Groupes totaux

Bruno DESCHAMPS et Ivan SUAREZ ATIAS

Université du Maine

Abstract.— Total groups are groups for which the dimension of the invariant algebra center of a central simple algebra $\mathfrak{A}_f$ associated to a 2-cocycle $f \in Z^2(\mathrm{Gal}(L/k), L^*)$ under a lifting of the Galois action to $\mathfrak{A}_f$ is constant for all k and f. In this article, we show that the quasi-CC groups (groups with cyclic center and for which all the centralizer of non-central elements are cyclic) are total. CC-groups, which are quasi-CC groups with trivial center, are thus total. We give a complete classification of these groups. We also describe a general family of quasi-CC groups which are not CC : the meta-dicyclic groups.

Résumé.— Les «groupes totaux» sont les groupes pour lesquels la dimension du centre l'algèbre des invariants d'une algèbre simple centrale $\mathfrak{A}_f$ associée à un 2-cocycle $f \in Z^2(\mathrm{Gal}(L/k), L^*)$ sous l'action d'un relevé de l'action galoisienne à $\mathfrak{A}_f$ est constante quels que soient k et f. Dans cet article, nous montrons que les groupes quasi-CC (qui sont les groupes de centre cyclique et dont les centralisateurs des éléments hors du centre sont cycliques) sont totaux. Les groupes de type CC qui sont les groupes quasi-CC à centre trivial sont donc totaux. Nous en donnons une classification complète. Nous décrivons également une famille infinie de groupes quasi-CC qui ne sont pas de type CC : les groupes méta-dicycliques.

Introduction.

Dans ce texte, nous introduisons et étudions la notion de groupe total. La totalité est une propriété arithmétique liée aux algèbres simples centrales. Etant donné un groupe fini G et une extension galoisienne finie L/k, de groupe de Galois G de neutre e, on se donne un 2-cocyle $f \in Z^2(G, L^*)$ et l'on note $\mathfrak{A}_f$ l'algèbre muni du produit croisé relatif à f et rapportée à une L-base $\{a_\sigma\}_{\sigma\in G}$. Il existe un plongement tout à fait canonique du corps L dans l'algèbre $\mathfrak{A}_f$, donné par l'application

$$\begin{array}{rccc} p_f : & L & \longrightarrow & \mathfrak{A}_f \\ & \lambda & \longmapsto & f^{-1}(e,e)\lambda a_e \end{array}$$

Dans cette situation, il se peut que le groupe G se relève en un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$. Autrement dit, il peut exister un morphisme injectif $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ tel que pour tout $\lambda \in L$ et tout $g \in G$, on ait

$$p_f(\lambda^g) = \varphi(g) \circ p_f(\lambda)$$

Dans le cas où un tel relevé existe, on peut considérer l'algèbre des invariants de $\mathfrak{A}_f$ par G, notée $\mathfrak{A}_f^G$, ainsi que son centre $Z(\mathfrak{A}_f^G)$. On dit que le groupe G est total si la dimension sur k de $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est indépendante du choix de L/k et de f. Le but de cet article est d'étudier cette notion et de donner une vaste série d'exemples de groupe totaux.

Bien que, de part sa définition, la totalité puisse apparaître comme une notion *a priori* improbable, les résultats établis dans ce texte montrent que de nombreuses familles classiques de groupes finis la possèdent. Parmi les plus connues, nous montrons que, pour tout entier n, le groupe cyclique C_n (proposition 10), le groupe diédral D_{4n+2} (corollaire 22), le

[0]2010 Mathematics Subject Classification Primary 20E99, 20D99, 16S35 Secondary 12E15, 16K50

groupe dicyclique Q_{4n} (corollaire 24) et le groupe spécial linéaire projectif de dimension 2 sur le corps fini à 2^n éléments $PSL_2(\mathbb{F}_{2^n})$ (corollaire 22) sont des groupes totaux. D'autres exemples plus exotiques de groupes totaux sont donnés et dans le cas de la non-totalité, le texte donne des résultats numériques qui indiquent les dimensions possibles que peut prendre $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ dans le cas de groupes G de petits ordres.

Cet article se compose de trois parties. Les deux premières sont assez élémentaires et concernent la question du relèvement de l'action galoisienne et l'étude du centre de l'algèbre des invariants. La troisième se consacre à l'étude des groupes totaux. Plus précisément :

Dans la première partie on s'intéresse à la question du relèvement du groupe G à $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$. Cette question, ainsi que les structures des algèbres $\mathfrak{A}_f^G$ et $Z(\mathfrak{A}_f^G)$, sont invariantes par cobordisme. Plus précisément, si $f, g \in Z^2(G, L^*)$ sont deux 2-cocycles cohomologues, disons $f = d(\mu)g$ avec $\mu \in C^1(G, L^*)$, il existe un isomorphisme entre $\mathfrak{A}_f$ et $\mathfrak{A}_g$, donné par l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathfrak{A}_f & \longrightarrow & \mathfrak{A}_g \\ & \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma a_\sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \mu(\sigma) a_\sigma \end{array}$$

Cet isomorphisme respecte les plongements de L dans $\mathfrak{A}_f$ et $\mathfrak{A}_g$ (i.e. $p_g = \theta \circ p_f$), par ailleurs il induit un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \overline{\theta} : & \mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_g) \\ & \alpha & \longmapsto & \theta \circ \alpha \circ \theta^{-1} \end{array}$$

Puisque $\overline{\theta}(\alpha) \circ p_g = \theta \circ \alpha \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ p_f = \theta(\alpha \circ p_f)$, on en déduit que $\overline{\theta}$ applique un relevé de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ à un relevé de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_g)$ et que les algèbres $\mathfrak{A}_g^G$ et $\mathfrak{A}_g^G$ (resp. $Z(\mathfrak{A}_g^G)$ et $Z(\mathfrak{A}_g^G)$) sont k-isomorphes.

Ainsi, on peut reformuler plus globalement la problématique en la regardant sur le groupe $H^2(G, L^*)$: étant donné un élément $\alpha \in H^2(G, L^*)$ on dira que G se relève à α, si le groupe d'automorphismes G se relève dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ où $f \in Z^2(G, L^*)$ désigne n'importe quel représentant de α. La collection des relevés ainsi que les algèbres invariantes et leurs centres ne dépendent donc pas, à k-isomorphisme près, du choix du représentant f de α. Nous montrons dans cette partie que G se relève à $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ si et seulement si f est cohomologue à un 2-cocyle à valeurs dans k^* (théorème 1) ce qui se traduit par le fait que les éléments du $H^2(G, L^*)$ pour lesquels G se relève sont exactement ceux qui sont dans l'image du morphisme canonique $H^2(G, k^*) \longrightarrow H^2(G, L^*)$. Une fois f fixé, l'ensemble des relevés de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ a naturellement une structure de groupe abélien.

La deuxième partie s'intéresse à l'algèbre des invariants, $\mathfrak{A}_f^G$, de $\mathfrak{A}_f$ par un relevé de G. Nous montrons que la dimension sur k de $\mathfrak{A}_f^G$ est toujours égale à l'ordre de G (théorème 4) et nous montrons que la dimension sur k du centre $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ de l'algèbre $\mathfrak{A}_f^G$ correspond au cardinal d'un ensemble de classes de conjugaison de G pour lesquelles un certain morphisme est trivial (théorème 7). Dans le cas des groupes non-abélien nous en déduisons que l'algèbre des invariants $\mathfrak{A}_f^G$ n'est jamais commutative (corollaire 8). Dans le cas des groupes abéliens, ce résultat est complété par le fait que la dimension sur k de $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est un entier tel que $o(G)/\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ soit un carré parfait (proposition 9).

La troisième partie est consacrée à la propriété de totalité à proprement dite. En vertu des résultats établis dans les parties 1 et 2, un groupe fini G est total lorsque la dimension de $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est égale au nombre de classes de conjugaisons de G, quels que soient le corps k

et le 2-cocycle f. Cette notion est intrinsèquement liée à l'arithmétique du groupe que l'on étudie et ne reste stable pour aucune des opérations usuelles sur les groupes (passage aux quotients, au sous-groupes, au produit cartésiens ou encore aux extensions). Nous donnons toutefois plusieurs critères pour obtenir des groupes totaux. Nous montrons, par exemple, que tout groupe dont l'ordre est un entier radicalaire est total (corollaire 14).

Nous nous intéressons, par ailleurs, à la notion de *groupes de type CC*, qui sont les groupes pour lesquels les centralisateurs des éléments non triviaux sont cycliques. Ils sont toujours totaux. Nous donnons une classification de ces groupes (théorème 16) : ce sont exactement les groupes cycliques, les groupes spéciaux linéaires projectif $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$ et les produits semi-direct de deux groupes cycliques pour une action ayant de "bonnes propriétés". Cette classification permet d'exhiber plusieurs familles explicites de groupes totaux. Plus généralement, les *groupes quasi-CC* (même définition que CC, mais l'on autorise le centre à être cyclique) sont totaux. Nous donnons un exemple de famille de groupes quasi-CC qui ne sont pas de type CC : les groupes méta-dicycliques. Il s'agit d'une famille obtenue en généralisant la construction des groupes dicycliques (paragraphe 3.3.). Elle compte des groupes de centre d'ordres arbitrairement grands.

1.— Relèvement de l'action galoisienne.

On conserve les notations de l'introduction et pour ce qui est des objets cohomologiques, nous utilisons les notations standards.

Théorème 1.— *Le groupe G se relève à $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ si et seulement si f est cohomologue à un 2-cocyle à valeurs dans k^*. En particulier, l'ensemble des $\alpha \in \mathrm{H}^2(G,L^*)$ pour lesquelles G se relèvent à α est exactement l'image du morphisme canonique $\mathrm{H}^2(G,k^*) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G,L^*)$.*

Quand f est cohomologue à un 2-cocyle à valeurs dans k^*, l'ensemble des relevés de G à $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ a alors une structure de groupe, isomorphe au groupe $d^{-1}(\mathrm{Z}^2(G,k^*))/\mathrm{C}^1(G,k^*)$ (où $d : \mathrm{C}^1(G,L^*) \longrightarrow \mathrm{Z}^2(G,L^*)$ est l'application de cobord pour le G-groupe L^*). Plus précisément, si f est choisi normalisé (i.e. $f(e,e) = 1$) et à valeurs dans k^*, alors la correspondance annoncée s'obtient, pour $\mu \in \mathrm{C}^1(G,L^*)$ telle que $d(\mu) \in \mathrm{Z}^2(G,k^*)$, par

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f) \\ g & \longmapsto & \text{conjugaison par } \mu(g)a_g \end{array}$$

Preuve du théorème : Commençons par montrer que si f est supposé normalisé et à valeurs dans k^* alors pour tout $\mu \in \mathrm{C}^1(G,L^*)$ telle que $d(\mu) \in \mathrm{Z}^2(G,k^*)$, l'application

$$\theta : g \longmapsto \text{conjugaison par } \mu(g)a_g$$

est bien un relevé. En premier lieu, puisque f est normalisé, on a pour tout $g \in G$, $f(e,g) = f(g,e) = 1$ et le plongement naturel de L dans $\mathfrak{A}_f$ est donné par $\lambda \longmapsto \lambda a_e$. Ainsi, pour $\lambda \in L$, on a

$$\begin{array}{rcl} \theta(g)(\lambda a_e) & = & \mu(g)a_g \lambda a_e (\mu(g)a_g)^{-1} = \mu(g)a_g \lambda a_e \mu(g)^{-g^{-1}} f(g,g^{-1})^{-g^{-1}} a_{g^{-1}} \\ & = & \mu(g)\lambda^g f(g,e) a_g \mu(g)^{-g^{-1}} f(g,g^{-1})^{-g^{-1}} a_{g^{-1}} \\ & = & \mu(g)\lambda^g \mu(g)^{-1} f(g,g^{-1})^{-1} f(g,g^{-1}) a_e \\ & = & \lambda^g a_e \end{array}$$

et donc l'action de $\theta(g)$ sur L coïncide avec celle de g.

Reste à voir que θ est bien un monomorphisme : pour tout $g,h \in G$ on a

$$\mu(g)a_g \mu(h)a_h = \mu(g)\mu(h)^g f(g,h) a_{gh} = \mu(gh) f_0(g,h) a_{gh}$$

où $f_0 = d(\mu)f \in Z^2(G,k^*)$. Comme $f_0(g,h) \in k^* = Z(\mathfrak{A}_f)^*$, la conjugaison par l'élément $f_0(g,h)$ vaut l'identité. Ainsi, on a $\theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h)$. Par ailleurs, θ est bien injective car $g \in \ker(\theta) \Longleftrightarrow \mu(g)a_g \in k^* \Longrightarrow g = e$.

