S^0, qui vaut 1 euro à l'instant 0 et $(1 + r)$ euros au temps T. On a donc deux actifs un sans risque et l'action précédente. Rappelons que l'action vaut S euros à l'instants 0 et peut soit monter au prix S_h, soit descendre au prix S_b au temps T. Si un portefeuille est constitué de ϕ parts de l'actif sans risque et ψ parts de l'action, sa valeur au temps 0 vaut : $V = \phi + \psi S$ et au temps T :

$$V = \begin{cases} \phi\,(1+r) + \psi S_h & \text{si l'action monte} \\ \phi\,(1+r) + \psi S_b & \text{si l'action baisse} \end{cases}$$

Si comme précédemment on veut dupliquer un titre valant au temps T $f(S_h)$ si l'action monte, et $f(S_b)$ si l'action baisse, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \phi\,(1+r) + \psi S_h &= f(S_h) \\ \phi\,(1+r) + \psi S_b &= f(S_b) \end{cases}$$

Evidemment on suppose $S_h \neq S_b$ et ainsi le système a une unique solution :

$$\begin{cases} \phi &= \frac{1}{1+r}\frac{f(S_h)S_b - f(S_b)S_h}{S_h - S_b} \\ \psi &= \frac{f(S_h)-f(S_b)}{S_h-S_b} \end{cases}$$

On obtient donc comme valeur initiale du portefeuille

$$V = \frac{1}{1+r}\frac{f(S_h)\,S_b - f(S_b)\,S_h}{S_h - S_b} + \frac{f(S_h) - f(S_b)}{S_h - S_b}S$$

Comme dans le paragraphe précédent, si on veut éviter les opportunités d'arbitrage, on doit prendre pour prix initial du titre que l'on a dupliqué, la valeur V trouvée. Comme avant ce prix ne dépend pas des probabilités régissant le prix de l'action sous-jacente.

Maintenant notons en l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$q = \frac{S(1+r) - S_b}{S_h - S_b}$$

On peut montrer alors que $0 < q < 1$. On va alors utiliser q comme probabilité et on note Q la probabilité qui donne q pour que le prix de l'action monte, et $(1-q)$ pour qu'elle baisse. Sous Q, la moyenne de la valeur du titre vaut :

$$E_Q\left[\text{valeur du titre}\right] = qf(S_h) + (1-q)f(S_b)$$

et si on reporte la valeur de q dans l'expression précédente on obtient :

$$\begin{aligned} E_Q\left[\text{valeur actualisée du titre}\right] &= q\frac{f(S_h)}{1+r} + (1-q)\frac{f(S_b)}{1+r} \\ &= V \end{aligned}$$

Cette formule s'interprête en disant que la valeur actualisée du titre est une martingale. De même pour l'action :

$$\begin{aligned} E_Q\left[\text{valeur actualisée de l'action}\right] &= q\frac{S_h}{1+r} + (1-q)\frac{S_b}{1+r} \\ &= S \end{aligned}$$

La probabilité Q est appelée **probabilité risque-neutre** et sous cette probabilité, les prix actualisés sont des martingales.

2 Modèles discrets généraux

Dans cette partie on va généraliser les résultats obtenus précédemment à un marché à temps discret ayant N périodes.

2.1 Marché discret

Un marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Ω est un espace fini, $\mathcal{F}$ la tribu des parties de Ω, et P est une probabilité sur $\mathcal{F}$. Cet espace est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{N}$, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

La tribu $\mathcal{F}_0$ est la tribu grossière $\{\emptyset, \Omega\}$. La tribu $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à la date n. La croissance de la famille de tribus traduit qu'il n'y a pas de "perte" d'information.

Dans le marché considéré, il y a $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont donnés par des variables aléatoires $S_n^0, \ldots, S_n^d$, à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$. Autrement dit les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs. L'actif numéroté 0 est supposé dans toute la suite sans risque :

$$S_n^0 = (1+r)^n \, S_0^0$$

où r est le taux d'intérêt que l'on suppose constant pour simplifier. On supposera aussi $S_0^0 = 1$. Le coefficient

$$\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$$

est le coefficient d'actualisation. Les actifs numérotés de 1 à d seront appelés actifs "à risques".

