Essentialité dans les bases additives

Bruno DESCHAMPS — Bakir FARHI

Université du Maine

Résumé.— Dans cet article nous étudions la notion de partie essentielle d'une base additive, c'est-à-dire de parties finies minimales P d'une base A donnée telles que $A - P$ ne soit plus une base. L'existence de parties essentielles pour une base équivaut à ce que cette base soit incluse, à partir d'un certain rang, dans une progression arithmétique non triviale. Nous montrons que pour toute base A il existe une progression arithmétique de plus grande raison qui contient, à partir d'un certain rang, la base A. Possédant cette plus grande raison a, on peut alors majorer le nombre de parties essentielles de A (qui est donc toujours fini) par la longueur du radical de a (i.e. le nombre de nombre premiers divisant a).
Dans le cas des parties essentielles de cardinal 1 (éléments essentiels) nous introduisons une méthode pour "dessentialiser" une base. En application de ces considérations nous raffinons et complétons de manière définitive le résultat de Deschamps et Grekos sur la majoration du nombre d'éléments essentiels dans une base en fonction de l'ordre : nous montrons que pour toute base A d'ordre h, le nombre s d'éléments essentiels de A vérifie $s \leq c\sqrt{\frac{h}{\log h}}$ avec $c = 30\sqrt{\frac{\log 1564}{1564}} \simeq 2,05728$ et que cette inégalité est optimale.

Abstract.— In this article we study the notion of essential subset of an additive basis, that is to say the minimal finite subsets P of a basis A such that $A - P$ doesn't remains a basis. The existence of an essential subset for a basis is equivalent for this basis to be included, for almost all elements, in an arithmetic non-trivial progression. We show that for every basis A there exists an arithmetic progression with a biggest common difference containing A. Having this common difference a we are able to give an upper bound to the number of essential subsets of A : this is the radical's length of a (in particular there is always many finite essential subsets in a basis).
In the case of essential subsets of cardinality 1 (essential elements) we introduce a way to "dessentialize" a basis. As an application, we definitively complete the result of Deschamps and Grekos about the majoration of essential elements of a basis by showing that for all basis A of order h, the number s of essential elements of A satisfy $s \leq c\sqrt{\frac{h}{\log h}}$ where $c = 30\sqrt{\frac{\log 1564}{1564}} \simeq 2,05728$, and we show that this inequality is best possible.

1.— Introduction et notations.

Dans ce texte, on notera

• $\sharp E$ le cardinal d'un ensemble E,

• $A - B$ (pour deux ensembles A, B) l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B,

• $a.X + b$ ($a, b \in \mathbb{N}$ et $X \subset \mathbb{N}$) l'ensemble d'entiers $\{ax + b/\ x \in X\}$,

• hA ($h \in \mathbb{N}^*$ et $A \subset \mathbb{N}$) l'ensemble d'entiers $\{a_1 + \cdots + a_h/\ a_1, \cdots, a_h \in A\}$,

• $E \sim F$ (pour E, F deux parties de $\mathbb{N}$) pour dire que la différence symétrique de E et de F est finie, ce qui revient à dire qu'il existe un entier n_0 tel que $E \cap [n_0, +\infty[= F \cap [n_0, +\infty[$,

[0]2000 Mathematics Subject Classification : Primary 11P99 Secondary 11A99, 11P32

• ord(A) l'ordre d'une base A (on rappelle qu'une base additive, ou base ou encore ensemble de base, est une partie A de $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un entier $h \geq 1$ vérifiant $hA \sim \mathbb{N}$. Le plus petit entier h pour cette propriété est alors l'ordre de la base),

• $(p_n)_n$ la suite des nombres premiers énumérés par ordre croissant,

• $a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n$ $(a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^*)$ l'entier $\dfrac{a_1 \cdots a_n}{a_i}$.

• $E[x]$ $(x \in \mathbb{R})$ la partie entière du réel x.

Dans une base additive tous les éléments n'ont pas la même importance en terme de basicité. Par exemple, dans la base $A = 2\mathbb{N} \cup \{1\}$ on voit que 1 joue un rôle prépondérant : si l'on retire 1 à A on ne dispose plus d'une base (c'est d'ailleurs dans cet exemple le seul élément qui ait cette propriété). De manière plus générale dans une base A il peut y avoir des parties qui sont essentielles à la basicité, c'est-à-dire des parties $P \subset A$ telles que $A - P$ ne soit plus une base. Si P est une telle partie et que $P \subset P'$, on voit que P' est aussi essentielle. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition.— *Soit A une base additive. On appelle* essentialité *de A toute partie $P \subset A$ telle que $A - P$ ne soit pas une base et telle que P soit minimal au sens de l'inclusion pour cette propriété.*

Une essentialité de cardinal fini sera appelée partie essentielle *de A. Un élément $a \in A$ tel que $P = \{a\}$ soit une partie essentielle sera appelé* élément essentiel *de A.*

Si l'on considère la base $A = \mathbb{N}$ et si l'on prend un nombre premier p on voit que la partie $A_p = \mathbb{N} - p\mathbb{N}$ est une essentialité de A. On voit donc qu'il existe des bases additives possédant une infinité d'essentialités. Dans le cas des éléments essentiels, une telle chose ne peut pas se produire : Grekos a montré que l'ensemble des éléments essentiels d'une base était un ensemble fini (voir [Gr]). Dans [DG] Deschamps et Grekos montrent que ce nombre est toujours majoré par $5,7\sqrt{\frac{h}{\log h}}$ où h désigne l'ordre de la base et que cette majoration en $O\left(\sqrt{\frac{h}{\log h}}\right)$ est la meilleure possible. Ce résultat est donc optimum, à la constante près. Dans cet article nous donnons la meilleure constante possible pour cette estimation : nous montrons (théorème 6) que pour toute base additive A d'ordre h, le nombre s d'éléments essentiels de A vérifie $s \leq c\sqrt{\frac{h}{\log h}}$ avec $c = 30\sqrt{\frac{\log 1564}{1564}} \simeq 2,05728$ et qu'il existe une base additive pour laquelle cette majoration est une égalité. Ceci complète de manière définitive l'étude globale de la majoration de s en fonction de h.

L'étude des parties essentielles d'une base est un prolongement naturelle de celle des éléments essentiels. Nous montrons dans cet article (Théorème 10) que, comme pour les éléments essentiels, le nombre de parties essentielles d'une base est fini. Toutefois, et au contraire du cas des éléments essentiels, le nombre de parties essentielles n'est pas majorable par une fonction de l'ordre de la base. Par exemple, la base additive $X_n = p_1 \cdots p_n.\mathbb{N} \cup \{1, 2, \cdots, p_1 \cdots p_n\}$ est une base d'ordre 2 qui possède n parties essentielles (qui sont les parties $P_k = \{1 \leq i \leq p_1 \cdots p_n / \ p_k \not| \, i\}$). Il faut donc, pour controler le nombre de parties essentielles, trouver d'autres invariants susceptibles de donner cette information.

En fait l'existence de parties essentielles dans une base additive est à relier à la propriété pour cette base d'être incluse, à partir d'un certain rang, dans une progression arithmétique non triviale (Proposition 7). Dans cet article nous prouvons que pour toute base additive A il existe un plus grand entier a tel que A soit incluse, à partir d'un certain rang, dans une progression arithmétique de raison a

(Théorème 8). Ce résultat permet d'introduire trois invariants fondamentaux pour une base additive A : le plus grand entier a donné par le théorème, appelé *raison* de la base A, une partie $B \subset \mathbb{N}$ et une partie finie $E \subset \mathbb{N}$ appelées respectivement *la dessentialisée* et *le réservoir* de A : les ensembles B et E sont les uniques ensembles tels que $A = (a.B + b) \cup E$ ($b \in \{0, \cdots, a-1\}$) et tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \not\equiv b \bmod(a)$.

L'ensemble B est alors une base sans partie essentielle qui est unique (à translation près et modulo la relation $\sim$) pour cette propriété (Proposition 9). Ces invariants sont les plus pertinents pour l'étude des parties essentielles. En effet, nous montrons qu'étant donnée une base A de raison a et de réservoir E, le nombre de parties essentielles de A est majoré par la longueur du radical de a (i.e. le nombre de nombres premiers divisant a) et que toute partie essentielle de A est incluse dans E (Théorème 10). En fin de texte, un exemple vient montrer que la majoration du nombre de parties essentielles d'une base par la longueur du radical de sa raison est la meilleure possible.

Ce texte débute par un paragraphe qui présente un moyen de dessentialiser élémentairement une base, c'est-à-dire d'associer de manière naturelle à une base une autre base sans élément essentiel. Il s'agit en quelque sorte de l'analogue de la dessentialisée pour le cas des éléments essentiels. Outre le fait de présenter un algorithme de dessentialisation, ce paragraphe permet d'introduire des outils et des résultats qui seront utiles pour les autres parties du texte. Ils permettent aussi de raffiner des estimations sur l'ordre de certaines bases (Théorème 3), en particulier ils permettent d'obtenir la constante optimale pour le théorème de Deschamps-Grekos.