Venons-en maintenant à la preuve du coeur du théorème. Puisque la propriété de relèvement reste vraie par isomorphisme, on peut supposer que f est déjà normalisé (sous cette hypothèse le plongement de L dans $\mathfrak{A}_f$ est canonique).

Supposons donc donné un relèvement $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ et notons alors x^g l'action de l'élément $g \in G$ sur l'élément $x \in \mathfrak{A}_f$ *via* ce relèvement. Le théorème de Skolem-Noether assure qu'il existe $x_g \in \mathfrak{A}_f$ tel que l'action de g sur $\mathfrak{A}_f$ soit la conjugaison par x_g. Ainsi, pour tout $\lambda \in L$, on a $\lambda^g x_g = x_g \lambda$. Cependant, pour tout $\lambda \in L$, on a $\lambda a_g^{-1} = a_g^{-1}\lambda^g$, donc $a_g^{-1}x_g \in Z(La_e) = La_e$. Ainsi, il existe $\mu_g \in L^*$ tel que $x_g = \mu_g a_g$.

Maintenant, pour $g,h \in G$ donnés, la conjugaison par $(\mu_g a_g).(\mu_h a_h)$ doit être égale à celle par $\mu_{gh}a_{gh}$. On en déduit qu'il existe un élément $a(g,h) \in k^* = Z(\mathfrak{A}_f)^*$ tel que $(\mu_g a_g).(\mu_h a_h) = a(g,h)\mu_{gh}a_{gh}$. Ceci équivaut à $\mu_g \mu_h^g f(g,h)a_{gh} = a(g,h)\mu_{gh}a_{gh}$ ou encore

$$\forall g,h \in G,\ \mu_h^g \mu_{gh}^{-1}\mu_g f(g,h) = a(g,h)$$

Cette dernière propriété exprime exactement le fait que le 2-cocyle $(g,h) \longmapsto f(g,h)$ est cohomologue (par le 2-cobord associé à l'application $g \longmapsto \mu_g$) au 2-cocyle $(g,h) \longmapsto a(g,h)$ qui est, par définition, à valeurs dans k^*.

Si on suppose que f est déjà à valeurs dans k^*, alors les relevés sont paramétrés par les applications μ décrites précédemment. Leur ensemble correspond alors $d^{-1}(Z^2(G,k^*))$, mais deux telles applications donnent le même relevé si les conjugaisons associées sont les mêmes, c'est-à-dire si elles différent d'une 1-cochaîne à valeurs dans k^*.

□

Il est facile de décrire des situations où le morphisme $H^2(G,k^*) \longrightarrow H^2(G,L^*)$ n'est pas surjectif et donc où G ne se relève pas. Par ailleurs, signalons que l'image de $H^2(G,k^*)$ dans $H^2(G,L^*)$ apparaît dans d'autres questions relatives aux algèbres simples centrales : on trouvera, par exemple, dans [Ti, Th 3.3.] une caractérisation (sous certaines hypothèses) de la décomposition en produit d'algèbres cycliques d'une algèbre simple centrale qui fait intervenir cette image.

2.— Algèbre des invariants.

On se fixe un 2-cocycle $f \in Z^2(G,k^*)$ normalisé et on considère un relevé de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$. Quitte à modifier f par un cobord on peut supposer que le relevé en question est le relevé canonique $g \longmapsto$ conjugaison par a_g. En effet, considérons un relevé G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ paramétré, d'après ce qui précède, par une application $\mu \in C^1(G,L^*)$ telle que $d(\mu) \in Z^2(G,k^*)$. Considérons alors le 2-cocycle $f_0 = d(\mu)f \in Z^2(G,k^*)$ (quitte à modifier μ par une 1-cochaîne à valeurs dans k^*, on peut supposer que f_0 est aussi normalisé). Comme rappelé dans l'introduction de ce texte, l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathfrak{A}_{f_0} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_f \\ & \sum_\sigma \lambda_\sigma a_\sigma & \longrightarrow & \sum_\sigma \lambda_\sigma \mu(\sigma) a_\sigma \end{array}$$

est alors un k-isomorphisme d'algèbres qui respecte les plongements naturels de L dans $\mathfrak{A}_{f_0}$ et $\mathfrak{A}_f$. Si c_λ désigne la conjugaison par l'élément λ alors l'image par θ de l'automorphisme

c_{a_g} est l'automorphisme $\theta \circ c_{a_g} \circ \theta^{-1}$. Pour x, y tel que $y = \theta(x)$, on a

$$\theta \circ c_{a_g} \circ \theta^{-1}(y) = \theta(a_g x a_g^{-1}) = (\mu(g)a_g)y(\mu(g)a_g)^{-1} = c_{\mu(g)a_g}(y)$$

On en déduit que θ^{-1} envoie le relevé de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ relatif à μ sur le relevé canonique de G dans $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_{f_0})$. On va s'intéresser à l'algèbre $\mathfrak{A}_f^G$ des invariants de $\mathfrak{A}_f$ par G. Ce que l'on vient d'expliquer montre en particulier qu'à k-isomorphisme près l'algèbre $\mathfrak{A}_f^G$ ne dépend pas du relevé que l'on choisit pour G. Ainsi, pour ces questions, on peut toujours se ramener au cas du relevé canonique, le paramètre d'étude devenant f, le 2-cocyle normalisé à valeurs dans k^*.

Caractérisons maintenant les éléments de $\mathfrak{A}_f^G$:

Proposition 2.— *Un élément $x = \sum_\sigma \lambda_\sigma a_\sigma$ appartient à $\mathfrak{A}_f^G$ si et seulement si on a*

$$(SG)\ \ \forall g, \sigma \in G,\ \lambda_\sigma^g = \lambda_{g\sigma g^{-1}} \frac{f(g\sigma g^{-1}, g)}{f(g,\sigma)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
x \in \mathfrak{A}_f^G &\iff \forall g \in G,\ a_g x a_g^{-1} = x \\
&\iff \forall g \in G,\ \sum_\sigma \lambda_\sigma^g f(g,\sigma) f^{-1}(g,g^{-1}) f(g\sigma, g^{-1}) a_{g\sigma g^{-1}} = x \\
&\iff \forall g \in G,\ \sum_\sigma \lambda_\sigma^g f(g,\sigma) f^{-1}(g\sigma g^{-1}, g) a_{g\sigma g^{-1}} = \sum_\sigma \lambda_\sigma a_\sigma \\
&\qquad \Big(\text{car } f(g,g^{-1})^{g\sigma g^{-1}} f(g\sigma g^{-1}, 1) = f(g\sigma, g^{-1}) f(g\sigma g^{-1}, g)\Big) \\
&\iff \forall g, \sigma \in G,\ \lambda_\sigma^g = \lambda_{g\sigma g^{-1}} \frac{f(g\sigma g^{-1}, g)}{f(g,\sigma)}
\end{aligned}$$

□

Pour $\sigma \in G$ fixé, on note $\omega_\sigma \in \mathrm{C}^1(G, k^*)$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \omega_\sigma : & G & \longrightarrow & k^* \\ & g & \longmapsto & \dfrac{f(g\sigma g^{-1}, g)}{f(g,\sigma)} \end{array}$$

Lemme 3.— *Pour tout $\sigma, g, h \in G$, on a $\omega_\sigma(gh) = \omega_{h\sigma h^{-1}}(g)\omega_\sigma(h)$.*

Preuve : Pour tout $\sigma, g, h \in G$ on a

(1) $f(g,h)^{ghgh^{-1}g^{-1}} f(ghgh^{-1}g^{-1}, gh) = f(ghgh^{-1}, h) f(ghgh^{-1}g^{-1}, g)$
(2) $f(hgh^{-1}, h)^g f(g, hg) = f(ghgh^{-1}, h) f(g, hgh^{-1})$
(3) $f(h,g)^g f(g,hg) = f(gh,g) f(g,h)$

En quotientant (1) et (2) on obtient

$$\frac{f(ghgh^{-1}g^{-1}, g)}{f(g, hgh^{-1})} = \frac{f(ghgh^{-1}g^{-1}, gh)}{f(g,hg)} \frac{f(g,h)}{f(hgh^{-1}, h)}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\omega_{h\sigma h^{-1}}(g)\omega_\sigma(h) &= \frac{f(ghgh^{-1}g^{-1}, g)}{f(g, hgh^{-1})} \frac{f(hgh^{-1}, h)}{f(h,g)} \\
&= f(ghgh^{-1}g^{-1}, gh) \frac{f(g,h)}{f(g,hg) f(h,g)}
\end{aligned}$$

Comme d'après (3) on a $\dfrac{f(g,h)}{f(g,h\sigma)f(h,\sigma)} = \dfrac{1}{f(gh,\sigma)}$, on en déduit finalement que

$$\omega_{h\sigma h^{-1}}(g)\omega_\sigma(h) = \frac{f(gh\sigma h^{-1}g^{-1},gh)}{f(gh,\sigma)} = \omega_\sigma(gh)$$

Cette propriété traduit simplement le fait que, pour tout $g,h,\sigma \in G$, on a $(a_\sigma^h)^g = a_\sigma^{gh}$.

□

Notations : Dans la suite de ce texte, pour $\sigma \in G$, on notera

- $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$, le centralisateur de σ dans G,
- L_σ, le corps $L^{\mathrm{Cen}_G(\sigma)}$ des invariants de L par $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$,
- $\widehat{\sigma}$, une classe de représentants de l'ensemble quotient $G/\mathrm{Cen}_G(\sigma)$,
- $\widetilde{\sigma}$, la classe de conjugaison de σ : $\widetilde{\sigma} = \left\{g\sigma g^{-1}/g \in \widehat{\sigma}\right\}$ (description biunivoque),
- G_{conj}, une classe de représentants de l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Une première conséquence du lemme 3 est que la restriction de ω_σ à $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$ est un morphisme de groupes et que si $\sigma,\sigma' \in G$ sont deux éléments conjugués, alors les fonctions ω_σ et $\omega_{\sigma'}$ restreintes aux centralisateurs de σ et σ' sont égales. Plus précisément, si $\sigma' = g\sigma g^{-1}$, alors on a $\mathrm{Cen}_G(\sigma') = g\mathrm{Cen}_G(\sigma)g^{-1}$ et, pour tout $h \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, si l'on considère $h' = ghg^{-1}$, on a

$$\omega_{\sigma'}(h') = \omega_{g\sigma g^{-1}}(h') = \frac{\omega_\sigma(h'g)}{\omega_\sigma(g)} = \frac{\omega_\sigma(gh)}{\omega_\sigma(g)} = \frac{\omega_{h\sigma h^{-1}}(g)\omega_\sigma(h)}{\omega_\sigma(g)} = \omega_\sigma(h)$$

Cette propriété va être importante pour l'étude du centre $\mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G)$ à venir. Mais commençons par étudier l'algèbre $\mathfrak{A}_f^G$ elle-même : on considère, pour $\sigma \in G$ donné, le sous-L-espace vectoriel de $\mathfrak{A}_f$

$$E_\sigma = \left\{ x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}} \right\}$$

On a bien sur $\mathfrak{A}_f = \bigoplus_{\sigma\in G_{\mathrm{conj}}} E_\sigma$. La relation (SG) montre que l'action de G laisse stable chaque E_σ, on en déduit donc que

$$\mathfrak{A}_f^G = \bigoplus_{\sigma\in G_{\mathrm{conj}}} E_\sigma^G$$

où E_σ^G désigne l'ensemble des invariants de E_σ par G.

Théorème 4.— *Pour tout $\sigma \in G_{\mathrm{conj}}$, l'ensemble E_σ^G est (non canoniquement) un sous-L_σ-espaces vectoriels de $\mathfrak{A}_f$. On a* $\dim_{L_\sigma} E_\sigma^G = 1$ *et plus précisément,*

$$E_\sigma^G = \mathrm{Vect}_{L_\sigma}(u) \text{ avec } u = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{\lambda_0^g}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}}$$

où $\lambda_0 \in L$ est un élément non nul qui vérifie $\lambda_0^g = \lambda_0\omega_\sigma(g)$ pour tout $g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$.

En conséquence de quoi on a $\dim_k \mathfrak{A}_f^G = o(G)$.