2.2 Stratégie de gestion, arbitrage

Définition 1

*Une **stratégie de gestion** est une famille* $\phi = (\phi_n)_{n=1}^N$ *de vecteurs aléatoires* $\phi_n = \left(\phi_n^0, \ldots, \phi_n^d\right)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d+1}$*, tels que :*

$$\forall\, 1 \leq n \leq N, \forall\, i \geq 0, \phi_n \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable.}$$

Le vecteur ϕ_n est le portefeuille à l'instant n : ϕ_n^i représente le nombre de parts de l'actif i détenues à la date n. On ne fait pas de restriction sur le signe de ϕ_n^i, ce qui permet d'inclure les ventes à découvert ou un emprunt. La condition de mesurabilité traduit que ϕ est "prévisible". Elle signifie que l'investisseur choisit son portefeuille d'actifs ϕ_n^i "juste avant n" ; donc en ne disposant que de l'information décrite par $\mathcal{F}_{n-1}$. En particulier il ne connait pas encore le prix S_n.

La *valeur du portefeuille* à l'instant n est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \phi_n . S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i$$

la *valeur actualisée* est :

$$\tilde{\mathrm{V}}_n(\phi) = \beta_n (\phi_n . S_n) = \phi_n . \tilde{\mathrm{S}}_n$$

où $\tilde{\mathrm{S}}_n = \left(1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d\right)$ est le vecteur actualisé des prix.

Définition 2

Une stratégie de gestion ϕ *est **auto-finançante** si*

$$\phi_n . S_n = \phi_{n+1} . S_n, \forall\, n \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Cela signifie qu'il n'y a pas d'apports de fonds, ni de retrait d'argent et que les transactions se font sans coûts. Après avoir pris connaissance des cours $S_n^0, \ldots, S_n^d$ l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1}, le réajustement se faisant aux cours de la date n en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus.

Remarque 1

L'égalité $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ *est équivalente à :*

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) \tag{1}$$

Les variations de la valeur du portefeuille ne sont dues qu'à des gains dûs à l'agitation des cours.

Proposition 1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La stratégie* ϕ *est autofinancée.*
2. *Pour tout* $n \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\tilde{S}_j$$

où $\Delta\tilde{S}_j$ *est le vecteur* $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Même s'il n'y a pas de condition de signes sur les ϕ_n^i (les emprunts sont autorisés, on impose à l'investisseur d'être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant ; d'où la définition suivante :

Définition 3

Une stratégie ϕ *est dite* ***admissible*** *si elle est autofinancée et si* $V_n(\phi) \geq 0$ *pour tout* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

La notion d'*arbitrage* (possibilité d'un profit sans prendre de risques) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition 4

Une ***opportunité d'arbitrage*** *est une stratégie* ϕ *autofinançante telle que :*

1.
$$P(V_0(\phi) = 0) = 1$$

2.
$$P(V_N(\phi) \geq 0) = 1 \; ; \; P(V_0(\phi) > 0) > 0$$

L'investisseur, sans mise de fond initiale, termine en N avec un profit positif, strictement positif sur un ensemble de mesure strictement positive (et donc $E(V_N(\phi)) > 0$. Lorsqu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A.), on dit que le marché est **viable** (ou arbitré). La plupart des modèles excluent toute possibilité d'arbitrage et l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

2.3 Martingales et probabilité équivalente : marchés viables

Rappelons d'abord les notations. On considère un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: $\mathcal{F}$ est la tribu des parties de Ω, et P est une probabilité sur $\mathcal{F}$. Cet espace est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_N$ (sans supposer $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). On va imposer que : $\forall\, \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. Tous les états du monde sont possibles. On dira qu'une suite $(X_n)_{n=0}^N$ de variables aléatoires est **adaptée à la filtration** si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Définition 5

Une suite adaptée $(M_n)_{n=0}^N$ de variables aléatoires réelles est une ***martingale*** *si :*

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$$

pour tout $n \leq N-1$.