2.— Eléments essentiels dans une base additive

Le point de départ pour l'étude des éléments essentiels, et plus tard des parties essentielles, est une idée de Erdos et Graham (voir [EG]) exploitée dans l'article [DG] sous la forme de ce lemme :

Lemme 1.— *Soient A une base additive et $a \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) $A - \{a\}$ *est une base additive,*

ii) $\mathrm{pgcd}\{b - b' /\ b, b' \in A - \{a\}\} = 1$.

L'étude des pgcd des différences d'éléments de certaines sous-parties d'une base va être un outil important dans ce qui va suivre.

2.1.— Bases associées à une base additive et dessentialisation élémentaire.

Supposons donnés une base additive A et $\mathrm{Ess}(A) = \{x_1, \cdots, x_s\}$ ($s \in \mathbb{N}$) l'ensemble de ses éléments essentiels. On appelle *diviseur associé* à l'élément essentiel x_i, l'entier positif :

$$d_i = \mathrm{pgcd}\,\{x - y/\ x, y \in A - \{x_i\}\}$$

que l'on sait être ≥ 2 d'après le lemme 1. Par ailleurs, on sait (voir [DG, lemme 4]) que les entiers $d_1, \cdots, d_s$ sont premiers entre eux deux à deux. Une fois donnés les entiers d_i, on pose

$$q(A) = d_1 \cdots d_s$$

(en convenant que $q(A) = 1$ lorsque A est une base sans élément essentiel) et

$$m(A) = \mathrm{pgcd}\,\{x - y/\ x, y \in A - \mathrm{Ess}(A)\}$$

Nous appelerons l'entier $m(A)$, le *module* de la base A (en particulier $m(A)=1$ lorsque A est sans élément essentiel). Comme $m(A)$ est clairement multiple de chacun des entiers d_i et que ces derniers sont premiers entre eux deux à deux, l'entier $m(A)$ est donc multiple de $q(A)$. Il est à noter que, de manière générale, $m(A)$ est différent de $q(A)$.

Soit x_0 le plus petit élément non essentiel de A. On appelle *ensemble primitif* de A, le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ noté $P(A)$ et défini par :

$$P(A)=\left\{\frac{x-x_0}{m(A)} / \ x\in A-\mathrm{Ess}(A)\right\}$$

et on appelle *ensemble élémentaire* associé à A, le sous-ensemble de $\mathbb{N}$, noté $D(A)$ et défini par :

$$D(A)=(m(A).\mathbb{N}+x_0)\cup \mathrm{Ess}(A)$$

Les ensembles $D(A)$ et $P(A)$ sont en fait des bases additives dont on peut estimer l'ordre :

Proposition 2.— *Soient A une base additive, $P(A)$ l'ensemble primitif de A et $D(A)$ l'ensemble élémentaire associé à A. Les ensembles $P(A)$ et $D(A)$ sont des bases additives et on a :*

$$\mathrm{ord}(D(A))\leq \mathrm{ord}(A)\leq \mathrm{ord}(P(A))+\mathrm{ord}(D(A))-1$$

Preuve : Comme $D(A)$ contient A il est clair que $D(A)$ est une base. Notons h l'ordre de A et montrons que $P(A)$ est une base additive. Commençons par montrer que $P(A)\cup\{1\}$ est une base additive :

Soit z un entier positif assez grand pour que $m(A).z\in hA$. Nous allons établir l'existence d'un entier $h^{'}\in\mathbb{N}^*$, dépendant de A mais pas de z, tel que z soit une somme de $h^{'}$ éléments de $P(A)\cup\{1\}$. Par hypothèse, on peut écrire :

$$m(A).z=a_1x_1+\cdots+a_sx_s+y_1+\cdots+y_\ell$$

avec $a_1,\cdots,a_s$ et ℓ des entiers naturels vérifiant $a_1+\cdots+a_s+\ell=h$ et $y_1,\cdots,y_\ell$ des éléments de $A-\{x_1,\cdots,x_s\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} z &= \frac{a_1x_1+\cdots+a_sx_s+y_1+\cdots+y_\ell}{m(A)} \\ &= \frac{y_1-x_0}{m(A)}+\cdots+\frac{y_\ell-x_0}{m(A)}+\frac{a_1x_1+\cdots+a_sx_s+\ell x_0}{m(A)} \end{aligned}$$

Or, les $z_1=\dfrac{y_1-x_0}{m(A)},\cdots,z_\ell=\dfrac{y_\ell-x_0}{m(A)}$ sont dans $P(A)$, ce qui implique que le réel

$$u=\frac{a_1x_1+\cdots+a_sx_s+\ell x_0}{m(A)}$$

est un entier naturel. Par ailleurs, on a

$$u\leq \frac{h}{m(A)}\max\{x_0,x_1,\cdots,x_s\}$$

car $a_1+\cdots+a_s+\ell=h$. L'égalité $z=z_1+\cdots+z_\ell+u$ est donc une écriture de l'entier z comme somme de $E\left[h+\frac{h}{m(A)}\max\{x_0,x_1,\cdots,x_s\}\right]$ éléments de $P(A)\cup\{1\}$ (car $\ell\leq h$ et $0\in P(A)$). Ainsi, $P(A)\cup\{1\}$ est une base additive.

Si $1 \in P(A)$ alors $P(A)$ est bien une base. Si, maintenant, $1 \notin P(A)$, alors par définition même du module $m(A)$ on a

$$\operatorname{pgcd}\{a-b/\ a,b \in P(A)\} = 1$$

le lemme 1 assure alors que $P(A) = (P(A) \cup \{1\}) - \{1\}$ est une base.

Montrons maintenant les encadrements annoncés. On note H l'ordre de $P(A)$ et μ l'ordre de $D(A)$.

• Le fait que $\operatorname{ord}(A) \geq \operatorname{ord}(D(A))$ provient de l'inclusion $A \subset D(A)$.

• Montrons maintenant que $\operatorname{ord}(A) \leq \operatorname{ord}(P(A)) + \operatorname{ord}(D(A)) - 1$. Pour ce faire, nous choisissons un entier N_1 assez grand de façon à ce que :

•$N_1 > 2(H+\mu-1)\max\{x_0, x_1, \cdots, x_s\}$
•$N_1 - (H-1)x_0$ s'exprime comme une somme de μ éléments de $D(A)$
•tout entier $n > \frac{N_1}{2m(A)}$ s'exprime comme une somme de H éléments de $P(A)$

Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, t, k_1, \cdots, k_t$ des entiers naturels tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s + t = \mu$ et tels que

$$N_1 - (H-1)x_0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (k_1 m(A) + x_0) + \cdots + (k_t m(A) + x_0) \quad (1)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
(k_1 + \cdots + k_t)m(A) &= N_1 - (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (t+H-1)x_0) \\
&\geq N_1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_s + t + H - 1)\max\{x_0, \cdots, x_s\} \\
&= N_1 - (H+\mu-1)\max\{x_0, \cdots, x_s\} > \frac{N_1}{2}
\end{aligned}$$

car $N_1 > 2(H+\mu-1)\max\{x_0, \cdots, x_s\}$. Ainsi, on a :

$$k_1 + \cdots + k_t \ > \ \frac{N_1}{2m(A)}$$

On en déduit que $t \geq 1$ et que le nombre $(k_1 + \cdots + k_t)$ est une somme de H éléments de $P(A)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$k_1 + \cdots + k_t = \frac{y_1 - x_0}{m(A)} + \cdots + \frac{y_H - x_0}{m(A)}$$

pour certains éléments $y_1, \cdots, y_H$ de $A - \{x_1, \cdots, x_s\}$. Par suite, la relation (**??**) donne

$$\begin{aligned}
N_1 &= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (t+H-1)x_0 + (k_1 + \cdots + k_t)m(A) \\
&= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (t+H-1)x_0 + y_1 + \cdots + y_H - Hx_0 \\
&= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (t-1)x_0 + y_1 + \cdots + y_H
\end{aligned}$$

et montre que N_1 est une somme de $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s + t - 1 + H = H + \mu - 1$ éléments de A et donc,

$$\operatorname{ord}(A) \ \leq \ H + \mu - 1 = \operatorname{ord}(P(A)) + \operatorname{ord}(D(A)) - 1$$

On peut aussi encadrer l'ordre de $D(A)$ en fonction de la base A :