Preuve : Le sous-groupe E_σ^G est un L_σ-espaces vectoriels, pour la loi de composition externe suivante :

$$\begin{array}{ccc} L_\sigma \times E_\sigma^G & \longrightarrow & E_\sigma^G \\ \left(\lambda, x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}}\right) & \longmapsto & \lambda.x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda^g \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}} \end{array}$$

En effet, il est clair que les axiomes définissant la structure d'espace vectoriel sont bien vérifiés, la seule chose à détailler est que la loi de composition est bien à valeurs dans E_σ^G. Considérons $\lambda \in L_\sigma$ et $x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}} \in E_\sigma^G$, pour tout $h \in G$ et $g \in \widehat{\sigma}$ on a

$$(\lambda^g \lambda_{g\sigma g^{-1}})^h = \lambda^{hg} \lambda^h_{g\sigma g^{-1}} = \lambda^{hg} \lambda_{hg\sigma g^{-1}h^{-1}} \frac{f(hg\sigma g^{-1}h^{-1}, h)}{f(h, g\sigma g^{-1})}$$

Pour montrer que $\lambda.x \in E_\sigma^G$ il faut donc montrer que pour tout $h \in G$ et tout $g \in \widehat{\sigma}$, on a $\lambda^{hg} = \lambda^{g'}$ où $g' \in \widehat{\sigma}$ est le représentant de hg modulo $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$. Or, il existe $\tau \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$ tel $hg = g'\tau$, et donc comme $\lambda \in L_\sigma$, on a $\lambda^{hg} = \lambda^{g'\tau} = \lambda^{g'}$. Ainsi, $\lambda.x \in E_\sigma^G$.

On remarque, au passage, qu'en considérant k comme sous-corps de L_σ alors la structure induite par cette loi à k redonne la structure de k-espace vectoriel naturel de E_σ^G (c'est-à-dire celle obtenue par la multiplication à gauche).

Si $x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}}$ et $y = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \mu_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}}$ sont deux éléments non nuls de E_σ^G, alors pour tout $g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, on a

$$\lambda_\sigma^g = \lambda_\sigma \omega_\sigma(g) \text{ et } \mu_\sigma^g = \mu_\sigma \omega_\sigma(g)$$

et donc $\lambda_\sigma/\mu_\sigma$ est invariant par $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$. Il existe donc $\alpha \in L_\sigma$ tel que $\mu_\sigma = \alpha\lambda_\sigma$. On a alors

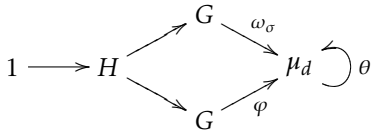
$$\begin{aligned} \alpha.x &= \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \alpha^g \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}} = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \alpha^g \lambda_\sigma^g \omega_\sigma(g)^{-1} a_{g\sigma g^{-1}} \\ &= \sum_{g\in\widehat{\sigma}} (\alpha\lambda_\sigma)^g \omega_\sigma(g)^{-1} a_{g\sigma g^{-1}} = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} (\mu_\sigma)^g \omega_\sigma(g)^{-1} a_{g\sigma g^{-1}} \\ &= \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \mu_{g\sigma g^{-1}} \omega_\sigma(g)\omega_\sigma(g)^{-1} a_{g\sigma g^{-1}} = y \end{aligned}$$

Ceci prouve que E_σ^G est au plus une droite L_σ-vectorielle. Reste donc à montrer que $E_\sigma^G \neq \{0\}$.

Commençons par regarder la condition (SG) quand g parcourt $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$. Dans cette situation, ω_σ est un élément de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Cen}_G(\sigma), k^*)$. Si $d = o(\mathrm{Im}(\omega_\sigma))$, on a $\mathrm{Im}(\omega_\sigma) = \mu_d \subset k^*$. Considérons le sous-groupe $H = \ker(\omega_\sigma)$, on a alors $\mathrm{Cen}_G(\sigma)/H \simeq \mu_d$ et l'extension L^H/L_σ est cyclique de degré d. Comme $\mu_d \subset k^*$ et que d est premier à la caractéristique de k (puisque $\sharp\mu_d = d$), l'extension L^H/L_σ est kummérienne et il existe donc un élément $\alpha \in k^*$ tel que $\ell = \sqrt[d]{\alpha} \in L^H$ soit un élément primitif. On considère alors l'épimorphisme canonique

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G = \mathrm{Gal}(L/L_\sigma) & \longrightarrow & \mu_d \\ & g & \longrightarrow & \dfrac{\ell^g}{\ell} \end{array}$$

Puisque ω_σ et φ ont même noyau H, il existe $\theta \in \mathrm{Aut}(\mu_d)$ tel que $\omega_\sigma = \theta \circ \varphi$.



Comme $\mathrm{Aut}(\mu_d) \simeq (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$, il existe alors $r \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ tel que $\theta(\xi) = \xi^r$ pour tout $\xi \in \mu_d$. Posons $\lambda_0 = \ell^r$, on a alors pour tout $g \in G$,

$$\lambda_0^g = (\ell^r)^g = (\ell^g)^r = \varphi(g)^r \ell^r = \theta \circ \varphi(g) \lambda_0 = \omega_\sigma(g)\lambda_0$$

Prenons maintenant un élément $g \in G$ quelconque et posons

$$\lambda_{g\sigma g^{-1}} = \frac{\lambda_0^g}{\omega_\sigma(g)}$$

Cette définition est sans ambiguïté, car si $g, g' \in G$ sont tels que $g\sigma g^{-1} = g'\sigma g'^{-1}$ alors il existe $h \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$ tel que $g' = gh$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0^{g'}}{\omega_\sigma(g')} &= \frac{\lambda_0^{gh}}{\omega_\sigma(gh)} = \frac{(\lambda_0^h)^g}{\omega_\sigma(g)\omega_\sigma(h)} \text{ (d'après le lemme 3)} \\ &= \lambda_0^g \frac{\omega_\sigma(h)^g}{\omega_\sigma(g)\omega_\sigma(h)} = \frac{\lambda_0^g}{\omega_\sigma(g)} \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que $x = \sum_{g \in \widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}}$ est bien un élément de E_σ^G. Si $g_0 \in G$, alors pour tout $g \in \widehat{\sigma}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{g_0 g\sigma g^{-1}}^{g_0} &= \frac{\lambda_0^{g_0 g}}{\omega_\sigma(g)} = \lambda_{g_0 g\sigma g^{-1} g_0^{-1}} \frac{\omega_\sigma(g_0 g)}{\omega_\sigma(g)} \\ &= \lambda_{g_0 g\sigma g^{-1} g_0^{-1}} \frac{\omega_{g\sigma g^{-1}}(g_0)\omega_\sigma(g)}{\omega_\sigma(g)} \text{ (d'après le lemme 3)} \\ &= \lambda_{g_0 g\sigma g^{-1} g_0^{-1}} \omega_{g\sigma g^{-1}}(g_0) \end{aligned}$$

et donc x vérifie bien la condition (SG). Ainsi, on a bien

$$E_\sigma^G = \mathrm{Vect}_{L_\sigma}(u) \text{ avec } u = \sum_{g \in \widehat{\sigma}} \frac{\lambda_0^g}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}}$$

où $\lambda_0 \in L$ est un élément non nul qui vérifie $\lambda_0^g = \lambda_0 \omega_\sigma(g)$ pour tout $g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$. On remarque que, réciproquement, pour n'importe quel choix de $\lambda_0 \in L$ non nul vérifiant que pour tout $g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$ on ait $\lambda_0^g = \lambda_0 \omega_\sigma(g)$, l'élément $u = \sum_{g \in \widehat{\sigma}} \frac{\lambda_0^g}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}}$ engendre bien sur L_σ l'espace E_σ^G.

On déduit de cela que

$$\dim_k(E_\sigma^G) = \dim_k(L_\sigma) \dim_{L\sigma}(E_\sigma^G) = [G : \mathrm{Cen}_G(\sigma)]$$

et donc, l'équation des classes permet d'écrire

$$\dim_k \mathfrak{A}_f^G = \dim_k \bigoplus_{\sigma \in G_{\mathrm{conj}}} E_\sigma^G = \sum_{\sigma \in G_{\mathrm{conj}}} [G : \mathrm{Cen}_G(\sigma)] = o(G)$$

□

Abordons maintenant l'étude du centre $\mathfrak{A}_f^G$ et établissons préalablement deux lemmes à cette fin.

Lemme 5.— *Posons $n = o(G)$. Il existe une L-base, $(e_1, \cdots, e_n)$, de L^n telle que si l'on pose pour $i = 1, \cdots, n$, $e_i = (\lambda_\sigma^{(i)})_{\sigma \in G}$ alors $\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma^{(i)} a_\sigma \in \mathfrak{N}_f^G$.*

Preuve : Considérons $G_{\text{conj}} = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ et, pour tout $i \in \{1, \cdots r\}$, posons $\widehat{\sigma_i} = \{g_{i,1}, \cdots, g_{i,h_i}\}$ (on convient que $g_{i,1} = e$). Pour $i \in \{1, \cdots r\}$ fixé, on considère un élément non nul

$$x = \sum_{j=1}^{h_i} \lambda_{g_{i,j}\sigma_i g_{i,j}^{-1}} a_{g_{i,j}\sigma_i g_{i,j}^{-1}} \in E_{\sigma_i}^G$$

On sait qu'aucun des $\lambda_{g_{i,j}\sigma_i g_{i,j}^{-1}}$ n'est nul, et que pour tout $j = 1, \cdots, h_i$, on a

$$\lambda_{g_{i,j}\sigma_i g_{i,j}^{-1}} = \frac{\lambda_{\sigma_i}^{g_{i,j}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,j})}$$

Comme $h_i = [G : \text{Cen}_G(\sigma)]$, on a $h_i = \dim_k L_{\sigma_i}$ et l'on considère $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{h_i}\}$ une k-base de L_{σ_i}. Pour tout $s = 1, \cdots, h_i$, on pose

$$(e_{\sigma_i})_s = \left(\frac{(\alpha_s \lambda_{\sigma_i})^{g_{i,1}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,1})}, \cdots, \frac{(\alpha_s \lambda_{\sigma_i})^{g_{i,h_i}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,h_i})} \right) \in L^{h_i}$$

On remarque que $\sum_{j=1}^{h_i} \frac{(\alpha_s \lambda_{\sigma_i})^{g_{i,j}}}{\omega_\sigma(g_{i,j})} a_{g_{i,j}\sigma_i g_{i,j}^{-1}} = \alpha_s . x \in E_\sigma^G$ (structure de L_σ-espace vectoriel de E_σ^G introduite dans le théorème 4) et donc le vecteur $(e_{\sigma_i})_s$ est à coordonnées dans E_σ^G. On a, par ailleurs,

$$\det\left(\{(e_{\sigma_i})_s\}_{1 \leq s \leq h_i} \right) = \prod_{j=1}^{h_i} \frac{\lambda_{\sigma_i}^{g_{i,j}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,j})} \begin{vmatrix} \alpha_1^{g_{i,1}} & \cdots & \alpha_1^{g_{i,h_i}} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_s^{g_{i,1}} & \cdots & \alpha_s^{g_{i,h_i}} \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est certainement non nul, car si tel était le cas, il existerait une équation de L-dépendance linéaire pour les $g_{i,1}, \cdots, g_{i,h_i} \in \text{Isom}_k(L_{\sigma_i}, L)$, ce qui est contraire au lemme de Dedekind.

Ainsi, la famille $\{(e_{\sigma_i})_s\}_{1 \leq s \leq h_i}$ est une L-base de L^{h_i}. On rajoute alors des zéros aux coordonnées manquantes des vecteurs $(e_{\sigma_i})_s$,

$$(e_{\sigma_i})_s = \left(\overbrace{0, \cdots, 0}^{\sharp\widehat{\sigma_1}}, \cdots, \cdots, \frac{(\alpha_s \lambda_{\sigma_i})^{g_{i,1}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,1})}, \cdots, \frac{(\alpha_s \lambda_{\sigma_i})^{g_{i,h_i}}}{\omega_{\sigma_i}(g_{i,h_i})}, \cdots, \cdots, \overbrace{0, \cdots, 0}^{\sharp\widehat{\sigma_r}} \right)$$

et $\{(e_{\sigma_i})_s\}_{1 \leq s \leq h_i}$ devient alors une famille L-libre de L^n.

La famille $\{(e_{\sigma_i})_s\}_{1 \leq i \leq r, 1 \leq s \leq h_i}$ est visiblement une famille L-libre de L^n satisfaisant aux conditions demandées, mais comme cette dernière est de cardinal

$$\sum_{i=1}^{r} h_i = \sum_{\sigma \in G_{\text{conj}}} [G : \text{Cen}_G(\sigma)] = o(G) = n$$

on en déduit finalement qu'il s'agit bien d'une base.