En particulier si $(M_n)_{n=0}^N$ est une martingale, on a pour tout n : $E(M_n) = E(M_0)$.

Dans un modèle financier, si le cours $(S_n^i)_{n=0}^N$ de l'actif i est une martingale, la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de S_{n+1}^i, à partir des informations disponibles à la date n, est donnée par S_n^i.

Définition 6

Une suite adaptée $(H_n)_{n=0}^N$ de variables aléatoires est ***prévisible*** *si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.*

Proposition 2 *Soit $(M_n)_{n=0}^N$ une martingale, et soit $(H_n)_{n=0}^N$ une suite prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$. On pose $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La suite $(X_n)_{n=0}^N$ définie par :*

$$X_0 = H_0 M_0$$

$$X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \ldots + H_n \Delta M_n \text{ pour tout } n \geq 1$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$.

(X_n) est appelée "transformée de la martingale (M_n) par la suite (H_n)". Donc dans les modèles financiers où les prix actualisés sont des martingales, toute stratégie autofinancée conduit à une valeur finale actualisée égale, en *moyenne*, à la richesse initiale.

Définition 7

Deux mesures de probabilité P et Q définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$ sont ***équivalentes*** *si pour tout $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$.*

Il est facile de voir que l'ensemble des opportunités d'arbitrage est le même pour deux probabilités équivalentes.

Le théorème suivant caractérise les marchés financiers discrets viables.

Théorème 1

Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité P^* équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

Définition 8

*La probabilité P^* est appelée **probabilité risque neutre**.*

L'égalité :

$$E_{P^*}(S_N) = (1+r)^N S_0$$

traduit que l'on est dans un modèle "neutre par rapport au risque" : l'investisseur sera indifférent entre les deux possibilités de placement (sans risque ou risqué) puisque son gain sera (en espérance) le même.

2.4 Marché complet, valorisation

Définition 9

*Une variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable X est dite **duplicable** s'il existe une stratégie autofinançante ϕ telle que $V_N(\phi) = X$.*

Définition 10

*Un marché est **complet** si toute variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable est duplicable.*

Donc dans un marché complet, toute v.a. X $\mathcal{F}_N$-mesurable s'écrit :

$$\left(S_N^0\right)^{-1} X = V_0(\phi) + \sum_1^N \phi_n.\Delta\tilde{\mathrm{S}}_n$$

On peut caractériser les marchés arbitrés complets :

Théorème 2

Un marché viable est complet si, et seulement s'il existe une seule probabilité P^* équivalente à P pour laquelle les prix actualisés sont des martingales.

Ainsi lorsque le marché est viable et complet, on peut valoriser toutes les v.a. $\mathcal{F}_N$-mesurables. On doit calculer :

$$E_{P^*}\left(\frac{X}{S_N^0}\right) = V_0(\phi)$$

Plus généralement, en remarquant que $\tilde{\mathrm{V}}_n(\phi)$ est une P^* martingale, on a :

$$V_n(\phi) = S_n^0\, E_{P^*}\left(\frac{X}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

On appelle $V_n(\phi)$ le prix de X à l'instant n. Il est intéressant de remarquer que les calculs ne dépendent que de P^* (et pas de P).

En particulier si l'on veut valoriser un call de maturité N sur l'actif S^1 et si l'actif 0 est sans risque de rendement r, la valeur du call à l'instant n est :

$$C_n(\phi) = (1+r)^n\ E_{P^*}\left(\frac{\left(S_N^1 - K\right)^+}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

La valeur d'un put à l'instant n est :

$$P_n(\phi) = (1+r)^n\ E_{P^*}\left(\frac{\left(K - S_N^1\right)^+}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

3 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

On a vu dans la section précédente comment on peut en théorie calculer le prix équitable d'une option, sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude du marché. On va maintenant appliquer ces résultats à un modèle particulier à deux actifs. Ensuite on va voir comment on peut approcher la formule de Black-Scholes.