Théorème 3.— *Soient A une base additive, $x_1, \cdots, x_s$ ses éléments essentiels, $d_1, \cdots, d_s$ les diviseurs associés à $x_1, \cdots, x_s$, $m(A)$ le module de A et $q(A) = d_1 \cdots d_s$. On a*

$$\sum_{i=1}^{s} d_i - s + 1 \leq \operatorname{ord}(D(A)) \leq \frac{m(A)}{q(A)} \left(\sum_{i=1}^{s} d_i - s \sqrt[s]{\frac{q(A)}{m(A)}} \right) + 1$$

Preuve : Posons $\mu = \operatorname{ord}(D(A))$ et commençons par établir la minoration annoncée. Considérons un entier n assez grand tel que l'entier

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} (d_i - 1)(x_i - x_0) + \mu x_0 + nm(A)$$

vérifie $\omega > \mu \max\{x_1, \cdots, x_s\}$ et tel que que ω soit somme de μ éléments de $D(A)$. Il existe donc des entiers naturels $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, k, n_1, \cdots, n_k$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s + k = \mu$ et que

$$\omega = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + (n_1 m(A) + x_0) + \cdots + (n_k m(A) + x_0) \tag{2}$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{s} (d_i - 1)(x_i - x_0) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i (x_i - x_0) + (n_1 + \cdots + n_k - n) m(A)$$

Pour $i \in \{1, \cdots, s\}$ fixé, en prenant les classes modulo d_i des deux membres de cette dernière équation, on obtient :

$$(d_i - 1)(x_i - x_0) \equiv \alpha_i (x_i - x_0) \bmod(d_i)$$

($x_j - x_0 \equiv 0 \bmod(d_i)$ pour tout $j \neq i$ et $d_i | m(A)$).

Maintenant $(x_i - x_0)$ est premier avec d_i. En effet, considérons un diviseur d commun à $x_i - x_0$ et d_i. La définition même de d_i entraîne que d divise $x - x_0$ pour tout $x \in A - \{x_i\}$ et comme d divise aussi $x_i - x_0$, alors d divise tous les entiers $x - x_0$ pour x parcourant A. Donc les éléments de $A - x_0$ sont tous multiple de d, mais comme $A - x_0$ est une base (puisque A en est une et que la basicité est conservée par translation) cela implique $d = 1$.

On en déduit donc que $\alpha_i \equiv (d_i - 1) \bmod(d_i)$ et comme α_i est positif, on a alors

$$\alpha_i \geq d_i - 1 \tag{3}$$

(et ceci étant valable pour tout $1 \leq i \leq s$).

Par hypothèse $\omega - (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s) > 0$ et donc $k \geq 1$. L'ordre μ de $D(A)$ est donc minoré par :

$$\mu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + k \geq \sum_{i=1}^{s} (d_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{s} d_i - s + 1$$

Montrons maintenant la majoration. Remarquons préliminairement que

$$\operatorname{pgcd}\{m(A), x_1 - x_0, \cdots, x_s - x_0\} = 1$$

En effet, si $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur commun des entiers $x_i - x_0$ ($1 \leq i \leq s$) et $m(A)$ alors d divise tout les entiers $x - x_0$ avec $x \in A$, car si $x \in A - \operatorname{Ess}(A)$, comme

$x_0 \in A - \mathrm{Ess}(A)$, le module $m(A)$ de A divise $x - x_0$ et donc a fortiori d divise $x - x_0$. Ainsi, tout élément de l'ensemble $A - x_0$ est multiple de d. Mais comme $A - x_0$ est une base additive, on a obligatoirement $d = 1$.

Soit $m(A) = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de $m(A)$. On note Ω l'ensemble des diviseurs premiers de $m(A)$, c'est-à-dire $\Omega = \{q_1, \cdots, q_k\}$ et Ω_i $(1 \leq i \leq s)$ l'ensemble des diviseurs premiers de $x_i - x_0$. L'égalité $\mathrm{pgcd}\{m(A), x_1 - x_0, \cdots, x_s - x_0\} = 1$ s'écrit en termes ensemblistes $\Omega \cap \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s = \emptyset$ ou encore

$$\Omega \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s) = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_s)$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers et $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(W)$ désigne le complémentaire dans $\mathcal{P}$ d'une partie $W \subset \mathcal{P}$. Ainsi, on a $\Omega = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_s$ avec

$$\Gamma_1 = (\Omega \cap \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_1)),\ \Gamma_i = (\Omega \cap \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_i)) - \bigcup_{j=1}^{i-1} (\Omega \cap \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Omega_j))$$

pour tout $2 \leq i \leq s$. Pour tout $i = 1, \cdots, s$, posons

$$t_i = \prod_{1 \leq r \leq k / q_r \in \Gamma_i} q_r^{\alpha_r}$$

Il est clair que les t_i sont des entiers strictement positifs, deux à deux premiers entre eux et qu'ils vérifient $m(A) = t_1 \cdots t_s$ et $\mathrm{pgcd}\{t_i, x_i - x_0\} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Montrons que d_i divise t_i pour tout $i = 1, \cdots, s$. Pour ce faire, nous remarquons que pour tout couple $(i,j) \in \{1, \cdots, s\}^2$, tel que $i \neq j$, on a $\mathrm{pgcd}(d_i, t_j) = 1$ (car $\mathrm{pgcd}\{t_j, x_j - x_0\} = 1$ et d_i divise $(x_j - x_0)$). Ceci entraîne que pour tout $1 \leq i \leq s$, l'entier d_i est premier avec le produit $t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s$, mais comme d_i divise $(t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s) t_i = m(A)$, on conclut par le lemme de Gauss que d_i divise t_i.

En résumé, on vient de trouver des entiers $t_1, \cdots, t_s$ tels que :

- $m(A) = t_1 \ldots t_s$
- $\mathrm{pgcd}\{t_i, t_j\} = 1$ pour tous $1 \leq i < j \leq s$
- $\mathrm{pgcd}\{t_i, x_i - x_0\} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq s$
- d_i divise t_i pour tout $1 \leq i \leq s$

Considérons alors l'entier

$$\lambda = \sum_{i=1}^{s} \frac{t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} (t_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} \frac{m(A)}{q(A)} \left(d_i - \frac{d_i}{t_i} \right) = \frac{m(A)}{q(A)} \left(\sum_{i=1}^{s} d_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{t_i} \right)$$

Comme la moyenne arithmétique de toute famille finie de réels positifs est supérieure ou égale à sa moyenne géométrique, on a :

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{t_i} \ \geq \ \left(\prod_{i=1}^{s} \frac{d_i}{t_i} \right)^{1/s} = \sqrt[s]{\frac{q(A)}{m(A)}}$$

Ceci permet de majorer λ de la manière suivante :

$$\lambda \leq \frac{m(A)}{q(A)} \left(\sum_{i=1}^{s} d_i - s \sqrt[s]{\frac{q(A)}{m(A)}} \right)$$

Nous allons montrer maintenant que tout entier positif assez grand N_2 est une somme d'un nombre $\leq (\lambda + 1)$ éléments de $D(A)$, ce qui prouvera la majoration annoncée dans le théorème. Soit donc $N_2 \geq (\lambda+1)\max\{x_0, x_1, \cdots, x_s\}$ un entier positif arbitraire et $N_3 = N_2 - (\lambda+1)x_0$.

Pour tout $1 \leq i \leq s$, notons n_i l'unique solution en n, dans $\mathbb{Z} \cap [0, t_i - 1]$, de la congruence

$$\left(\frac{x_i - x_0}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s\right) n \equiv N_3 \bmod(t_i)$$

(l'existence et l'unicité de n_i sont garanties par le fait que t_i est premier avec $\frac{x_i - x_0}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s$.)

L'entier $N_3 - \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{x_i - x_0}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s\right) n_i$ est ainsi multiple de tous les entiers strictement positifs $t_1, \cdots, t_s$. Comme ces derniers entiers sont deux à deux premiers entre eux, ce même entier est multiple de leur produit $t_1 \cdots t_s = m(A)$. Ceci entraîne que l'entier N_3 s'écrit sous la forme :

$$N_3 = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{x_i - x_0}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s\right) n_i + lm(A)$$

pour un certain $l \in \mathbb{Z}$. Ainsi, N_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{x_i - x_0}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s\right) n_i + lm(A) + (\lambda+1)x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} n_i\right) x_i + \left(\lambda - \sum_{i=1}^{s} \frac{t_1 \cdots \widehat{t_i} \cdots t_s}{d_1 \cdots \widehat{d_i} \cdots d_s} n_i\right).x_0 + (lm(A) + x_0) \end{aligned}$$

Le fait $N_2 \geq (\lambda+1)\max\{x_0, x_1, \cdots, x_s\}$ assure la positivité de l'entier l et montre par suite que N_2 est une somme de $(\lambda+1)$ éléments de $D(A)$.