□

Notons maintenant $\mathfrak{A}_f(k) = \bigoplus_{\sigma\in G} ka_\sigma$ (c'est une sous-algèbre de $\mathfrak{A}_f$ puisque f est à valeurs dans k^*) et considérons, pour $\sigma \in G$,

$$E_\sigma^G(k) = E_\sigma^G \cap \mathfrak{A}_f(k)$$

Lemme 6.— *Pour tout $\sigma \in G$, $E_\sigma^G(k)$ est un k-espace vectoriel de dimension 0 ou 1 et l'on a*

$$\dim_k E_\sigma^G(k) = 1 \Longleftrightarrow \omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_G(\sigma)} \equiv 1$$

Preuve : L'ensemble $E_\sigma^G(k)$ est visiblement un k-espace vectoriel (intersection de deux k-espaces vectoriels). Un élément $x \in E_\sigma^G(k)$ s'écrit

$$x = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \lambda_{g\sigma g^{-1}} a_{g\sigma g^{-1}} = \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{\lambda_\sigma^g}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}} = \lambda_\sigma \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{1}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}}$$

ce qui prouve que $E_\sigma^G(k)$ est au plus une droite vectorielle.

Supposons que $E_\sigma^G(k) \neq \{0\}$ et soit $\lambda_\sigma \in k^*$ tel que $\lambda_\sigma \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{1}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}} \in E_\sigma^G(k)$. Pour tout $g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, on a

$$\lambda_\sigma = \lambda_\sigma^g = \lambda_{g\sigma g^{-1}} \omega_\sigma(g) = \lambda_\sigma \omega_\sigma(g)$$

et donc $\omega_\sigma(g) = 1$.

Réciproquement, supposons que $\omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_G(\sigma)} \equiv 1$. Le choix de $\lambda_0 = 1$ dans le théorème 4 montre que

$$E_\sigma^G = \left\{ \sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{\lambda^g}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}} / \ \lambda \in L_\sigma \right\}$$

et donc, on en déduit que

$$E_\sigma^G(k) = k.\left(\sum_{g\in\widehat{\sigma}} \frac{1}{\omega_\sigma(g)} a_{g\sigma g^{-1}} \right) \neq \{0\}$$

□

Théorème 7.— *On a $\mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) = \mathfrak{A}_f^G \cap \mathfrak{A}_f(k) = \bigoplus_{\sigma\in G_{\mathrm{conj}}} E_\sigma^G(k)$. En conséquence de quoi, on a $\dim_k \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) = \sharp S$ où $S = \{\sigma \in G_{\mathrm{conj}} / \ \omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_G(\sigma)} \equiv 1\}$.*

Preuve : Soit $y = \sum_{\tau\in G} \mu_\tau a_\tau \in \mathfrak{A}_f^G$, on a

$$
\begin{aligned}
& y \in \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) \Longleftrightarrow \forall x = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma a_\sigma \in \mathfrak{A}_f^G,\ xy = yx \\
\Longleftrightarrow & \sum_{\sigma,\tau\in G} \lambda_\sigma \mu_\tau^\sigma f(\sigma,\tau) a_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma,\tau\in G} \lambda_\sigma^\tau \mu_\tau f(\tau,\sigma) a_{\tau\sigma} \\
\Longleftrightarrow & \sum_{\sigma,\tau\in G} \lambda_\sigma \mu_\tau^\sigma f(\sigma,\tau) a_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma,\tau\in G} \lambda_{\tau\sigma\tau^{-1}} \mu_\tau f(\tau\sigma\tau^{-1},\tau) a_{\tau\sigma} \\
\Longleftrightarrow & \sum_{\rho\in G} \left(\sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) \right) a_\rho = \sum_{\rho\in G} \left(\sum_{\tau\in G} \lambda_{\rho\tau^{-1}} \mu_\tau f(\rho\tau^{-1},\tau) \right) a_\rho \\
\Longleftrightarrow & \forall \rho \in G,\ \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) = \sum_{\tau\in G} \lambda_{\rho\tau^{-1}} \mu_\tau f(\rho\tau^{-1},\tau) \\
\Longleftrightarrow & \forall \rho \in G,\ \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \mu_{\sigma^{-1}\rho} f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) \\
& \text{(On a effectué le changement de variables } \sigma = \rho\tau^{-1}) \\
\Longleftrightarrow & \forall \rho \in G,\ \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) \left(\mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} - \mu_{\sigma^{-1}\rho} \right) = 0
\end{aligned}
$$

On en déduit que pour tout $x = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma a_\sigma \in \mathfrak{A}_f^G$, le vecteur $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in G} \in L^n$ est solution du système linéaire défini par l'ensemble de constantes

$$\left\{ f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) \left(\mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} - \mu_{\sigma^{-1}\rho} \right) \right\}_{\sigma,\rho}$$

Le lemme 5 affirmant qu'il existe une L-base de L^n constitué de vecteurs $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in G} \in L^n$ tel que $\sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma a_\sigma \in \mathfrak{A}_f^G$, on en déduit que toutes les constantes du système sont nulles. Ainsi, on a

$$y \in \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) \Longleftrightarrow \forall \rho,\sigma \in G,\ f(\sigma,\sigma^{-1}\rho) \left(\mu^\sigma_{\sigma^{-1}\rho} - \mu_{\sigma^{-1}\rho} \right) = 0$$

ce qui équivaut, après le changement de variables $\tau = \sigma^{-1}\rho$, à

$$y = \sum_{\tau\in G} \mu_\tau a_\tau \in \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) \Longleftrightarrow \forall \sigma,\tau \in G,\ \mu_\tau^\sigma = \mu_\tau$$

ce qui prouve que $\mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) = \mathfrak{A}_f^G \cap \mathfrak{A}_f(k) = \bigoplus_{\sigma\in G_{\mathrm{conj}}} E_\sigma^G(k)$. La suite du théorème découle immédiatement du lemme 6.

□

Corollaire 8.— *Si G n'est pas abélien, alors l'algèbre $\mathfrak{A}_f^G$ n'est pas commutative.*

Preuve : Si G n'est pas abélien, alors G_{conj} compte strictement moins d'éléments que G et donc $\dim_k \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) < o(G)$. Le théorème 4 affirme que $\dim_k \mathfrak{A}_f^G = o(G)$, ce qui prouve le corollaire.

□

Cas où G est abélien. Dans le cas où G est abélien, l'application $(\sigma,g) \longmapsto \omega_\sigma(g)$ est donc un homomorphisme de groupes relativement à chaque variable σ et g. On en déduit que cette application est un élément de $\mathrm{Z}^2(G,k^*)$ (l'action de G sur k^* étant triviale). En particulier, l'application $(g,h) \longmapsto f(h,g)$ est aussi un élément de $\mathrm{Z}^2(G,k^*)$.

En appliquant ce qui précède, pour $\sigma \in G$ fixé, on peut écrire $E_\sigma^G = A_\sigma a_\sigma$ avec $A_\sigma = \{\lambda \in L/\ \forall g \in G,\ \lambda^g = \lambda\omega_\sigma(g)\}$ qui est un k-espace vectoriel de dimension 1 et l'on a $\mathfrak{A}_f^G =$

$\bigoplus_{\sigma\in G} A_\sigma a_\sigma$. Le noyau du morphisme $\omega : \sigma \mapsto \omega_\sigma$ est constitué des éléments $\sigma \in G$ vérifiant $A_\sigma = k$. Ainsi, on a $\sigma \in \ker(\omega)$ si et seulement si $A_\sigma = k$. Dans le cas abélien, on a donc

$$Z\left(\mathfrak{A}_f^G\right) = \bigoplus_{\sigma\in\ker(\omega)} A_\sigma a_\sigma = \bigoplus_{\sigma\in\ker(\omega)} k a_\sigma$$

En particulier, $\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ divise $o(G)$, mais on peut être plus précis sur ce point :

Proposition 9.— *Si G est un groupe abélien alors $o(G)/\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est un carré parfait.*

Preuve : L'application ω est une forme bilinéaire alternée et $\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est égale à l'ordre du noyau de ω. La forme ω induit sur le groupe quotient $A = G/\ker(\omega)$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On sait alors (voir par exemple [Da]) qu'il existe un sous-groupe isotropique A_0 tel que $A \cong A_0 \times \widehat{A_0}$, où $\widehat{A_0}$ désigne le groupe des caractères de A_0. En particulier, on a $o(A) = o(A_0)^2$ et notre proposition découle alors de cette propriété.

□

Lorsque $G = C_n$ est cyclique, il est célèbre que $H^2(G, L^*) \simeq k^*/N(L^*)$ et que tout 2-cocycle est cohomologue à un cocycle paramétré par des éléments de $k^*/N(L^*)$ et donc à valeurs dans k^*. Ces cocycles sont donc tous éléments de $Z^2(G, k^*)$ si bien que l'application naturelle $H^2(G, k^*) \longrightarrow H^2(G, L^*)$ est surjective. Par ailleurs, les éléments de $Z^2(G, k^*)$ sont symétriques (i.e. $\forall g, h \in G$, $f(g, h) = f(h, g)$). On en déduit que

Proposition 10.— *Si G est cyclique, alors pour toute extension galoisienne L/k de groupe G et pour tout $f \in Z^2(G, L^*)$, G se relève à $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{A}_f)$ et l'on a*

$$\mathfrak{A}_f^G = Z(\mathfrak{A}_f^G) = \bigoplus_\sigma k a_\sigma$$

Pour les groupes abéliens de rang ≥ 2, les choses se compliquent. Le calcul machine montre que, même dans le cas non cyclique, les dimensions possibles pour $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ n'atteignent pas nécessairement tous les entiers $o(G)/d^2$ pour les $d^2 | o(G)$. Nous donnons ici quelques résultats numériques :

G	C_2^2	$C_2 \times C_4$	C_3^2	$C_2 \times C_6$	$C_2 \times C_8$
$o(G)$	4	8	9	12	16
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	1 ou 4	2 ou 8	1 ou 9	3 ou 12	4 ou 16
G	C_4^2	$C_3 \times C_6$	$C_2 \times C_{10}$	$C_2 \times C_{12}$	$C_4 \times C_6$
$o(G)$	16	18	20	24	24
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	1, 4 ou 16	2 ou 18	5 ou 20	6 ou 24	6 ou 24
G	C_5^2	$C_3 \times C_9$	$C_2 \times C_{14}$	$C_2 \times C_{16}$	$C_4 \times C_8$
$o(G)$	25	27	28	32	32
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	1 ou 25	3 ou 27	7 ou 28	8 ou 32	2, 8 ou 32
G	C_6^2	C_2^3	$C_2^2 \times C_4$	$C_2^2 \times C_6$	C_3^3
$o(G)$	36	8	16	24	27
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	1, 4, 9 ou 36	2 ou 8	4 ou 16	6 ou 24	3 ou 27
G	$C_2 \times C_4^2$	$C_2^2 \times C_8$	C_2^4	$C_2^3 \times C_4$	C_2^5
$o(G)$	32	32	16	32	32
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	2, 8 ou 32	8 ou 32	1, 4 ou 16	2, 8 ou 32	2, 8 ou 32

On remarque que dans ce tableau, pour les groupes d'ordre 32, $G = C_2 \times C_{16}$ et $G = C_2^2 \times C_8$, la dimension 2 n'est pas atteinte (alors que $2 = 32/(4)^2$) et que pour le groupe d'ordre 16, $G = C_2^2 \times C_4$, la dimension 1 n'est pas atteinte (alors que $1 = 16/(4)^2$).

Note : Dans le tableau ci dessus, ainsi que dans tous les tableaux numériques du même acabit que nous donnerons dans la suite de ce texte, les dimensions indiquées pour $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ sont toutes atteintes pour un bon choix de f. Ces résultats numériques sont obtenus par calcul formel sous le logiciel maxima.

3.— Totalité.

3.1.— Généralités. La dimension du centre de $\mathfrak{A}_f^G$ est intimement liée à l'arithmétique du groupe G. Nous allons maintenant étudier les groupes pour lesquels cette dimension est toujours maximale :

Définition 11.— *Soit k un corps et G un groupe fini se réalisant comme groupe de Galois sur k. On dit que G est total pour k si, pour toute extension galoisienne L/k de groupe G et tout élément $f \in \mathrm{Im}(H^2(G,k^*) \longrightarrow H^2(G,L^*))$, la dimension de $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ (pour n'importe quel relevé de G) est maximale (i.e. égale au nombre de classes de conjugaison de G).*

Par exemple, conséquemment à l'étude mené sur le groupe de Klein dans le paragraphe 1, on voit que si ce dernier se réalise sur un corps k alors il est total pour k si et seulement si k est de caractéristique 2.