3.1 Le modèle binomial

Ce modèle, développé par Cox, Ross et Rubinstein, comporte deux actifs :

1. un actif sans risque dont le rendement r ne dépend ni de la période ni de l'état du monde,
2. une action dont le rendement entre la date n et $n+1$ peut être soit h, soit b avec $b < 1+r < h$.

Il généralise à un plus grand nombre de périodes le modèle développé dans la première partie.

A la date 0, l'action vaut S. A la date 1, l'action peut valoir Sh ou Sb, à la date 2, Sh^2, Shb ou Sb^2. Le prix de l'action à la date n S_n ne dépend que du nombre de montées entre la date 0 et la date n et peut valoir $Sh^n, Sh^{n-1}b, \ldots, Sb^n$.

Commençons par remarquer que l'hypothèse $b \leq 1+r \leq h$ correspond à une absence d'opportunité d'arbitrage. En effet si $1+r < b$, à la date 0 on emprunte S francs au taux r et on achète l'action au prix S. A la date 1, on rembourse l'emprunt, i.e. on rend $(1+r)\,S$ francs, et on revend l'action au prix Sb. On a réalisé un gain égal à $Sb-(1+r)\,S$ francs. Le même raisonnement conduit à une opportunité d'arbitrage si $h < 1+r$.

Sous l'hypothèse $b \leq 1+r \leq h$, s'il y a effectivement A.O.A., on doit trouver une probabilité π sous laquelle le prix actualisé de l'action est une martingale. Si on ne considère que les instants 0 et 1, sachant que l'on a un modèle binomial (probabilités équivalentes), on obtient : $E_{P^*}(S_1) = \pi Sh + (1-\pi)\,Sb = (1+r)\,S$, soit :

$$\pi = \frac{1}{h-b}\left\{1+r-b\right\}.$$

On a : $\pi \in [0,1]$. Donc l'hypothèse de départ $b < 1+r < h$ correspond au fait que : $\pi \in]0,1[$. Enfin cette probabilité P^* est manifestement unique. Donc le marché considéré est viable et complet. On peut donc calculer le prix équitable d'une option (de vente ou d'achat) sur l'action.

Comme le prix de l'action à la date n ne dépend que du nombre de montées entre la date 0 et n, sous la probabilité π, S_n est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et π :

$$P^*\left(S_n = h^j b^{n-j} S\right) = \tbinom{n}{j}\pi^j(1-\pi)^{n-j}$$

Donc le prix du call européen de maturité n vaut :

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} E_{P^*}(S_n-K)^+$$

d'où :

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} \left(h^j b^{n-j} S - K\right)^+$$

De même, le prix du put européen :

$$P = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} \left(K - h^j b^{n-j} S\right)^+$$

3.2 Passage à la limite, formule de Black-Scholes

Le but est d'approcher dans la formule donnant C un modèle à temps continu. L'idée de ce paragraphe est de travailler sur l'intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$, de le diviser en n périodes de longueur $\frac{T}{n}$, d'étudier sur ces n périodes le modèle binomial précédent, puis de faire tendre n vers l'infini, en laissant T fixé.

On va d'abord réécrire la formule du prix C. Soit :

$$\eta = \inf\left(j \in \mathbb{N} \mid h^j b^{n-j} S - K > 0\right)$$

En termes de finance, η est le nombre minimum de hausses qui doivent se produire durant les n périodes pour réaliser un bénéfice strictement positif. Si Int désigne la partie entière d'un réel, on a :

$$\eta = \mathrm{Int}\left(\frac{\ln(K/Sb^n)}{\ln(h/b)}\right) + 1$$

On adopte les notations suivantes : $b(n, j; \pi) = \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j}$ (probabilité pour qu'une variable binomiale de paramètres n et π prenne la valeur j), et :

$$B(n, \eta; \pi) = \sum_{j=\eta}^{n} b(n, j; \pi)$$

En utilisant la définition de π et l'égalité $1 - \frac{\pi h}{1+r} = \frac{b - b\pi}{1+r}$, on obtient pour C les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=\eta}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} \left(h^j b^{n-j} S - K\right) \\
&= S \sum_{j=\eta}^{n} nj \left(\frac{\pi h}{1+r}\right)^j \left(\frac{b - b\pi}{1+r}\right)^{n-j} - \frac{K}{(1+r)^n} B(n, \eta; \pi) \\
&= SB\left(n, \eta; \frac{\pi h}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^n} B(n, \eta; \pi)
\end{aligned}$$