Remarque : L'encadrement obtenu dans ce théorème est en fait optimum. En effet, on voit que l'encadrement devient une égalité dès que $q(A) = m(A)$ et ceci est le cas pour le choix de $A = A_n = p_1 \cdots p_n\mathbb{N} \cup \{p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_n,\ i = 1, \cdots, n\}$. Dans ce cas, on a en fait $A_n = D(A_n)$ et on en déduit donc que

$$\mathrm{ord} A_n = \sum_{i=1}^{n} p_i - n + 1$$

(Ce résultat figure déjà dans [DG] mais y était obtenu de manière *ad hoc*.)

Lorsque A est sans élément essentiel, il est égal à un translaté de son ensemble primitif $P(A)$. Moralement, l'ensemble primitif associé à une base A est la base obtenu en "retirant" les éléments essentiels de A. Pourtant, $P(A)$ peut présenter à son tour des éléments essentiels. On est donc amené à considérer, étant donné une base A, la suite de bases associées $(P^n(A))_n$ définie par

$$P^0(A) = A \text{ et } \forall n \geq 1,\ P^n(A) = P(P^{n-1}(A))$$

Il est remarquable que, de manière générale, le nombre s_n d'éléments essentiels de $P^n(A)$ ne définit pas forcément une suite décroissante (voir remarque après la preuve du théorème 4). Pourtant, la suite $(P^n(A))_n$ est bien stationnaire :

Théorème 4 .— *Soit A une base additive. Il existe un entier positif n tel que $P^n(A)$ soit sans élément essentiel.*

Preuve: Pour une base additive donnée A, on note ρ_A l'application :

$$\begin{array}{rcl} \rho_A : P(A) & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & m(A).y + x_A \end{array}$$

où x_A désigne le plus petit élément non essentiel de A. Il est clair que l'application ρ_A est injective et que son image est égale à $A - \mathrm{Ess}(A)$.

Supposons qu'il existe une base additive A pour laquelle $\mathrm{Ess}(P^n(A))$ soit non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$. Désignons par s_i $(i \in \mathbb{N})$ le cardinal de l'ensemble des éléments essentiels de $P^i(A)$. Ces entiers s_i sont donc tous strictement positifs. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \rho_{P^n(A)}$ et considérons la suite infinie d'applications

$$\cdots \longrightarrow P^{n+1}(A) \xrightarrow{\rho_n} P^n(A) \xrightarrow{\rho_{n-1}} P^{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P(A) \xrightarrow{\rho_0} A$$

ainsi que l'application composée f_n

$$f_n = \rho_0 \circ \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_n$$

C'est une application affine de $P^{n+1}(A)$ dans A, de pente

$$m(A).m(P(A)) \cdots .m(P^n(A))$$

et d'image une partie cofinie de A de cocardinal égal à

$$\sharp\left(\mathrm{Ess}(A)\right) + \sharp\left(\mathrm{Ess}(P(A))\right) + \cdots + \sharp\left(\mathrm{Ess}(P^n(A))\right) = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$$

Maintenant, comme pour toute base additive B, les diviseurs associés aux éléments essentiels de B sont tous ≥ 2, on a $m(B) \geq q(B) \geq 2^{\sharp(\mathrm{Ess}(B))}$), on en déduit donc que

$$m(A).m(P(A)) \cdots m(P^n(A)) \geq 2^{s_0}.2^{s_1} \cdots 2^{s_n} = 2^{s_0+s_1+\cdots+s_n}$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = f_n\left(P^{n+1}(A)\right) \subset A$ et $u_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_n$, on a alors :

$$\begin{cases} \sharp(A - C_n) = u_n & \text{(I)} \\ \mathrm{pgcd}\,\{a - b/\ a, b \in C_n\} \geq 2^{u_n} & \text{(II)} \end{cases}$$

Pour un entier positif n donné, estimons l'entier $A(2^{u_n})$ où $A(x) = \sharp[0, x] \cap A$ pour tout réel $x \geq 0$. Considérons un entier $a \in A$, tel que $a \leq 2^{u_n}$. Si $a \notin C_n$ alors, d'après (I), a ne peut prendre que u_n valeurs possibles. Si $a \in C_n$, comme $a \leq 2^{u_n}$ et d'après la relation (II), a ne peut prendre que deux valeurs possibles. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A(2^{u_n}) \leq u_n + 2$$

Maintenant, un argument combinatoire classique montre que, si h désigne l'ordre de A et N le plus petit entier positif à partir duquel tout entier est somme de h éléments de A, alors pour tout $x \geq N$ on a $A(x) \geq (x - N)^{1/h}$. En particulier, pour tout $n \geq \dfrac{\log N}{\log 2}$, on a :

$$A(2^{u_n}) \geq (2^{u_n} - N)^{1/h}$$

(car la suite $(u_n)_n$ est une suite strictement croissante d'entiers, elle est donc minorée par n et donc $2^{u_n} \geq 2^n \geq N$). On en déduit que, pour tout $n \geq \dfrac{\log N}{\log 2}$ on a $\dfrac{\log(u_n + 2)}{\log(2^{u_n} - N)} \geq \dfrac{1}{h}$. Ce qui est absurde, par passage à la limite.

Remarque : a) Le théorème 4 explique donc que le calcul de la suite $(P^n(A))_n$ fournit un algorithme pour "dessentialiser élémentairement" une base, c'est-à-dire un moyen pour associer à une base une autre base sans élément essentiels. La preuve du théorème 4, plus exactement l'inégalité $\dfrac{\log(u_n+2)}{\log(2^{u_n}-N)} \geq \dfrac{1}{h}$, permet de majorer le nombre $\delta(A)$ d'étapes nécessaire à la dessentialisation élémentaire de A en fonction des invariants h et N liés à A. Par exemple, une simple étude de fonction montre que

$$\delta(A) \leq \max\left(\frac{\log N}{\log 2} + 1, N^{1/h} - 2\right)$$

b) Une conséquence immédiate du théorème 4 est que, si A est une base additive possédant des éléments essentiels, il existe une base B sans élément essentiel et deux entiers a, b avec $a \geq 2$ tels que

$$A \sim a.B + b$$

Ce résultat sera généralisé au paragraphe 3 dans le cas des parties essentielles.

c) Il est intéressant de remarquer qu'étant donné un entier $n \geq 0$ et une suite d'entiers strictement positifs $s_0, \cdots, s_n$ il existe toujours une base additive A telle que $\delta(A) = n$ et tel que pour tout $i = 0, \cdots, n$, le nombre d'éléments essentiels de $P^i(A)$ soit égal à s_i. En effet, considérons la suite finie de bases additives, définie par récurrence de la manière suivante :

$$A_0 = \mathbb{N},\ \forall i = 0, \cdots n,\ A_{i+1} = p_1 \cdots p_{s_{n-i}} A_i \cup \left\{p_1 \cdots \widehat{p_j} \cdots p_{s_{n-i}},\ j = 1, \cdots, s_{n-i}\right\}$$

Les ensembles A_i sont bien des bases et elles comptent respectivement s_{n-i+1} éléments essentiels. Il est clair que l'on a, pour tout $i = 0, \cdots, n$, $P(A_{i+1}) = A_i$

2.2.— Etude du nombre d'éléments essentiels.

Une conséquence intéressante de la partie précédente est le lemme suivant, qui permet de relier l'ordre d'une base à son nombre d'éléments essentiels :

Lemme 5.— *Soit A une base additive d'ordre h, possédant s éléments essentiels. On a*

$$h \geq \sum_{i=1}^{s} p_i - s + 1$$

Preuve: D'après la proposition 2 et le théorème 3, on a $\mathrm{ord}(A) \geq \mathrm{ord}(D(A)) \geq \sum_{i=1}^{s} d_i - s + 1$ et comme les d_i sont premiers entre eux deux à deux et supérieurs à 2, on a $\sum_{i=1}^{s} d_i \geq \sum_{i=1}^{s} p_i$.

———

Si l'on considère la base $A_n = p_1 \cdots p_n \mathbb{N} \cup \{p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_n,\ i = 1, \cdots, n\}$ on sait que son ordre est $h_n = \sum_{i=1}^{n} p_i - n + 1$ et qu'elle compte exactement n éléments essentiels. On voit donc que, pour le choix $A = A_n$, l'inégalité du Lemme 5 est optimale.