La totalité équivaut donc à dire que l'application $f \longmapsto \dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ est constante, puisque le choix pour f du cocycle trivial donne pour $\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$ une valeur maximale. L'étude précédente montre que la totalité d'un groupe G pour un corps k ne dépend pas du corps L qui réalise G. Si G se réalise comme groupe de Galois sur k, la question de sa totalité pour k est équivalente à (avec les notations des paragraphes précédents)

$$(T) \quad \forall f \in Z^2(G,k^*),\ \forall \sigma \in G,\ \omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_G(\sigma)} \equiv 1$$

La propriété (T) existe indépendamment du fait que G se réalise sur k. Quand un groupe G satisfera à la condition (T) pour tous les corps k, on dira que G est *vraiment total*. Plus globalement, étant donné un groupe G et un élément $\sigma \in G$, on dira que σ est *vraiment total* si

$$\forall k \text{ corps},\ \forall f \in Z^2(G,k^*),\ \forall g \in \mathrm{Cen}_G(\sigma),\ \omega_\sigma(g) = 1$$

On considérera alors *l'ensemble de totalité* de G :

$$T_G = \{\sigma \in G/\ \sigma \text{ vraiment total}\}$$

Cet ensemble étant stable par l'action de conjugaison, on notera $\widetilde{T_G}$ le quotient de T_G par cette action. Dire que G est vraiment total équivaut à dire que $T_G = G$ et, sous cette condition, la dimension (toujours maximale) de $Z(\mathfrak{A}_f^G)$ vaut exactement $\sharp\widetilde{T_G} = \sharp G_{\mathrm{conj}}$. Ceci incite à considérer, en toute généralité, l'entier $\sharp\widetilde{T_G}$ que nous appelons *ordre de totalité* du groupe G.

Proposition 12.— *Le groupe* $\mathrm{Aut}(G)$ *agit (par restriction) sur l'ensemble T_G et, par suite, le groupe des automorphismes extérieurs de G,* $\mathrm{Out}(G)$*, agit naturellement sur l'ensemble $\widetilde{T_G}$. En conséquence de quoi, si G est abélien, T_G est un sous-groupe caractéristique de G.*

Preuve : Commençons par remarquer que si $f \in Z^2(G,k^*)$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ alors l'application

$$\begin{array}{rccc} f^\varphi : & G \times G & \longrightarrow & k^* \\ & (g,h) & \longmapsto & f(\varphi(g),\varphi(h)) \end{array}$$

est bien un élément de $Z^2(G,k^*)$ (ce fait est immédiat, une fois pris en compte que l'action de G sur k^* est triviale). Il s'agit de montrer que si $\sigma \in G$ est vraiment total alors $\varphi(\sigma)$ l'est aussi pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Pour $f \in Z^2(G,k^*)$, on notera ω_σ^f l'application ω_σ relative au choix de f. Comme $\mathrm{Cen}_G(\varphi(\sigma)) = \varphi(\mathrm{Cen}_G(\sigma))$, pour tout $h \in \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, on a

$$\omega^f_{\varphi(\sigma)}(\varphi(h)) = \omega^{f^\varphi}_\sigma(h)$$

Si σ est supposé vraiment total, alors $\omega^{f^\varphi}_\sigma \equiv 1$ sur $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$. On en déduit que $\omega^f_{\varphi(\sigma)} \equiv 1$ sur $\mathrm{Cen}_G(\varphi(\sigma))$ et ce, en toute généralité sur $f \in Z^2(G,k^*)$. L'élément $\varphi(\sigma)$ est donc lui aussi vraiment total.

□

Nous avons vu (proposition 10) que les groupes cycliques étaient des groupes vraiment totaux. Cette propriété va permettre de construire d'autres exemples.

Proposition 13.— *Soit G un groupe fini de centre $Z(G)$. Si $Z(G)$ est vraiment total et si, pour tout $\sigma \in G - Z(G)$, le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$ de σ est vraiment total, alors G est vraiment total.*

Preuve : Considérons un corps k, un 2-cocycle $f \in Z^2(G,k^*)$, un élément $\sigma \in G$ et un sous-groupe G' contenant σ. L'application de restriction $Z^2(G,k^*) \longrightarrow Z^2(G',k^*)$ associe à f un élément $f' \in Z^2(G',k^*)$ et les fonctions ω_σ associées à f et à f' coïncident sur G'.

Prenons un élément $\sigma \in G - Z(G)$ et posons $G' = \mathrm{Cen}_{G'}(\sigma)$. Puisque G' est vraiment total par hypothèse, on en déduit que ω_σ est trivial sur G'.

Prenons maintenant un élément $\sigma \in Z(G)$ et un élément quelconque $g \in G$. Et distinguons deux cas :

• $g \notin Z(G)$, on $\sigma \in \mathrm{Cen}_G(g)$ et alors

$$\omega_\sigma(g) = \frac{f(\sigma,g)}{f(g,\sigma)} = \frac{1}{\omega_g(\sigma)} = 1$$

d'après ce qui précède.

• $g \in Z(G)$, puisque $Z(G)$ est supposé vraiment total, on a $\omega_\sigma(g) = 1$.

On en déduit finalement que G est vraiment total.

□

Corollaire 14.— *Si n désigne un entier radicalaire (i.e. n est produit de nombres premiers distincts deux à deux) alors tout groupe d'ordre n est vraiment total.*

Preuve : La preuve va s'effectuer par récurrence sur la longueur k de l'entier radicalaire $n = p_1 \cdots p_k$.

Pour $k = 1$, un groupe d'ordre $n = p_1$ est cyclique et donc, d'après la proposition 10, est total.

Supposons la propriété vraie pour jusqu'au rang $k \geq 1$ et considérons un groupe G d'ordre $n = p_1 \cdots p_{k+1}$ radicalaire.

Le centre $Z(G)$ de G est d'ordre divisant n et est donc d'ordre un produit de nombres premiers distincts deux à deux. Le centre $Z(G)$ étant abélien, il est donc cyclique et par conséquent vraiment total.

Considérons maintenant un élément $\sigma \in G - Z(G)$. Le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$ de σ est un sous-groupe strict de G d'ordre divisant n. Cet ordre est donc égal à un produit d'au

plus k nombres premiers distincts deux à deux et, par hypothèse de récurrence, c'est donc un groupe vraiment total. La proposition 13 assure alors que G est vraiment total.

□

Ce corollaire fournit déjà une vaste famille de groupes totaux. Nous allons nous intéresser dans la suite de ce texte à une autre famille de groupes totaux : *les groupes quasi-CC*.

Définition 15.— *Un groupe G sera dit de type CC (sigle pour "centralisateurs cycliques") si pour tout $g \in G - \{e\}$, le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(g)$ de g dans G est un groupe cyclique.*

Plus généralement, on dira de G qu'il est quasi-CC si son centre, $\mathrm{Z}(G)$, est un groupe cyclique et si pour tout $g \in G - \mathrm{Z}(G)$, le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(g)$ de g dans G est un groupe cyclique.

Les groupes de type CC sont bien sûr quasi-CC. En effet, si G est un groupe de type CC possédant un centre non-trivial, alors le centralisateur de n'importe quel élément $\neq e$ de ce centre vaut G et donc G est cyclique.

Les propositions 10 et 13 impliquent immédiatement qu'un groupe quasi-CC est vraiment total. Tout groupe G d'ordre pq, un produit de deux nombres premiers $p \neq q$, est quasi-CC. En effet, si G est abélien alors il est cyclique et si G est non abélien, le centre $Z(G)$ de G est donc d'ordre $1, p$ ou q et donc dans tous les cas est cyclique. Si l'on prend maintenant un élément $g \in G - \mathrm{Z}(G)$, alors son centralisateur $\mathrm{Cen}_G(g)$ n'est pas égal à G et donc, son ordre vaut p ou q et est lui aussi cyclique.

3.2. Classification des groupes de type CC. La classification que nous allons établir repose sur plusieurs résultats profonds de théorie des groupes, en particulier la classification des groupes de type CA (même définition que pour CC, mais l'on remplace la condition "centralisateurs cyclique" par "centralisateurs abéliens").

Cette classification des groupes de type CA est due, en plusieurs étapes, à Brauer, Suzuki et Wall (voir [BrSuWa] et [Su]) et a constitué un préliminaire important au fameux théorème de Feit-Thompson sur la résolubilité des groupes d'ordre impair. Elle se résume ainsi :

Théorème.— (Brauer-Suzuki-Wall) *Si G désigne un groupe de type CA, alors G satisfait une des conditions suivantes :*

- *G est abélien.*
- *G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$ pour un certain entier $n \geq 1$.*
- *G est un groupe de Frobenius.*

Rappelons qu'un groupe de Frobenius G peut s'écrire comme produit semi-direct non trivial $H \ltimes K$ et donc qu'en particulier un groupe de Frobenius n'est jamais simple.

Nous aurons besoin dans la suite de ce texte de deux résultats sur l'arithmétique des groupes de type CA :

1/ Un groupe de type CA est soit simple, soit résoluble (voir [We]).

2/ Un groupe G, fini, résoluble et de type CA est le produit semi-direct $H \ltimes F$ où F est le groupe de Fitting de G (qui dans cette situation est nécessairement abélien) et H est un certain sous-groupe de $\mathrm{Aut}(F)$ (voir [Wu,Th 9]).

Notations : Pour deux entiers $n, m \geq 2$ et $a \in \mathrm{C}_m^*$ d'ordre divisant n, on notera $\mathrm{C}_n \ltimes_a \mathrm{C}_m$ le produit semi-direct de C_n par C_m où l'action de $\lambda \in \mathrm{C}_n$ sur $x \in \mathrm{C}_m$ est donnée par $x^\lambda = a^\lambda x$.

Théorème 16.— *La collection des groupes de type CC est exactement la réunion des trois classes de groupes suivantes :*

• *Les groupes cycliques.*

• *Les groupe spéciaux linéaires projectifs de dimension 2 sur les corps finis de caractéristique 2,* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$.

• *Les produits semi-directs de deux groupes cycliques* $G = \mathrm{C}_n \ltimes_a \mathrm{C}_m$ *où* $a \in \mathrm{C}_m^*$ *est d'ordre n et vérifie* $\forall x \in \mathrm{C}_n - \{0\},\ a^x - 1 \in \mathrm{C}_m^*$.

Preuve : Si G est un groupe de type CC, il est alors de type CA. On est donc dans une des trois situations suivantes :

1/ G est abélien. Sous cette hypothèse, être de type CC équivaut immédiatement à être cyclique.

2/ G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ pour $q = 2^n$. Montrons que, sous cette hypothèse, G est de type CC.

Remarquons pour commencer que, puisque $\mathbb{F}_q$ est un corps de caractéristique 2, le groupe G s'identifie au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Prenons maintenant une matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ et distinguons deux cas :

a) *Le polynôme caractéristique P de M est séparable.* Sous cette hypothèse, il existe un entier m tel que P se décompose dans $\mathbb{F}_{q^m}$ et comme M est de déterminant 1, il existe $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}^* - \{1\}$ tel que M soit semblable dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})$ à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Maintenant, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})$ commute avec D si et seulement si $b = c = 0$, on en déduit que

$$\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} / \ u \in \mathbb{F}_{q^m}^* \right\} \simeq \mathbb{F}_{q^m}^*$$

Comme M et D sont semblables, les groupes $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})}(D)$ et $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})}(M)$ sont conjugués et donc $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})}(M)$ est cyclique. Maintenant, le groupe $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}(M)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^m})}(M)$, il est par conséquent lui aussi cyclique.

b) *Le polynôme caractéristique P de M est inséparable.* Il possède donc une racine double dans $\overline{\mathbb{F}_q}$, mais puisque M est de déterminant 1, cette racine vaut nécessairement 1. Ainsi, M est semblable à une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q$ (on suppose que $\lambda \neq 0$, car on s'intéresse au stabilisateur de $M \neq I$). Maintenant, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ commute avec T si et seulement si $c = 0$ et $a = d$, on en déduit que

$$\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \ u \in \mathbb{F}_q \right\} \simeq \mathbb{F}_q$$

qui est bien un groupe cyclique. Comme précédemment, on en déduit que le centralisateur $\mathrm{Cen}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}(M)$ est bien cyclique.