Les coefficients h, b, r et π qui interviennent dans la formule précédente ne dépendent pas de la période sur laquelle on se place, mais ils dépendent de la durée de la période. Ici la durée de chaque période est $\frac{T}{n}$. Les coefficients vont donc dépendre de n. On va les noter h_n, b_n, r_n, π_n.

Si on veut approcher le modèle en temps continu, on doit imposer l'égalité des rendements exprimés en temps continu et en temps discret après passage à la limite, soit :

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r_n)^n = e^{\rho T}$$

Reste à choisir b_n et h_n. Soit S_n le prix de l'actif après n périodes calculé dans un modèle binomial. Si j désigne le nombre de hausses, ce prix est $S_n(j) = Sh_n^j b_n^{n-j}$, ce qui s'écrit $\ln \frac{S_n}{S} = J \ln \frac{h_n}{b_n} + n \ln b_n$, où J est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p_n, où p_n désigne la probabilité d'être à la hausse (qu'on suppose indépendante de la période). On a en particulier $E(J) = np_n$ et $Var(J) = np_n(1 - p_n)$. On note $n\mu_n$ l'espérance de $ln\frac{S_n}{S}$ et $n\sigma_n^2$ sa variance.

Soit S_T le prix de l'actif au temps T. On va imposer au modèle discrétisé de donner un prix S_n approchant S_T au sens suivant : la moyenne $E\left(\ln \frac{S_T}{S}\right)$ du logarithme du rendement de l'actif est approchée par l'espérance de $\ln\left(\frac{S_n}{S}\right)$. De même on va imposer une condition analogue sur les variances. On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} n\mu_n & = & n\left(p_n \ln \frac{h_n}{b_n} + \ln b_n\right) \\ n\sigma_n^2 & = & np_n(1 - p_n)\left(\ln \frac{h_n}{b_n}\right)^2 \end{array} \right.$$

Pour simplifier on prend $p_n = 1/2$. Le prix de l'option ne dépend pas de la valeur de cette probabilité. On va donc imposer que $n\mu_n$ converge vers μT et $n\sigma_n^2$ converge vers $\sigma^2 T$, où μ et σ^2 représentent l'espérance et la variance "instantanées" du rendement de l'actif. Pour réaliser cela, on peut prendre :

$$h_n = e^{\mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

$$b_n = e^{\mu\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

Il s'agirait maintenant d'étudier le comportement de

$$SB\left(n, \eta_n; \frac{\pi_n h_n}{1 + r_n}\right) - \frac{K}{(1 + r_n)^n} B(n, \eta_n; \pi_n)$$

avec :

$$\begin{array}{lcl} \eta_n & = & \mathrm{Int}\left(\frac{\ln(K/Sb_n^n)}{\ln(h_n/b_n)}\right) + 1 \\ \pi_n & = & \frac{1 + r_n - b_n}{h_n - b_n} \end{array}$$

Donnons le résultat sous forme de théorème :

Théorème 3

Quand $n \to +\infty$, C converge vers

$$S\Phi(d) - Ke^{-\rho T}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right) \tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned} d &= \frac{\ln(S/K)+\rho T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de **Black** et **Scholes**. Nous verrons comment elle s'obtient dans le cadre du modèle à temps continu dans le paragraphe suivant. Une remarque importante est que cette formule ne dépend pas de μ.

4 Modèle continu de Black-Scholes

Le but de cette dernière partie est de présenter une autre méthode pour obtenir la formule de Black et Scholes. On va d'abord rappeler quelques résultats de calcul stochastique. Ensuite on va revenir sur l'hypothèse d'A.O.A. et on verra qu'on perd léquivalence du paragraphe 1.3. Enfin on terminera par la formule de Black et Scholes.