Le résultat principal de [DG] assure que si A est une base additive d'ordre h comptant s éléments essentiels, alors on a l'inégalité

$$s \leq 5,7\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

De plus, il est prouvé dans [DG] qu'il existe une constante $c > 0$, indépendante de n, telle que

$$n \geq c\sqrt{\frac{h_n}{\log h_n}}$$

Ainsi, on savait depuis [DG] que le comportement de s en fonction de h était en $O(\sqrt{\frac{h}{\log h}})$ et qu'il s'agissait là de la meilleure estimation possible en O. Il restait deux questions en suspend : la détermination de la constante absolu, c'est-à-dire le plus petit réel $C > 0$ tel que pour toute base additive d'ordre h comptant s éléments essentiels on ait $s \leq C\sqrt{\frac{h}{\log h}}$ et la détermination de la constante asymptotique, c'est-à-dire le réel (s'il existe) $c = \lim_h s(h)\sqrt{\frac{\log h}{h}}$ où $s(h)$ désigne le nombre maximal d'éléments essentiels d'une base additive d'ordre h. Si l'on regarde la suite $(A_n)_n$, on voit qu'asymptotiquement on a $n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}} \simeq 2$, ce qui suggère que la constante asymptotique au problème est 2. A.Plagne a montré récemment que c'était bien le cas (cf [Pl]). Le théorème suivant fournit la constante absolu et montre comment obtenir la constante asymptotique supérieure :

Théorème 6.— *a) On a* $\limsup_h s(h)\sqrt{\frac{\log h}{h}} = 2.$

b) Soit A une base additive d'ordre $h \geq 2$ comptant s éléments essentiels.

- *On a*

$$s \leq C\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

avec $C = 30\sqrt{\frac{\log 1564}{1564}} \sim 2,0572841285$*. De plus, cette inégalité devient une égalité pour* $A = A_{30} = p_1 \cdots p_{30}\mathbb{N} \cup \{p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_{30},\ i = 1, \cdots, 30\}$.

- *Pour tout $\alpha > 2$ on a*

$$s \leq \alpha\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

dès que $h \geq \exp\left(-\frac{7}{2}\alpha^2\frac{\log(\alpha^2-4)}{(\alpha^2-4)}\right)$.

Preuve: a) Avec les notations précédentes, notons $C_h = s(h)\sqrt{\frac{\log h}{h}}$. Quand $h = h_n$, on sait que la base additive A_n, d'ordre h_n, compte exactement n éléments essentiels, on a donc $s(h_n) \geq n$. Maintenant, par le lemme 5, on a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i - n + 1 = h_n \geq \sum_{i=1}^{s(h_n)} p_i - s(h_n) + 1$$

ce qui montre que $s(h_n) \leq n$ et, par suite, que $s(h_n) = n$. On a donc $n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}} = C_{h_n}$.

Soit A une base additive d'ordre $h \geq 4$, $n \geq 2$ l'unique entier tel que $h_n \leq h < h_{n+1}$ et s le nombre d'éléments essentiels de A. On a

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i - (n+1) + 1 = h_{n+1} > h \geq \sum_{i=1}^{s} p_i - s + 1$$

on en déduit donc que $s < n + 1$. Ainsi on a

$$s\sqrt{\frac{\log h}{h}} \leq n\sqrt{\frac{\log h}{h}} \leq n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}} = C_{h_n}$$

et, par suite, $C_h \leq C_{h_n}$.

Il s'ensuit que $\limsup_h s(h)\sqrt{\frac{\log h}{h}} = \limsup_n C_{h_n} = \limsup_n n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}}$. Le théorème des nombres premiers a comme conséquence l'équivalence suivante : $p_n \simeq_n n\log n$. On en déduit donc que

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} p_i - n + 1 \simeq_n \sum_{i=1}^{n} p_i \simeq_n \sum_{i=1}^{n} i\log i \simeq_n \frac{1}{2}n^2\log n$$

et, par suite,

$$n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}} \simeq_n n\sqrt{\frac{2\log n}{\frac{1}{2}n^2\log n}} = 2$$

ce qui prouve le a).

b) • On cherche donc à déterminer $\max_h C_h$. Dans la preuve du a) on a vu que pour tout entier $h \geq 4$ il existait $n \geq 2$ tel que $C_h \leq C_{h_n}$. En appliquant le lemme 5 pour $h = 3$ on voit que $s(3) \leq 1$ (il y a en fait égalité). On en déduit que $C_3 \leq \sqrt{\frac{\log 3}{3}} \leq 2\sqrt{\frac{\log 4}{4}} = C_{h_2} = C_4$. Enfin comme $C_2 = C_{h_1}$, on peut donc affirmer que $\max_h C_h = \max_n C_{h_n}$. On va montrer que

$$\max_n C_{h_n} = C_{h_{30}} = C$$

ce qui prouvera l'assertion.

Si $n \leq 127042$ on vérifie que $C_{h_n} \leq C$. (Nous ne détaillons pas ici le calcul qui s'obtient trés facilement avec une table de nombres premiers et un tableur.)

Supposons $n \geq 127042$. D'après [MR], on sait que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \geq \frac{n^2}{2}(\log n + \log\log n - 1,5034)$$

Ainsi, pour montrer que $n\sqrt{\frac{\log h_n}{h_n}} \leq C$, il suffit de prouver que

$$\frac{n^2}{C^2} \leq \frac{\frac{n^2}{2}(\log n + \log\log n - 1,5034) - n + 1}{\log(\frac{n^2}{2}(\log n + \log\log n - 1,5034) - n + 1)}$$

ce qui équivaut, une fois les simplifications effectuées, à l'inéquation

$$(C^2-4)\log n + (C^2-2)\log\log n - C^2.1,5034 - \frac{2C^2}{n} + \frac{2C^2}{n^2}$$
$$-2\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\log\log n}{2\log n} - \frac{1,5034}{2\log n} - \frac{1}{n\log n} + \frac{1}{n^2\log n}\right) \geq 0$$

Comme $n \geq 127042$, on a $\frac{\log\log n}{2\log n} - \frac{1,5034}{2\log n} - \frac{1}{n\log n} + \frac{1}{n^2\log n} \leq \frac{1}{2}$. Il suffit donc de vérifier que

$$(C^2-4)\log n + (C^2-2)\log\log n - C^2.1,5034 - \frac{2C^2}{n} \geq 0$$

pour obtenir le résultat. Compte-tenu du fait que la fonction incriminée dans le membre de gauche est croissante et que l'inégalité est vraie pour $n = 127042$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \geq 127042$.

• Soit $\alpha > 2$ (on suppose $\alpha \leq C$ sinon la proposition est évidente) et A une base additive d'ordre h comptant s éléments essentiels tels que

$$s > \alpha\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

On a $h \geq \sum_{i=1}^{s} p_i - s + 1$. D'après [MR], on sait que $\sum_{i=1}^{s} p_i \geq \frac{1}{2}s^2 \log s$ pour tout $s \geq 2$, on a donc

$$h > \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{h}{\log h}\left(\frac{1}{2}\log h - \frac{1}{2}\log\log h + \log\alpha\right) - \alpha\sqrt{\frac{h}{\log h}} + 1$$

ce qui équivaut à

$$(4-\alpha^2)\log h + \alpha^2\log\log h - 2\alpha^2\log\alpha + 4\alpha\sqrt{\frac{\log h}{h}} - 4\frac{\log h}{h} > 0$$

et ce qui implique en particulier que

$$(4-\alpha^2)\log h + \alpha^2\log\log h - 2\alpha^2\log\alpha + 4\alpha > 0$$

Considérons la fonction $f(x) = (4-\alpha^2)x + \alpha^2\log x - 2\alpha^2\log\alpha + 4\alpha$. Elle présente un maximum absolu en $x_\alpha = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-4}$ et est décroissante sur $[x_\alpha, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7}{2}\alpha^2\frac{\log(\alpha^2-4)}{(\alpha^2-4)}\right) &= \frac{5}{2}\alpha^2\log(\alpha^2-4) + \alpha^2\log(-\log(\alpha^2-4)) + \alpha^2\log\frac{7}{2} + 4\alpha \\ &< \alpha^2\left(\frac{5}{2}\log(\alpha^2-4) + \log(-\log(\alpha^2-4)) + \log\frac{7}{2} + 2\right) \\ &= \alpha^2\log\left(-\frac{7e^2}{2}t^{5/2}\log t\right) \text{ avec } t = \alpha^2-4 \end{aligned}$$

Une étude rapide de la fonction $t \mapsto t^{5/2}\log t$ montre, qu'avec l'hypothèse $\alpha \leq C$, on a alors

$$f\left(-\frac{7}{2}\alpha^2\frac{\log(\alpha^2-4)}{(\alpha^2-4)}\right) < 0$$

et donc que, puisque $f(\log h) > 0$, on a $\log h < -\frac{7}{2}\alpha^2\frac{\log(\alpha^2-4)}{(\alpha^2-4)}$ c'est-à-dire $h < \exp\left(-\frac{7}{2}\alpha^2\frac{\log(\alpha^2-4)}{(\alpha^2-4)}\right)$. Ceci achève la preuve du théorème.