3/ G est un groupe de Frobenius. Dans ces conditions, puisque G n'est pas simple, il est résoluble d'après [We]. Donc G est de type CA et est résoluble, ce qui implique d'après [Wu] qu'il est le produit semi-direct $H \ltimes F$ avec F abélien et H un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(F)$. Comme G est de type CC, il en est de même de F et donc F est cyclique. On en déduit que $\mathrm{Aut}(F)$ et donc H sont abéliens, et comme H est de type CC, il est lui aussi cyclique. Finalement, G est de la forme $G = \mathrm{C}_n \ltimes_a \mathrm{C}_m$ avec $a \in \mathrm{C}_m^*$ d'ordre divisant n. Pour finir la preuve, nous allons caractériser les produits $\mathrm{C}_n \ltimes_a \mathrm{C}_m$ qui sont de type CC :

Lemme 17.— *Soient $n, m \geq 2$ des entiers et $a \in C_m^*$ d'ordre divisant n. Les conditions suivantes*

i) $G = C_n \ltimes_a C_m$ est de type CC,

ii) $\forall x \in C_n - \{0\},\ a^x - 1 \in C_m^*$,

sont équivalentes. Dans ces conditions, on a nécessairement $o(a) = n$.

Preuve du lemme 17 : $ii) \Longrightarrow i)$ Il est clair que, sous l'hypothèse ii), a est d'ordre n. Soit $\sigma = (x, y) \in C_n \ltimes_a C_m$ non trivial, le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$ est un groupe cyclique. En effet, soit $\sigma' = (x', y') \in C_n \ltimes_a C_m$, on a

$$\begin{aligned} \sigma' \in \mathrm{Cen}_G(\sigma) &\iff (x,y)(x',y') = (x',y')(x,y) \\ &\iff (x+x', y + a^x y') = (x' + x, y' + a^{x'} y) \\ &\iff y + a^x y' = y' + a^{x'} y \\ &\iff y'(1 - a^x) = y(1 - a^{x'}) \end{aligned}$$

Si $x = 0$ alors $y \neq 0$ et donc $x' = 0$ et ainsi $\mathrm{Cen}_G(\sigma) = C_m$.

Si $x \neq 0$ alors $y' = y(1 - a^x)^{-1}(1 - a^{x'})$ et donc

$$\mathrm{Cen}_G(\sigma) = \left\{(\lambda, y(1 - a^x)^{-1}(1 - a^\lambda))/\ \lambda \in C_n\right\} \simeq C_n$$

non $ii) \Longrightarrow$ non $i)$ Soit $x_0 \in C_n - \{0\}$ tel que $a^{x_0} - 1 \notin C_m^*$. Distinguons deux cas :

1/ $a - 1 \notin C_m^*$. Considérons alors un entier $d \neq 0$ divisant m tel que $d(a-1) \equiv 0 \bmod(m)$. On a alors $a \equiv 1 \bmod(m/d)$ et donc pour tout x, $a^x \equiv 1 \bmod(m/d)$, ce qui implique que $a^x d \equiv d \bmod(m)$. Pour tout $(x, h) \in C_n \ltimes_a C_m$, on a alors

$$(0,d)(x,h) = (x, d+h) = (x, a^x d + h) = (x,h)(0,d)$$

et donc $C_n \ltimes_a C_m$ a un centre non trivial, ce qui rend impossible le fait qu'il soit de type CC.

2/ $a - 1 \in C_m^*$. On a donc $x_0 \neq 1$. Soit $d \not\equiv 0 \bmod(m)$ un entier divisant m tel que $d(a^{x_0} - 1) \equiv 0 \bmod(m)$. Pour tout $x \in C_n$, on a

$$(x_0, 0)(x, d) = (x_0 + x, a^{x_0} d) = (x + x_0, d) = (x,d)(x_0, 0)$$

et donc le centralisateur de $(x_0, 0)$ contient le sous-groupe $< (x, d) >_{x \in C_n}$. Par ailleurs, on a

$$(1,d)(0,-d) = (1, d(1-a)) \neq (1,0) = (0,-d)(1,d)$$

ce qui montre que ce centralisateur n'est pas abélien et donc que $C_n \ltimes_a C_m$ n'est pas de type CC.

□

Le lemme 17 achève la preuve du théorème 16.

□

On obtient alors comme corollaires :

Corollaire 18.— *Pour $n \geq 1$, les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$ sont vraiment totaux. Si le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$ se réalise sur un corps k alors, pour tout $f \in Z^2(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n}), k^*)$, on a*

$$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})}) = 2^n + 1$$

Preuve : La totalité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n})$ découle du fait qu'il est de type CC. La preuve de ce corollaire va donc consister en un dénombrement de ses classes de conjugaisons.

Pour $n = 1$, on a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ et l'on a vu que S_3 contenait bien $3 = 2^1 + 1$ classes de conjugaisons. On va donc supposer maintenant que $n \geq 2$ et l'on va poser $q = 2^n$. Puisque nous travaillons en caractéristique 2, on a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$, on notera Π_M son polynôme caractéristique.

Établissons préalablement deux résultats élémentaires d'algèbre linéaire :

1/ Si $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$ sont semblables alors il existe $P_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ telle que $M = P_0 N P_0^{-1}$. Autrement dit, l'orbite de conjugaison d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$ est la même sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ que sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Cette propriété découle du fait que, puisque $\mathbb{F}_q$ est de caractéristique 2, alors tous les éléments de $\mathbb{F}_q$ sont des carrés. Si $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est telle que $M = PNP^{-1}$ alors $P_0 = \frac{1}{\sqrt{\det(P)}} P$ est un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ qui vérifie $M = P_0 N P_0^{-1}$.

2/ Deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$ si et seulement si $\Pi_M = \Pi_N$.

Pour cette propriété, le sens direct est évident. Pour la réciproque, si $\Pi = \Pi_M = \Pi_N$ est inséparable alors en notant $\lambda \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ la racine double de Π, on a que, soit $M = N = \lambda I$, soit M et N sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Si Π est séparable, comme c'est un polynôme de degré 2, M et N sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ et toutes deux semblables à une même matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{q^2})$. Dans tous les cas, M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{q^2})$.

Montrons que cela implique qu'elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$. Notons $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$ un élément primitif et considérons une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ tel que $PM = NP$. Il existe $R, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$ tels que $P = R + \alpha Q$ et par suite on a $RM = NR$ et $QM = NQ$ et donc pour tout $x \in \mathbb{F}_{q^2}$, on a $(R + xQ)M = N(R + xQ)$. L'application $x \longmapsto \det(R + xQ)$ est alors un polynôme de degré au plus 2 qui n'est pas nul (puisque non nul en $x = \alpha$), il possède au plus deux racines, mais comme $q \geq 4$, il existe donc $x \in \mathbb{F}_q$ tel que $(R + xQ) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Dénombrons maintenant les classes de conjugaison et considérons une matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Distinguons deux cas :

a) Le polynôme Π_M est inséparable. Dans ces conditions, puisque $\det(M) = 1$, on a $\Pi_M(X) = X^2 - 1$ et donc, soit $M = I$, soit M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il y a donc deux classes de conjugaison correspondant à des matrices à polynômes caractéristiques inséparables.

b) Le polynôme Π_M est séparable. Puisque $d^\circ \Pi_M = 2$ et que $\det(M) = 1$, il existe un élément $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} - \{0, 1\}$ tel que $\alpha + \alpha^{-1} \in \mathbb{F}_q$ et tel que $\Pi_M(X) = X^2 - (\alpha + \alpha^{-1})X + 1$.

Réciproquement, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} - \{0, 1\}$ tel que $\alpha + \alpha^{-1} \in \mathbb{F}_q$ il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\Pi_M(X) = X^2 - (\alpha + \alpha^{-1})X + 1$. Pour voir ce fait, il suffit de considérer la matrice de Frobenius $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha + \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Ainsi, l'ensemble des classes de conjugaison des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ à polynômes caractéristiques séparables est biunivoquement décrit par l'ensemble E_1 constitué des éléments $\alpha + \alpha^{-1} \in \mathbb{F}_q$ avec $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} - \{0, 1\}$.

On a $\alpha + \alpha^{-1} = \beta + \beta^{-1}$ si et seulement si $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta^{-1}$. Comme $\alpha \neq 1$, on en déduit que le cardinal de E_1 vaut exactement la moitié du cardinal de l'ensemble E_2 constitué des

éléments $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} - \{0,1\}$ tels que $\alpha + \alpha^{-1} \in \mathbb{F}_q$. Dénombrons ce dernier ensemble : il contient $\mathbb{F}_q - \{0,1\}$, ce qui fait déjà $q-2$ éléments. Soit maintenant $\alpha \in E_2 - \mathbb{F}_q$. Puisque α est racine de Π_M, on en déduit que α^{-1} est le conjugué de α, ce qui équivaut à dire que $\alpha^q = \alpha^{-1}$ ou encore que $\alpha^{q+1} = 1$. Réciproquement, tout $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} - \{1\}$ vérifiant $\alpha^{q+1} = 1$ est un élément de $E_2 - \mathbb{F}_q$. Puisque $\mathbb{F}_{q^2}^*$ est cyclique d'ordre $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, il existe un sous-groupe d'ordre $q+1$ dans $\mathbb{F}_{q^2}^*$ et donc, il y a $q+1$ éléments de $\mathbb{F}_{q^2}$ vérifiant $\alpha^{q+1} = 1$. Ainsi $E_2 - \mathbb{F}_q$ compte q éléments et, par suite, E_2 compte $2q-2$ éléments.

Il y a donc $q-1$ classes de conjugaison de matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ à polynômes caractéristiques séparables, ce qui, ajouté au 2 autres classes trouvées dans le cas inséparable, donne finalement $q+1$ classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.

□

Corollaire 19.— *Soient $n, m \geq 2$ des entiers et $a \in \mathrm{C}_m^*$ d'ordre $o(a) = n$. Si la condition*

$$\forall x \in \mathrm{C}_n - \{0\},\ a^x - 1 \in \mathrm{C}_m^*$$

est vérifiée, alors le groupe $G = \mathrm{C}_n \ltimes_a \mathrm{C}_m$ est vraiment total.

Dans cette situation, si G se réalise sur un corps k alors, pour tout $f \in \mathrm{Z}^2(G, k^*)$, on a

$$\dim_k \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G) = n + \frac{m-1}{n}$$

Preuve : La totalité de G découle du fait qu'il est de type CC. La preuve de ce corollaire va donc consister en un dénombrement des classes de conjugaison dans G.

• $\sigma = (x,0)$, $x \neq 0$: pour tout $y \in \mathrm{C}_m$, on a

$$(0,y)(x,0)(0,-y) = (x, y(1-a^x))$$

Comme $(1-a^x)$ est inversible dans C_m, on en déduit que $\{(x,\lambda)/\ \lambda \in \mathrm{C}_m\} \subset \widetilde{(x,0)}$. Mais comme $\mathrm{C}_n \subset \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, on a $\sharp\widetilde{(x,0)} = [G : \mathrm{Cen}_G(\sigma)] \leq m$ et, par suite, on a finalement que

$$\widetilde{(x,0)} = \{(x,\lambda)/\ \lambda \in \mathrm{C}_m\}$$

Ceci détermine $n-1$ classes de conjugaisons paramétrées par les $x \in \mathrm{C}_n$ non nuls.

• $\sigma = (0,y)$, $y \neq 0$: pour tout $x \in \mathrm{C}_n$, on a

$$(x,0)(0,y)(-x,0) = (0, a^x y)$$

Soient $x, x' \in \mathrm{C}_n$ tels que $a^x y = a^{x'} y$, ce équivaut à $y(1 - a^{x-x'}) = 0$. Si on avait $x \neq x'$ alors, comme $(1-a^{x-x'})$ est inversible, on aurait $y = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que $\{(0, a^x y)/\ x \in \mathrm{C}_n\} \subset \widetilde{(0,y)}$ et que cet ensemble compte exactement n éléments. Puisque $\mathrm{C}_m \subset \mathrm{Cen}_G(\sigma)$, on a $\sharp\widetilde{(0,y)} = [G : \mathrm{Cen}_G(\sigma)] \leq n$. Il s'ensuit que

$$\widetilde{(0,y)} = \{(0, a^x y)/\ x \in \mathrm{C}_n\}$$

Il y a donc $\frac{m-1}{n}$ classes de conjugaisons paramétrées par les $y \in \mathrm{C}_m$ non nuls. En rajoutant à ce décompte la classe neutre, on obtient bien pour nombre de classes de conjugaison $n + \frac{m-1}{n}$ dans G.