4.1 Calcul stochastique

Définition 11

On appelle ***processus stochastique à temps continu*** *et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$, une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$.*

Remarque 2 *Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω dans Ω on associe la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans E, $t\mapsto X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.*

Définition 12

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité. Une ***filtration*** *$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$.*

La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est **adapté** à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Un exemple très important de processus stochastique est le mouvement brownien, qui sert de base pour le modèle de Black et Scholes.

Définition 13

On appelle ***$\mathcal{F}_t$-mouvement brownien*** *un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

- *pour tout $t\geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- *Continuité : P-p.s. la fonction $s\mapsto X_s(\omega)$ est une fonction continue.*
- *Indépendance des accroissements : si $s\leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*
- *Stationnarité des accroissements : si $s\leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.*

$X_t - X_0$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne rt et de variance $\sigma^2 t$ avec r et σ des constantes réelles. Un mouvement brownien est dit *standard* si :

$$X_0 = 0 \text{ , } P\text{-p.s. } E(X_t) = 0 \text{ et } E\left(X_t^2\right) = 1$$

Dans la suite quand on parlera de mouvement brownien, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Dans le cas des modèles à temps discret, la valeur actualisée d'un portefeuille de valeur initiale et avec une stratégie autofinancée $\phi = (\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ s'écrit :

$$V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \left(\tilde{\mathrm{S}}_j - \tilde{\mathrm{S}}_{j-1}\right)$$

Cette valeur est une transformée de martingale sous une probabilité pour laquelle le prix de l'actif actualisée $\left(\tilde{\mathrm{S}}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale. Dans le cas des modèles à temps continu, nous allons généraliser cette formule à l'aide d'intégrales du type $\int_0^t \phi_s d\tilde{\mathrm{S}}_s$.

Cependant les modèles utilisés pour décrire l'actif sont obtenus à partir du mouvement brownien. Or une des propriétés importantes du mouvement brownien est que presque sûrement ses trajectoires ne sont pas à variations finies. Donc on ne peut pas définir l'intégrale précédente comme une intégrale de Stieltjes. On peut cependant donner un sens à ce type d'intégrales par rapport au mouvement brownien.

On ne va pas faire ici la construction de l'intégrale stochastique. Rappelons simplement le résultat. On fixe T un réel strictement positif. On définit :

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ , processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ , } E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty \right\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ , processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ , } \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \text{ P-p.s.} \right\}$$

Théorème 4

Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-brownien. Alors il existe une unique application linéaire* J *de* $\mathcal{H}$ *dans l'espace des* $\mathcal{F}_t$*-martingales continues définies sur* $[0, T]$*, telle que,* $H \in \mathcal{H}$ *et si* $t \leq T$ *:*

$$E\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$$

On note si $H \in \mathcal{H}$*,* $J(H)_t = \int_0^t H_s dW_s$*.*

Par contre si $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est encore défini et est un processus continu défini sur $[0, T]$. Mais ce n'est pas a priori une martingale.

On va terminer ce paragraphe par la **formule d'Itô**. On a besoin d'abord de la définition suivante :

Définition 14

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P\right)$ *un espace probabilisé muni d'une filtration et* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien. On appelle* ***processus d'Itô****, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$P\text{-}p.s. \quad \forall t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

avec :
- X_0 $\mathcal{F}_0$*-mesurable*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *des processus adaptés à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$
- $\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$ P*-p.s.*
- $\int_0^T |H_s|^2\, ds < +\infty$ P*-p.s.*

On peut démontrer l'unicité de cette décomposition. La formule d'Itô est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô et* f *une fonction deux fois continûment différentiable. On a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

où par définition :

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s)\, K_s ds + \int_0^t f'(X_s)\, H_s dW_s$$

Traitons un exemple élémentaire. Si $f(x) = x^2$ et $X_t = W_t$, on a :

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

Une application de la formule d'Itô est la “formule d'intégration par parties” :

Proposition 3 *Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô,* $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ *et* $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$*. Alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

avec :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r. Noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets. On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t \left(\mu dt - \sigma dB_t\right)$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier. En utilisant la formule d'Itô, l'équation précédente se résout explicitement :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.