3.— Sur les parties essentielles d'une base additive.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux parties essentielles d'une base additive qui, nous le rappelons, sont les parties finies et minimales $P \subset A$ telles que $A - P$ ne soit plus une base. Le point de départ pour leur étude est le lien qu'il y a entre l'existence d'une partie essentielle pour une base et le fait d'être en progression arithmétique :

Proposition 7.— *Soit A une base. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A possède une partie essentielle,

ii) Il existe deux entiers $a \geq 2$, $b \geq 0$ et une partie $X \subset \mathbb{N}$ telle que $A \sim a.X + b$.

Preuve : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Soit P une partie essentielle de A et $x \in P$. L'ensemble $(A-P)\cup\{x\}$ est une base additive possédant x pour élément essentiel, donc d'après le lemme 1 on a ii).

ii) $\Rightarrow$ *i)* Si $A \sim a.X + b$, on peut écrire $A = (a.B + b) \cup E$ avec E finie non vide (sinon A n'est pas une base). L'ensemble $A - E$ n'est pas une base, on en déduit donc qu'il existe une partie essentielle P de A telle que $P \subset E$.

———

En d'autres termes, l'existence de parties essentielles pour une base équivaut pour cette base à vivre dans une progression arithmétique non triviale à partir d'un certain rang. On va voir ici que la raison d'une telle progression donne des informations capitales pour l'étude des parties essentielles.

Si $A \sim a.X + b$ et que l'on impose la condition $0 \leq b < a$ (ce qui est toujours possible quitte à translater X) on voit qu'en posant

$$E = \{x \in A/\ x \not\equiv b \bmod(a)\}$$
$$B = \left\{\frac{x-b}{a}/\ x \in A,\ x \equiv b \bmod(a)\right\}$$

on a $A = (a.B + b) \cup E$. On remarque que, toujours sous la condition $0 \leq b < a$, les ensembles B et E sont uniques dés que l'on impose la condition $x \not\equiv b \bmod(a)$ pour tout $x \in E$, et que dans cette situation on a $A = (a.B + b) \sqcup E$ avec E fini.

<u>Dans la suite de ce texte</u>, quand on supposera que $A \sim a.X + b$ et que l'on écrira alors $A = (a.B + b) \cup E$ on supposera toujours que $0 \leq b < a$ et que tout élément $x \in E$ vérifie $x \not\equiv b \bmod(a)$.

Théorème 8.— *Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. S'il existe une infinité d'entiers $a \in \mathbb{N}$ tels que $A \sim a.X + b$ (pour un certain $b \in \mathbb{N}$ et un certain $X \subset \mathbb{N}$ dépendants de a), alors A n'est pas une base additive.*

Preuve : Commençons par remarquer que s'il existe $a \neq a^{'}$ tels que $A \sim a.X + b \sim a^{'}X^{'} + b^{'}$ alors $A \sim mX^{''} + b^{''}$ où $m = \mathrm{ppcm}(a, a^{'})$ pour une certaine partie $X^{''}$ et un certain entier $b^{''}$. En particulier, s'il existe une infinité d'entiers a tels que $A \sim a.X + b$ alors il en existe une infinité ordonnée pour la relation de divisibilité.

Si $a_1, a_2, \cdots$ désigne une suite d'entiers strictement croissante (pour la relation de divisibilité) tels que $A \sim a_i.X_i + b_i$ alors, avec notre convention, si l'on écrit $A = (a_i.B_i + b_i) \cup E_i$, on a pour tout i

$$\begin{cases} (a_{i+1}.B_{i+1} + b_{i+1}) \subset (a_i.B_i + b_i) \\ E_i \subset E_{i+1} \end{cases}$$

Dans cette situation, l'intersection $\bigcap\limits_i (a_i.B_i + b_i)$ est réduite au plus à un seul élément, ce qui entraine que $A = \bigcup_i E_i \cup \{\alpha\}$ pour un certain élément $\alpha \in A$. Ainsi, puisque A est infini, la suite croissante d'ensembles finis $(E_i)_i$ ne peut pas être stationnaire. On déduit donc que si $A \sim a.X + b$ pour une infinité de a, alors pour tout entier a donné tel que $A = (a.B + b) \cup E$ et tout entier M, il existe un entier $a^{'} > M$ tel que $a|a^{'}$, $A = (a^{'}.B^{'} + b^{'}) \cup E^{'}$ et $E \subsetneq E^{'}$ (et donc $(a^{'}.B^{'} + b^{'}) \subsetneq (a.B + b)$).

Raisonnons par l'absurde en supposant que A soit une base additive.

• Soient a_1, b_1, B_1, E_1 tels que $A = (a_1.B_1 + b_1) \cup E_1$ et $a_1 \geq 2$. Comme A est une base, on a $E_1 \neq \emptyset$. On considère un élément $x_1 \in E_1$.

• Il existe a_2, b_2, B_2, E_2 tels que

$$\begin{cases} a_1 | a_2 \\ a_2 > \max E_1 \\ A = (a_2.B_2 + b_2) \cup E_2 \end{cases}$$

Il existe a_3, b_3, B_3, E_3 tels que

$$\begin{cases} a_2 | a_3 \\ A = (a_3.B_3 + b_3) \cup E_3 \\ E_2 \subsetneq E_3 \end{cases}$$

On peut alors choisir un élément $x_2 \in (a_2.B_2 + b_2)$ tel que $x_2 \in E_3$.

• De même, il existe a_4, b_4, B_4, E_4 tels que

$$\begin{cases} a_3 | a_4 \\ a_4 > 2 \max E_3 \\ A = (a_4.B_4 + b_4) \cup E_4 \end{cases}$$

Il existe alors a_5, b_5, B_5, E_5 tels que

$$\begin{cases} a_4 | a_5 \\ A = (a_5.B_5 + b_5) \cup E_5 \\ E_4 \subsetneq E_5 \end{cases}$$

On peut choisir un élément $x_3 \in (a_4.B_4 + b_4)$ tel que $x_3 \in E_5$.

• Par récurrence, si l'on suppose au rang $k - 1 \geq 1$ avoir construit a_{2k-2}, a_{2k-1}, b_{2k-2}, b_{2k-1}, B_{2k-2}, B_{2k-1}, E_{2k-2}, E_{2k-1} et x_k tels que

$$\begin{cases} a_{2k-2} > (k-1) \max E_{2k-3} \\ a_{2k-2} | a_{2k-1} \\ A = (a_{2k-2}.B_{2k-2} + b_{2k-2}) \cup E_{2k-2} = (a_{2k-1}.B_{2k-1} + b_{2k-1}) \cup E_{2k-1} \\ x_k \in (a_{2k-2}.B_{2k-2} + b_{2k-2}) \cap E_{2k-1} \end{cases}$$

alors au rang k il existe $a_{2k}, b_{2k}, B_{2k}, E_{2k}$ tels que

$$\begin{cases} a_{2k-1} | a_{2k} \\ a_{2k} > k \max E_{2k-1} \\ A = (a_{2k}.B_{2k} + b_{2k}) \cup E_{2k} \end{cases}$$

Il existe alors $a_{2k+1}, b_{2k+1}, B_{2k+1}, E_{2k+1}$ tels que

$$\begin{cases} a_{2k} | a_{2k+1} \\ A = (a_{2k+1}.B_{2k+1} + b_{2k+1}) \cup E_{2k+1} \\ E_{2k} \subsetneq E_{2k+1} \end{cases}$$

On peut alors choisir un élement $x_{k+1} \in (a_{2k}.B_{2k} + b_{2k})$ tel que $x_{k+1} \in E_{2k+1}$.

Supposons que h soit l'ordre de A et considérons l'entier

$$x = x_1 + \cdots + x_h + \lambda a_{2h}$$

où λ est un paramètre entier. Puisque A est une base d'ordre h, pour tout λ assez grand il existe $y_1, \cdots, y_h \in A$ tel que

$$x = y_1 + \cdots + y_h$$

Nous allons montrer, par récurrence, que l'on peut réordonner la famille $(y_i)_i$ de sorte que $y_i \in E_{2i-1}$ pour tout $i = 1, \cdots, h$.

• Par construction, on a $x_p \equiv b_1 \bmod(a_1)$ pour tout $p = 2, \cdots, h$ et $x_1 \not\equiv b_1 \bmod(a_1)$. Ainsi, puisque $\lambda a_{2h} \equiv 0 \bmod(a_1)$ on a

$$y_1 + \cdots + y_h = x = x_1 + \cdots + x_h + \lambda a_{2h} \not\equiv hb_1 \bmod(a_1)$$

et donc il existe un y_k, disons y_1, tel que $y_1 \not\equiv b_1 \bmod(a_1)$, c'est-à-dire $y_1 \in E_1$. La propriété est donc vérifiée au rang $l = 1$.