Remarques : a) Le fait que l'entier n divise l'entier $m-1$ n'est pas du tout naturel, cette propriété découle bien sur du fait que $\forall x \in \mathrm{C}_n - \{0\},\ a^x - 1 \in \mathrm{C}_m^*$.

b) La condition $\forall x \in C_n - \{0\}$, $a^x - 1 \in C_m^*$ implique que m est un entier impair, car dans le cas contraire, on constate que si a est impair alors $a-1$ ne l'est pas et n'est donc pas inversible modulo m. On peut préciser un peu la condition, en regardant la décomposition en facteurs premiers de m :

Lemme 20.— *Si $m = \prod p_i^{r_i}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier impair $m \geq 3$, et si $a \in C_m^*$ est un élément d'ordre multiplicatif $o(a) = n$, alors les propriétés suivantes*

i) pour tout $x \in C_n - \{0\}$, $a^x - 1 \in C_m^*$,

ii) pour tout indice i, l'ordre multiplicatif de a modulo $p_i^{r_i}$ vaut n et $n|p_i - 1$,

sont équivalentes.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$ L'isomorphisme $C_m^* \simeq \prod C_{p_i^{r_i}}^*$ assure que l'ordre de a modulo $p_i^{r_i}$ vaut bien n pour tout i. En effet, pour tout $x \in C_n - \{0\}$, on a $a^x - 1 \in C_m^*$ et donc $a^x - 1$ est inversible modulo $p_i^{r_i}$ et donc non nul. On peut donc se limiter maintenant au cas où $m = p^r$. Les éléments de $C_{p^r}^*$ d'ordre une puissance de p sont exactement les éléments congrus à 1 modulo p et aucun d'eux ne vérifie la condition i). Donc, aucun élément non trivial de $< a >$ n'est d'ordre une puissance de p. Comme $C_{p^r}^* \simeq C_{p-1} \times C_{p^{r-1}}$, on en déduit que a appartient au facteur C_{p-1} et donc que $n|p-1$.

$ii) \Longrightarrow i)$ En utilisant à nouveau l'isomorphisme $C_{p^r}^* \simeq C_{p-1} \times C_{p^{r-1}}$, on voit que la condition $n|p-1$ implique que l'ordre de a modulo p^r est le même que l'ordre de a modulo p et donc pour tout $x \in C_n - \{0\}$, on a $a^x \neq 1$. L'isomorphisme $C_m^* \simeq \prod C_{p_i^{r_i}}^*$ implique finalement le i).

□

Cette remarque permet d'exhiber plus efficacement des produits $C_n \ltimes_a C_m$ de type CC. Pour $m = 341 = 11 \cdot 31$ ou $8281 = 7^2 \cdot 13^2$ on trouve $C_{10} \ltimes_{244} C_{341}$, $C_{10} \ltimes_{277} C_{341}$, $C_{10} \ltimes_{46} C_{341}$, $C_{10} \ltimes_{178} C_{341}$, $C_6 \ltimes_{3020} C_{8281}$, $C_6 \ltimes_{2175} C_{8281}$ comme exemples possibles.

c) La question de la classe d'isomorphisme d'un produit $C_n \ltimes_a C_m$ se pose. Dans le cas où ils sont de type CC, on peut caractériser simplement cette classe.

Lemme 21.— *Soient $n, m, n', m' \geq 2$ des entiers, $a \in C_m^*$ un élément d'ordre n vérifiant, pour tout $x \in C_n - \{0\}$, $a^x - 1 \in C_m^*$ et $b \in C_{m'}^*$, un élément d'ordre n' vérifiant, pour tout $x \in C_{n'} - \{0\}$, $b^x - 1 \in C_{m'}^*$,. Les conditions suivantes*

i) les groupes $C_n \ltimes_a C_m$ et $C_{n'} \ltimes_b C_{m'}$ sont isomorphes,

ii) $n = n'$, $m = m'$ et a et b engendrent le même sous-groupe de C_m^*,

sont équivalentes.

Preuve : $ii) \Longrightarrow i)$ Par hypothèse, il existe un entier k premier à n tel que $b^k = a$. L'application

$$\begin{array}{ccc} C_n \ltimes_a C_m & \longrightarrow & C_n \ltimes_b C_m \\ (x, \alpha) & \longmapsto & (kx, \alpha) \end{array}$$

est alors un isomorphisme de groupes.

$i) \Longrightarrow ii)$ Rappelons deux propriétés classiques sur les groupes de Frobenius :

• Un produit semi-direct $G = H \ltimes K$ est un groupe de Frobenius de complément de Frobenius H si et seulement si pour tout $k \in K - \{e\}$ on a $\mathrm{Cen}_H(k) = \{e\}$.

• Le noyau de Frobenius d'un groupe de Frobenius G est égal au sous-groupe de Fitting $F(G)$ de G, c'est-à-dire au plus grand sous-groupe normal nilpotent de G.

A cause des hypothèses faites et de ce qui précède, le groupe $G = C_n \ltimes_a C_m$ (resp. $G' = C_{n'} \ltimes_b C_{m'}$) est un groupe de Frobenius. Soit $\alpha \in C_m - \{0\}$ et $x \in C_n$, on a

$$(x,0)(0,\alpha) = (0,\alpha)(x,0) \Longleftrightarrow a^x\alpha = \alpha \Longleftrightarrow \alpha(a^x - 1) = 0$$

Puisque, pour tout $x \in C_n - \{0\}$, l'élément $a^x - 1$ est inversible, on en déduit que $\mathrm{Cen}_{C_n}(\alpha) = \{0\}$ et donc que C_n (resp. $C_{n'}$) est le complément de Frobenius de G (resp. G').

Le groupe C_m étant abélien, c'est un sous-groupe de G qui est distingué et nilpotent. On a donc $C_m \subset F(G)$, mais comme le complément de Frobenius de G est C_n, on a que $G \simeq C_n \ltimes F(G)$ et, pour des raisons évidentes de cardinalité, on en déduit que $C_m = F(G)$ (resp. $C_{m'} = F(G')$).

Considérons un isomorphisme $\varphi : G \longrightarrow G'$. Puisque φ envoie isomorphiquement $F(G)$ sur $F(G')$, on en déduit que $m = m'$ et, par suite, que $n = n'$. L'application φ définit alors, par restriction, un automorphisme de C_m et il existe donc un élément $u \in C_m^*$ tel que $\varphi(0,1) = (0,u)$. Posons formellement $\varphi(1,0) = (v,w)$, on a alors

$$\begin{aligned}(v, w + b^v u) &= (v,w).(0,u) = \varphi(1,0).\varphi(0,1) = \varphi\left((1,0).(0,1)\right)\\ &= \varphi(1,a) = \varphi\left((0,a).(1,0)\right) = \varphi(0,a).\varphi(1,0) = (0,au).(v,w)\\ &= (v, w + au)\end{aligned}$$

et donc $au = b^v u$, ce qui implique (puisque u est inversible) que $a = b^v \in < b >$. Le même raisonnement effectué sur φ^{-1} montre finalement que $< a > = < b >$.

□

Un cas pratique d'application du corollaire 19 est celui où $m = p \geq 3$ est un nombre premier, $n \geq 2$ un entier divisant $p - 1$ et a un générateur du sous-groupe d'ordre n de C_p^*. Par exemple $G = C_2 \ltimes_2 C_3$, $C_2 \ltimes_4 C_5$, $C_4 \ltimes_2 C_5$, $C_2 \ltimes_6 C_7$, $C_3 \ltimes_2 C_7$, $C_6 \ltimes_3 C_7 \cdots$. Un autre cas intéressant concerne le groupe diédral :

Corollaire 22.— *a) Pour tout $n \geq 1$, le groupe diédral D_{4n+2} est vraiment total et quand il se réalise sur un corps k, on a pour tout $f \in Z^2(D_{4n+2}, k^*)$,*

$$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^{D_{4n+2}}) = n + 2$$

b) Pour tout $n \geq 1$, si le groupe diédral $G = D_{4n}$ se réalise sur un corps k, alors pour tout $f \in Z^2(D_{4n}, k^*)$, on a

$$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^{D_{4n}}) = n \text{ ou } n + 3$$

Preuve : Le a) découle du corollaire 19 pour le choix $n = 2$, $m = 2n + 1$ et $a = -1$.

b) Pour ce qui est du groupe diédral

$$D_{4n} = C_2 \ltimes_{-1} C_{2n} = \{e, \rho, \cdots, \rho^{2n-1}, \sigma, \sigma\rho, \cdots, \sigma\rho^{2n-1}\}$$

on a $Z(D_{4n}) = \{e, \rho^n\}$ et les classes de conjugaisons et centralisateurs dans D_{4n} sont :

- $\widetilde{e} = \{e\}$, $\mathrm{Cen}_{D_{4n}}(e) = D_{2n}$
- $\widetilde{\rho^n} = \{\rho^n\}$, $\mathrm{Cen}_{D_{4n}}(\rho^n) = D_{2n}$
- $\widetilde{\rho^k} = \{\rho^k, \rho^{-k}\}$, $\mathrm{Cen}_{D_{4n}}(\rho^k) = C_{2n}$ pour tout $k = 1, \cdots, n-1$
- $\widetilde{\sigma} = \{\sigma, \sigma\rho^2, \cdots, \sigma\rho^{2n-2}\}$, $\mathrm{Cen}_{D_{4n}}(\sigma) = \{e, \rho^n, \sigma, \sigma\rho^n\} \simeq C_2 \times C_2$

• $\widetilde{\sigma\rho} = \{\sigma\rho, \sigma\rho^3, \cdots, \sigma\rho^{2n-1}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{4n}}(\sigma) = \{e, \rho^n, \sigma\rho, \sigma\rho^{n+1}\} \simeq \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$

Posons $\mathrm{D}_{4n_{\mathrm{conj}}} = \{e, \rho, \cdots, \rho^n, \sigma, \sigma\rho\}$ et $S = \{\sigma \in \mathrm{D}_{4n_{\mathrm{conj}}} / \ \omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{4n}}(\sigma)} \equiv 1\}$. Comme pour tout $k = 1, \cdots, n-1$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(\rho^k)$ est cyclique on en déduit que $\rho^k \in S$ et donc que S compte au moins n éléments. La fin de la preuve va consister à montrer que les trois éléments ρ^n, σ et $\sigma\rho$ sont, soit simultanément dans S, soit simultanément hors de S. Remarquons préalablement que comme $\rho^n \in \mathrm{C}_{2n}$, on a $\omega_{\rho^n|\mathrm{C}_{2n}} \equiv 1$.

Posons $\lambda = \omega_\sigma(\rho^n)$. Comme $1 = \omega_\sigma(e) = \omega_\sigma(\rho^n\rho^n) = \omega_\sigma(\rho^n)^2 = \lambda^2$ on en déduit que $\lambda = \pm 1$.

• Si $\lambda = 1$ alors

• $\omega_{\rho^n|\mathrm{C}_{2n}} \equiv 1$ et, pour tout $k = 0, \cdots, 2n-1$, $\omega_{\rho^n}(\sigma\rho^k) = \omega_{\rho^n}(\sigma)\omega_{\rho^n}(\rho^k) = \omega_{\rho^n}(\sigma) = \lambda^{-1} = 1$. Ainsi, $\omega_{\rho^n|\mathrm{D}_{4n}} \equiv 1$ et donc $\rho^n \in S$.

• $\omega_\sigma(e) = 1$, $\omega_\sigma(\sigma) = 1$, $\omega_\sigma(\rho^n) = \lambda = 1$, $\omega_\sigma(\sigma\rho^n) = \omega_\sigma(\sigma)\omega_\sigma(\rho^n) = \lambda = 1$. Donc $\sigma \in S$.

• $\omega_{\sigma\rho}(e) = 1$, $\omega_{\sigma\rho}(\sigma\rho) = 1$, $\omega_{\sigma\rho}(\rho^n) = \omega_{\rho^n}(\sigma\rho)^{-1} = \omega_{\rho^n}(\sigma)^{-1}\omega_{\rho^n}(\rho)^{-1} = \lambda = 1$, $\omega_{\sigma\rho}(\sigma\rho^{n+1}) = \omega_{\sigma\rho}(\sigma\rho\rho^n) = \omega_{\sigma\rho}(\sigma\rho)\omega_{\sigma\rho}(\rho^n) = \omega_{\rho^n}(\sigma\rho)^{-1} = 1$. Donc $\sigma\rho \in S$.

• Si $\lambda = -1$ alors

• $\omega_{\rho^n}(\sigma) = \lambda^{-1} = -1$ et ainsi $\omega_{\rho^n|\mathrm{D}_{4n}} \not\equiv 1$. Donc $\rho^n \notin S$.

• $\omega_\sigma(\rho^n) = -1$ et ainsi $\omega_{\sigma|\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{4n}}(\sigma)} \not\equiv 1$. Donc $\sigma \notin S$.