Une stratégie sera définie par un processus $\phi = (\phi)_{0 \leq t \leq T} = ((H_t^0, H_t))$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration du mouvement brownien, les composantes H_t^0 et H_t de ϕ_t donnant à l'instant t les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$V_t\left(\phi\right) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

On transpose l'égalité d'autofinancement (1) à temps continu pour avoir la condition suivante :

$$dV_t\left(\phi\right) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$$

Pour que cela ait un sens, on impose :

$$\int_0^T \left|H_t^0\right| dt < +\infty \quad \text{p.s. et} \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \quad \text{p.s.}$$

On note $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ et l'analogue de la proposition (1) est :

Proposition 4 *Soit $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\int_0^T |H_t^0| + H_t^2 dt < +\infty p.s.$ On pose : $V_t\left(\phi\right) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ et $\tilde{V}_t\left(\phi\right) = e^{-rt} V_t\left(\phi\right)$. Alors ϕ définit une stratégie autofinancée si et seulement si :*

$$\tilde{V}_t\left(\phi\right) = V_0\left(\phi\right) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u p.s. \tag{3}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Pour un modèle discret on a vu qu'on avait équivalence entre l'hypothèse d'A.O.A. et l'hypothèse (H) : il existe une probabilité Q équivalente à P, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales (théorème (1)). Dans le cas continu ce théorème n'est plus valable. En toute généralité (H) n'implique pas A.O.A. Par contre sous (H) il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage minorée, i.e. telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t\, V_t(\phi) \geq c$. La probabilité Q est appelée comme avant, "probabilité risque-neutre". Le problème inverse (A.O.A. implique H) reste une question ouverte.

Sous l'hypothèse A.O.A. le prix d'arbitrage est bien défini, c'est-à-dire, si θ et φ sont deux stratégies autofinançantes telles que $\theta_T S_T = \varphi_T S_T$, alors $\theta_0 S_0 = \varphi_0 S_0$. L'intérêt du modèle de Black et Scholes est que l'hypothèse (H) est vérifiée. En effet en appliquant la formule d'Itô, si $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t (\mu - r)\, dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\overline{B}_t \end{aligned}$$

où $\overline{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$. Si on arrive à trouver une probabilité Q sous laquelle $\overline{B}$ soit un mouvement brownien, alors $\left(\tilde{S}_t\right)$ est une martingale sous Q et :

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma \overline{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$$

Le théorème de Girsanov-Cameron-Martin permet d'affirmer que si on pose

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds\right)$$

$(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale, et si Q est la mesure sur $\mathcal{F}_T$ de densité L_T par rapport à P, sous Q $\overline{B}$ est un mouvement brownien.

Pour terminer, si on note $\xi = (S_T - K)^+$, sous Q $\tilde{S}$ est une martingale, donc pour une stratégie autofinancée ϕ, $\tilde{V}(\phi)$ est aussi une martingale, d'après l'égalité (3). Donc on a pour $V(\phi)$ dupliquant ξ (cf. la définition (9) en remplaçant N par T) :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(\phi) &= E_Q\left[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= E_Q\left[e^{-rT}\xi \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E_Q[\xi \mid \mathcal{F}_t] \\ V_0 &= e^{-rT} E_Q[\xi] \\ &= E_Q\left[\left(\tilde{S}_T - e^{-rT}K\right)^+\right] \\ &= E_Q\left[\left(S_0 \exp\left(\sigma \overline{B}_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right) - e^{-rT}K\right)^+\right] \end{aligned}$$

Par définition d'un mouvement brownien, sous Q $\overline{B}_T$ suit une loi normale de paramètres 0 et T, ce qui permet de calculer l'espérance précédente, et de trouver la formule de Black-Scholes (2) :

$$V_0 = S_0 \Phi\left(d\right) - K e^{-rT} \Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} d &= \frac{\ln\left(S/K\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\ \Phi\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

Soulignons une nouvelle fois, que le coefficient μ n'apparait pas dans la formule.