• Supposons que pour $l < h$ on ait $y_i \in E_{2i-1}$ pour tout $i = 1, \cdots, l$. En particulier, on a $y_1, \cdots, y_l \in E_{2l-1}$. Alors au rang $l + 1$, on a :

$$y_{l+1} + \cdots + y_h = (x_1 - y_1) + \cdots + (x_l - y_l) + x_{l+1} + \cdots + x_h + \lambda a_{2h}$$

Posons

$$\omega = (x_1 - y_1) + \cdots + (x_l - y_l)$$

Si $\omega = 0$ alors

$$y_{l+1} + \cdots + y_h = x_{l+1} + \cdots + x_h + \lambda a_{2h}$$

Par hypothèse, $x_{l+1} \not\equiv b_{2l+1} \bmod(a_{2l+1})$ et comme on a $x_p \equiv b_{2l+1} \bmod(a_{2l+1})$ pour tout $p = l + 2, \cdots, h$ et $\lambda a_{2h} \equiv 0 \bmod(a_{2l+1})$, on en déduit que

$$y_{l+1} + \cdots + y_h \not\equiv (h - l)b_{2l+1} \bmod(a_{2l+1})$$

donc il existe un y_k, disons y_{l+1} tel que $y_{l+1} \not\equiv b_{2l+1} \bmod(a_{2l+1})$, c'est-à-dire $y_{l+1} \in E_{2l+1}$.

Si $\omega \neq 0$ alors comme $x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_l \in E_{2l-1}$ et que $a_{2l} > l \max E_{2l-1}$, on a $a_{2l} > |(x_1-y_1)+\cdots+(x_l-y_l)|$. Il s'ensuit que $(x_1-y_1)+\cdots+(x_l-y_l) \not\equiv 0 \bmod(a_{2l})$. Par ailleurs, pour tout $p = l+1, \cdots, h$ on a $x_p \equiv b_{2l} \bmod(a_{2l})$ et $\lambda a_{2h} \equiv 0 \bmod(a_{2l})$, ainsi

$$y_{l+1} + \cdots + y_h \not\equiv (h - l)b_{2l} \bmod(a_{2l})$$

et donc il existe un y_k, disons y_{l+1} tel que $y_{l+1} \not\equiv b_{2l} \bmod(a_{2l})$, c'est-à-dire $y_{l+1} \in E_{2l} \subset E_{2l+1}$.

La récurrence est ainsi achevée. Nous venons donc de montrer que l'entier x s'écrit comme somme de h éléments de E_{2h+1} et ceci indépendamment du paramètre λ. Comme E_{2h+1} est un ensemble fini, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers x pouvant s'écrire comme somme de h éléments de E_{2h+1}. On en déduit une absurdité puisque λ peut prendre une infinité de valeurs. Ainsi A n'est pas une base additive.

On déduit du théorème 8 que pour toute base A il existe un plus grand entier a tel que $A \sim a.X + b$. Une fois donné ce plus grand entier a, si $a \geq 2$ il existe alors un unique entier $0 \leq b < a$ et deux parties uniques B, E tels que

$$A = (a.B + b) \cup E$$

avec pour tout $x \in E$, $x \not\equiv b \bmod(a)$.

Définition.— *Avec les notations précédentes, on appelle l'entier a* la raison *de A, la partie B* la dessentialisée *de A et la partie E* le réservoir *de A.*

Par exemple l'ensemble, $P(k) = \{n^k / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de raison 1 et de réservoir vide. L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est une base de raison 2, son réservoir est $\{2\}$.

Il est à noter qu'il n'existe pas *a priori* de lien entre l'ordre et la raison d'une base. Par exemple, si l'on considère la suite de bases additives $(a.P(k) \cup \{1\})_k$, on voit que la raison de ces bases est toujours a et que l'ordre tend vers $+\infty$. Réciproquement, si l'on considère la suite de bases additives $(k.\mathbb{N} \cup \{1, \cdots, k-1\})_k$, on voit que l'ordre de ces bases est toujours 2 alors que la raison tend vers $+\infty$.

La proposition suivante généralise la remarque du théorème 4 :

Proposition 9.— *a) La dessentialisée d'une base additive est une base additive sans partie essentielle.*

b) Soit A une base additive de raison a et B la dessentialisée de A. Soit $a^{'}, b^{'} \in \mathbb{N}$ et $B^{'} \subset \mathbb{N}$ tels que $A \sim a^{'}.B^{'} + b^{'}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $a = a^{'}$,

ii) $B \sim (B^{'} + k)$, pour un certain entier k,

iii) $B^{'}$ est une base sans partie essentielle.

Preuve : a) Soit h l'ordre de A. Pour tout entier n assez grand il existe $x_1, \cdots, x_k \in E$, $m_1, \cdots, m_l \in B$ avec $k + l = h$ tel que

$$an + b = x_1 + \cdots + x_k + (am_1 + b) + \cdots + (am_l + b)$$

on en déduit que

$$n = m_1 + \cdots + m_l + \frac{x_1 + \cdots + x_k + (l-1)b}{a}$$

Maintenant

$$\frac{x_1 + \cdots + x_k + (l-1)b}{a} \leq h\frac{\max E + b}{a}$$

on en déduit donc que $B \cup \{0,1\}$ est une base additive d'ordre $\leq h + z$ où z désigne la partie entière de $h\frac{\max E+b}{a}$.

Supposons que B ne soit pas une base, alors $B \cup \{0,1\}$ possède une partie essentielle et donc il existe $a^{'} \geq 2$, $b^{'} \in \mathbb{N}$ et $B^{'} \subset \mathbb{N}$ tels que $B \cup \{0,1\} \sim a^{'}B^{'} + b^{'}$. Par suite, on a $B \sim a^{'}B^{'} + b^{'}$ et donc $A \sim a^{'}aB^{'} + c$ pour un certain c, ce qui nie la maximalité de a. Donc B est bien une base.

Si B possède une partie essentielle alors $B \sim a^{'}B^{'} + b^{'}$ avec $a^{'} \geq 2$ et donc $A \sim a^{'}aB^{'} + c$, ce qui nie à nouveau la maximalité de a.

b) $i) \Rightarrow ii)$ Il existe un entier n_0 tel que

$$(a.B + b) \cap [n_0, +\infty[= A \cap [n_0, +\infty[= (aB^{'} + b^{'}) \cap [n_0, +\infty[$$

on en déduit que $b \equiv b^{'} \bmod(a)$. Posons $k = \dfrac{b^{'} - b}{a}$, on a

$$B \cap \left[\frac{n_0 - b}{a}, +\infty\right[= (B^{'} + k) \cap \left[\frac{n_0 - b}{a}, +\infty\right[$$

c'est-à-dire $B \sim B^{'} + k$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Soit n_0 est tel que $B \cap [n_0, +\infty[= (B^{'} + k) \cap [n_0, +\infty[$. Comme B est sans partie essentielle, $B \cap [n_0, +\infty[$ est une base, donc $(B^{'} + k) \cap [n_0, +\infty[$ et $(B^{'} + k)$ le sont aussi. Si P était une partie essentielle de $B^{'} + k$ alors $(B^{'} + k) - P$ ne serait pas une base, idem pour $(B^{'} + k) \cap [n_0, +\infty[-P = B \cap [n_0, +\infty[-P$, et par suite $[0, n_0[\cup P$ contiendrait une partie essentielle de B ce qui est absurde. Ainsi, $(B^{'} + k)$ est une base sans partie essentielle, il en est donc de même de sa translatée $B^{'} = (B^{'} + k) - k$.

$iii) \Rightarrow i)$ Supposons $a \neq a^{'}$. Par maximalité de a on a $a^{'}|a$ strictement. Posons $a = ka^{'}$ avec $k \geq 2$, on a donc $B^{'} \sim k.B + t$ pour un certain entier t et par suite (proposition 7), $B^{'}$ possède une partie essentielle, ce qui est absurde.

———

Le théorème suivant montre que toute partie essentielle d'une base A vit dans son réservoir, ce qui explique la terminologie que nous employons pour désigner cet invariant.

Théorème 10.— *Soit A une base additive de raison a et de réservoir E. Si P est une partie essentielle de A alors $P \subset E$. En particulier, l'ensemble des parties essentielles de A est fini, son cardinal est majoré par la longueur du radical de a (i.e. le nombre de nombres premiers divisant a).*

Preuve : On a $A = (a.B + b) \cup E$. Soit P une partie essentielle de A telle que $P \not\subset E$ et $x_0 \in P \cap (a.B + b)$. L'ensemble $(A - P) \cup \{x_0\}$ est donc une base additive possédant x_0 pour élément essentiel. Le lemme 1, permet alors d'affirmer que

$$\text{pgcd}\{x - y/\ x, y \in A - P\} = d \geq 2$$

Montrons par l'absurde que d ne divise pas a. Supposons donc le contraire et prenons deux éléments $x, y \in (A - P) \cup \{x_0\}$.

• Si $x, y \in a.B + b$ alors $d|x - y$ par hypothèse.
• Si $x, y \in (A - P)$ on a $d|(x - y)$ par définition de d.
• Si $x = x_0$ et $y \in A - P$ alors $x - y = x_0 - t + t - y$ (pour n'importe quel $t \in (a.B + b) - P)$ et comme $d|(x_0 - t)$ et $d|(t - y)$ on a $d|(x_0 - y)$.

Ainsi, $d|(x - y)$ pour tout $x, y \in A - P \cup \{x_0\}$ ce qui est en contradiction avec le fait que $(A - P) \cup \{x_0\}$ soit une base.

Comme $d \not| a$, il existe un premier p et un entier k tel que $p^k|d$ et $p^k \not| a$. Comme $A \sim p^k.B^{'} + b^{'}$ (puisque presque toute les différences des éléments de $a.B + b$ sont divisibles par p^k) et que $A \sim a.B + b$ on en déduit que $A \sim pa.B + c$ pour un certain c ce qui est impossible puisque $a < pa$ et que a est la raison de A. Ceci prouve donc que $P \subset E$ et par suite que le nombre de parties essentielles de A est fini, puisque E est fini.

Pour majorer le nombre de parties essentielles en fonction de a, commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 11.— *Soit A une base additive et P_1, P_2 deux essentialités distinctes de A telles que $P_1 \cup P_2 \neq A$. Posons*

$$d(P_i) = \text{pgcd}\{x - y/\ x, y \in A - P_i\};\ i = 1, 2$$

On a $d(P_i) \geq 2$ et $\text{pgcd}(d(P_1), d(P_2)) = 1$.

Preuve du lemme : Supposons qu'il existe $d \geq 2$ tel que $d|d(P_1)$ et $d|d(P_2)$. Considérons un entier $t \in A - (P_1 \cup P_2)$ et la partie $B = A - (P_1 \cap P_2)$. Soit $x \in B$, si $x \notin P_1$ alors $d|d(P_1)|(x - t)$ et si $x \notin P_2$ alors $d|d(P_2)|(x - t)$. Donc, pour tout $x, y \in B$, on a $d|(x - y)$ et, par suite, on en déduit que B ne peut être une base additive. Il s'ensuit, par hypothèse de minimalité et puisque $P_1 \cap P_2 \subset P_1, P_2$, que $P_1 = P_1 \cap P_2 = P_2$ ce qui est, bien sur, absurde par hypothèse.

———

Remarque : L'hypothèse $P_1 \cup P_2 \neq A$ est visiblement essentielle pour la preuve de ce lemme, mais elle est en fait essentielle pour la propriété annoncée. En effet, si l'on considère $A = \mathbb{N}$, $P_1 = 2.\mathbb{N}$ et $P_2 = 2.\mathbb{N} + 1$, on voit que P_1 et P_2 sont des essentialités mais que $d(P_1) = d(P_2) = 2$.

Retour à la preuve du théorème : Soit $P_1, \cdots, P_s$ les parties essentielles de A et $d_i = d(P_i) \geq 2$ pour tout $i = 1, \cdots, s$. En appliquant le lemme précédent on voit que pour tout $i = 1, \cdots, s$ on a $A \sim d_i.B_i + b_i$ pour un certain $b_i \in \mathbb{N}$ et un certain $B_i \subset \mathbb{N}$. Comme les d_i sont premiers entre eux deux à deux, on voit que l'on a $A \sim d_1 \cdots d_s.B + b$ pour un certain $b \in \mathbb{N}$ et un certain $B \subset \mathbb{N}$. Si a désigne la raison de A, alors on a $d_1 \cdots d_s | a$ et donc, puisque les d_i sont premiers entre eux deux à deux, on voit que a est divisible par au moins s nombres premiers distincts, c'est-à-dire que s est majoré par la longueur du radical de a.

Remarques : a) La majoration du nombre de parties essentielles donnée dans le théorème est en fait la meilleure possible. En effet, si l'on reprend la suite de bases additives $A_n = p_1 \cdots p_n.\mathbb{N} \cup \{p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_n /\ i = 1, \cdots, n\}$ alors la longueur du radical de la raison de cette base est n et elle possède exactement n éléments essentiels qui forment donc exactement les n parties essentielles de A_n.

b) Le fait que les parties essentielles d'une base A soient contenues dans le réservoir E de A, permet aussi de majorer leur nombre par $2^{\sharp E}$. Toutefois, en termes d'invariants, il n'est pas intéressant d'utiliser le reservoir pour majorer le nombre de parties essentielles. Si A et B sont deux bases telles que $A \sim B$, alors leurs raisons sont égales et, par suite, le nombre de leurs parties essentielles est majorable simultanément. Par contre, les réservoirs de A et B peuvent être trés différents et contenir un nombre différent de parties essentielles.

c) Comme pour le cas de la dessentialistation élémentaire, on peut donner un algorithme de dessentialisation général : étant donné une base A de parties essentielles $P_1, \cdots, P_s$, on note x_0 le plus petit élément de $A - (P_1 \cup \cdots \cup P_s)$ et on pose :

$$\begin{array}{rcl} m(A) & = & \text{pgcd } \{x - y /\ x, y \in A - (P_1 \cup \cdots \cup P_s)\} \\ P(A) & = & \left\{ \dfrac{x - x_0}{m(A)} /\ x \in A - (P_1 \cup \cdots \cup P_s) \right\} \end{array}$$

Le même argument que dans le cas élémentaire montre que $P(A)$ reste une base. On voit que $m(A) = 1$ si et seulement si la base A est sans parties essentielles. On considère donc la suite $(P^n(A))_n$ définie par

$$P^0(A) = A,\ \forall n \geq 0\ P^{n+1}(A) = P(P^n(A))$$

Comme pour toute base B on a $m(B)|r(B)$ (où $r(B)$ désigne la raison de B) et $r(P(B)) = \frac{r(B)}{m(B)}$, on en déduit que pour tout $n \geq 0$ on a $r(P^{n+1}(A))|r(P^n(A))$. Mais l'égalité $r(P^{n+1}(A)) = r(P^n(A))$ entraine $m(P^n(A)) = 1$, ce qui équivaut à $P^n(A)$ sans partie essentielles, ou encore $r(P^n(A)) = 1$. Ainsi la suite $r(P^n(A))$ est strictement décroissante puis stationnaire égale à 1 et le rang de stationnarité est majoré par la longueur de l'entier $r(A)$ (i.e la somme des puissances de la décomposition en facteurs premiers de $r(A)$). On en déduit en particulier que si l est la longueur de $r(A)$ alors $P^l(A)$ est égal à la dessentialisée de A modulo une translation et la relation $\sim$.

d) On a déjà remarqué qu'il n'existait aucun lien entre la raison et l'ordre d'une base, il faut aussi noter qu'il n'existe aucun lien entre l'ordre et la longueur du radical de la raison d'une base. Ceci implique qu'il est impossible de majorer le nombre de parties essentielles d'une base en fonction de son ordre.

Nous finissons cet article en suggérant quelques problèmes ouverts relatifs à l'étude que nous venons de mener.

Problèmes ouverts :

Problème I.— Nous avons vu que le nombre de parties essentielles n'était pas majorable par une fonction de l'ordre de la base, au contraire du cas des éléments essentiels. Si l'on compte les parties essentielles de cardinal borné, on peut s'interroger sur la possibilité de majorer leur nombre en fonction de h. Plus précisément, existe-t-il une fonction φ telle que, étant donné $k, h \in \mathbb{N}^*$, pour toute base additive A d'ordre h on ait

$$\sharp\{P \subset A/\ P \text{ partie essentielle de cardinal } \leq k\} \leq \varphi(k,h) \text{ ?}$$

Problème II.— a) Toute base additive contient-elle toujours au moins une essentialité?

b) Pour toute base A et toute partie $P \subset A$ telle que $A - P$ ne soit pas une base, existe-t-il $P^{'} \subset P$ telle que $P^{'}$ soit une essentialité de A?

c) Est-il vrai qu'une base additive contient toujours une infinité d'essentialités?

Bibliographie

[EG] Paul Erdös and Ronald Graham, *On bases with an exact order*, Acta Arithmetica XXXVII, p. 201-207 (1980).

[DG] Bruno Deschamps et Georges Grekos, *Estimation du nombre d'exceptions à ce qu'un ensemble de base privé d'un point reste un ensemble de base*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 539, 45-53 (2001).

[Gr] Georges Grekos, *Sur l'ordre d'une base additive*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1987-1988, exp. 31.

[MR] Jean-Pierre Massias et Guy Robin, *Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux 8, 215-242 (1996).

[Pl] Alain Plagne, *Sur le nombre d'éléments exceptionnels d'une base additive*, préprint.

Bruno Deschamps, Bakir Farhi
Département de Mathématiques — Université du Maine
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr, Bakir.Farhi@univ-lemans.fr