• $\omega_{\sigma\rho}(\rho^n) = \omega_\sigma(\rho^n)\omega_\rho(\rho^n) = -1$ et ainsi $\omega_{\sigma\rho|\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{4n}}(\sigma\rho)} \not\equiv 1$. Donc $\sigma\rho \notin S$.

□

Pour le cas du groupe D_{4n}, nous n'affirmons pas qu'il n'est pas vraiment total. Pour autant, le calcul numérique montre que les groupes D_{4n} ne sont pas vraiment totaux pour $n = 1, \cdots, 8$.

Si l'on exclut le cas du groupe diédral et celui où m est un nombre premier, les cas possibles rentrant dans le cadre du corollaire 19 et restants pour $m \leq 100$ sont alors

$\mathrm{C}_4 \ltimes_7 \mathrm{C}_{25}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{18} \mathrm{C}_{25}$	$\mathrm{C}_3 \ltimes_{18} \mathrm{C}_{49}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{19} \mathrm{C}_{49}$	$\mathrm{C}_3 \ltimes_{30} \mathrm{C}_{49}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{31} \mathrm{C}_{49}$
$\mathrm{C}_4 \ltimes_8 \mathrm{C}_{65}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{18} \mathrm{C}_{65}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{47} \mathrm{C}_{65}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{57} \mathrm{C}_{65}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{13} \mathrm{C}_{85}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{38} \mathrm{C}_{85}$
$\mathrm{C}_4 \ltimes_{47} \mathrm{C}_{85}$	$\mathrm{C}_4 \ltimes_{72} \mathrm{C}_{85}$	$\mathrm{C}_3 \ltimes_9 \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{10} \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_3 \ltimes_{16} \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{17} \mathrm{C}_{91}$
$\mathrm{C}_3 \ltimes_{74} \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{75} \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_3 \ltimes_{81} \mathrm{C}_{91}$	$\mathrm{C}_6 \ltimes_{82} \mathrm{C}_{91}$		

Pour compléter ces résultats, nous donnons quelques autres exemples pour des produits semi-directs de groupe cycliques. Nous rappelons que dans ces tableaux, les dimensions $\dim_k \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_f^G)$ données, quand il y en a plus d'une, sont toutes atteintes pour un bon choix de corps k et de cocycle f.

a) *Exemples de produits semi-directs de deux groupes cycliques qui ne sont pas des groupes totaux.*

G	$C_2 \ltimes_5 C_{12}$	$C_2 \ltimes_7 C_{12}$	$C_4 \ltimes_3 C_4$	$C_4 \ltimes_5 C_6$
$o(G)$	24	24	16	24
$\sharp G_{\text{conj}}$	12	15	10	12
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	6 ou 12	6 ou 15	4 ou 10	6 ou 12

G	$C_6 \ltimes_3 C_4$	$C_8 \ltimes_3 C_4$	$C_6 \ltimes_5 C_6$	
$o(G)$	24	32	36	
$\sharp G_{\text{conj}}$	15	20	18	
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	6 ou 15	8 ou 20	9 ou 18	

b) *Exemples de produits semi-directs de deux groupes cycliques qui ne sont pas de type CC mais qui sont totaux.*

G	$C_2 \ltimes_3 C_8$	$C_2 \ltimes_5 C_8$	$C_3 \ltimes_4 C_9$	$C_3 \ltimes_7 C_9$
$o(G)$	16	16	27	27
$\sharp G_{\text{conj}}$	7	10	11	11
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	7	10	11	11

G	$C_4 \ltimes_2 C_3$	$C_4 \ltimes_4 C_5$	$C_4 \ltimes_6 C_7$	$C_6 \ltimes_2 C_3$
$o(G)$	12	20	28	18
$\sharp G_{\text{conj}}$	6	8	10	9
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	6	8	10	9

3.3. Les groupes méta-dicycliques. Dans ce paragraphe nous présentons l'exemple d'une famille de groupes finis quasi-CC qui ne sont pas de type CC.

On se donne deux entiers $n, m \geq 1$ et l'on considère le groupe $\Gamma = C_{4m} \ltimes_{-1} C_{2n}$. On considère le sous-groupe d'ordre 2, $H =< (2m, n) >$ qui est visiblement distingué dans Γ puisque contenu dans le centre de Γ.

On considère alors le groupe quotient d'ordre $4mn$, $\Delta_m^n = \Gamma/H$. On appelle les groupes Δ_m^n les *groupes méta-dicycliques*. Cette terminologie provient du fait que pour $m = 1$, le groupe Δ_1^n est égal au groupe dicyclique Q_{4n}.

Proposition 23.— *Si n et m sont premiers entre eux, alors le groupe méta-dicyclique Δ_m^n est un groupe quasi-CC. Par ailleurs, si en plus $n \geq 2$ alors le groupe Δ_m^n n'est pas de type CC.*

Preuve : Posons $G = \Delta_m^n$. Lorsque $n = 1$, on a $\Gamma = C_{4m} \times C_2$ et, par suite, $\Delta_m^1 \simeq C_{4m}$ qui est bien de type CC, donc quasi-CC. Supposons maintenant que $n > 1$.

Le premier point à observer est que, si l'on note $s : \Gamma \longrightarrow G$ la surjection canonique, on a $Z(\Gamma) = s^{-1}(Z(G))$ et pour tout $\alpha \in \Gamma$, $\text{Cen}_\Gamma(\alpha) = s^{-1}(\text{Cen}_G(s(\alpha)))$. En effet, si $h, h' \in G$ ont pour représentants $\alpha = (x, g)$ et $\alpha' = (x', g')$ dans Γ, alors la condition $hh' = h'h$ équivaut à

$$(x + x', g + (-1)^x g') = (x' + x, g' + (-1)^{x'} g) \bmod H$$

mais du fait de l'égalité $x + x' = x' + x$, l'égalité modulo H ci-dessus équivaut à l'égalité tout court, c'est-à-dire à $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha$. On en déduit que $Z(G) = Z(\Gamma)/H$ et que pour tout $\alpha \in \Gamma$, $\text{Cen}_G(s(\alpha)) = \text{Cen}_\Gamma(\alpha)/H$.

Un élément $(x, g) \in \Gamma$ est dans le centre de Γ si et seulement si, pour tout (x', y'), on a

$$(1 - (-1)^{x'})g = (1 - (-1)^x)g'$$

Le choix $g' = 0$ et $x' = 1$ montre que $2g = 0$ et donc que $g = 0$ ou n. Le choix $x' = 0$ et $g' = 1$ montre que $x \in 2C_{4m}$. On en déduit que le centre de Γ est égal à $Z(\Gamma) = 2C_{4m} \times nC_{2n}$. On

a donc $Z(G) = Z(\Gamma)/H = 2C_{4m} \times nC_{2n}/(2m,n) = s(2C_{4m}) \simeq C_{2m}$, et le centre de G est bien cyclique non-trivial. En particulier, G n'est pas de type CC.

Étudions maintenant les centralisateurs. Soit $\alpha = (x,g) \in \Gamma$, alors $\alpha' = (x',g') \in \mathrm{Cen}_\Gamma(\alpha)$ si et seulement si

$$(C) \quad (1-(-1)^{x'})g = (1-(-1)^x)g'$$

Distinguons deux cas :

1/ $x \notin 2C_{4m}$: la condition (C) équivaut alors à $2g' = (1-(-1)^{x'})g$.

• Si $x' \in 2C_{4m}$ alors $g' = 0$ ou n et les éléments α' correspondent alors à $2C_{4m} \times nC_{2n} = Z(\Gamma)$.

• Si $x' \notin 2C_{4m}$ alors $2g' = 2g$, ce qui équivaut à $g' = g$ ou $g+n$.

Ainsi, l'ordre de $\mathrm{Cen}_\Gamma(\alpha)$ vaut $8m$. Pour tout entier k, on a $(1,g)^k = (k, \frac{1-(-1)^k}{2}g)$, on en déduit que, modulo H, l'élément $(1,g)$ est d'ordre $4m$. Par ailleurs, puisque $\mathrm{Cen}_G(s(\alpha)) = \mathrm{Cen}_\Gamma(\alpha)/H$, l'ordre de $\mathrm{Cen}_G(s(\alpha))$ vaut $4m$ et donc, on en déduit finalement que

$$\mathrm{Cen}_G(s(\alpha)) = < s(1,g) > \simeq C_{4m}$$

est cyclique.

2/ $x \in 2C_{4m}$: la condition (C) équivaut alors à $(1-(-1)^{x'})g = 0$. On s'intéresse aux centralisateurs des éléments qui ne sont pas dans le centre, on peut donc exclure le cas $g = 0$ ou n. Dans cette situation on a nécessairement $x' \in 2C_{4m}$ et, par suite, on a $\mathrm{Cen}_\Gamma(\alpha) = 2C_{4m} \times C_{2n}$.

• Si n et m sont impairs, puisqu'ils sont premiers entre eux, on a

$$\mathrm{Cen}_G(s(\alpha)) = \frac{2C_{4m} \times C_{2n}}{H} \simeq \frac{C_{2m} \times C_{2n}}{C_2} \simeq \frac{C_2 \times C_2 \times C_m \times C_n}{C_2} \simeq C_2 \times C_m \times C_n \simeq C_{2mn}$$

qui est bien cyclique.

• Si un des deux entiers n ou m est pair alors étudions l'ordre modulo H de l'élément $(2,1) \in \mathrm{Cen}_\Gamma(\alpha)$. On a, pour tout entier k, $(2,1)^k = (2k,k)$ et donc

$$(2,1)^k = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2k \equiv 0 \bmod(4m) \\ k \equiv 0 \bmod(2n) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k \equiv 0 \bmod(2m) \\ k \equiv 0 \bmod(2n) \end{cases} \Longleftrightarrow k \equiv 0 \bmod(2mn)$$

$$\begin{aligned} (2,1)^k = (2m,n) &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2k \equiv 2m \bmod(4m) \\ k \equiv n \bmod(2n) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} k \equiv m \bmod(2m) \\ k \equiv n \bmod(2n) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists h \in \mathbb{Z} / \ k = m(1+2h) \\ \exists t \in \mathbb{Z} / \ k = n(1+2t) \end{cases} \end{aligned}$$

Comme n et m sont des entiers premiers entre eux, les dernières relations montrent qu'ils divisent tous deux des entiers impairs, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On en déduit donc que $(2,1)$ est d'ordre $2nm$ modulo H, ce qui est exactement l'ordre de $\mathrm{Cen}_G(s(\alpha)) = 2C_{4m} \times C_{2n}/H$. Ainsi, $\mathrm{Cen}_G(s(\alpha)) \simeq C_{2mn}$ est cyclique, ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 24.— *Les groupes méta-dicycliques Δ_m^n sont vraiment totaux dés que n et m sont premiers entre eux. Dans cette situation, si Δ_m^n se réalise sur un corps k, alors pour tout $f \in Z^2(\Delta_m^n, k^*)$, on a*

$$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^{\Delta_m^n}) = m(n+3)$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$, le groupe dicyclique Q_{4n} est vraiment total et, si Q_{4n} se réalise sur un corps k, alors pour tout $f \in Z^2(Q_{4n}, k^*)$, on a

$$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^{Q_{4n}}) = n+3$$

Preuve : Il s'agit de dénombrer les classes de conjugaisons de Δ_m^n. On reprend les notations précédentes et l'on commence par décrire les classes de conjugaison de Γ. Soit $(x,g) \in \Gamma$, pour tout $(y,h) \in \Gamma$, on a

$$(y,h)(x,g)(y,h)^{-1} = (y+x, h+(-1)^y g)(-y, -(-1)^y h) = (x, (-1)^y g + h(1-(-1)^x))$$

1/ Si $x \in 2C_{4m}$, alors le produit précédent vaut $(x,(-1)^y g)$ et on en déduit que

$$\widetilde{(x,g)} = \{(x,g),(x,-g)\}$$

L'ensemble de classes correspondantes est donc

$$\left\{\widetilde{(x,g)} / \ x \in 2C_{4m},\ g = 0, \cdots, n\right\}$$

ensemble qui compte $2m(n+1)$ éléments.

2/ Si $x \notin 2C_{4m}$, alors le produit précédent vaut $(x,(-1)^y g+2h)$ et on en déduit que si $g \in 2C_{2n}$ alors

$$\widetilde{(x,g)} = \{(x,0),(x,2),\cdots,(x,2n-2)\}$$

et si $g \notin 2C_{2n}$ alors

$$\widetilde{(x,g)} = \{(x,1),(x,3),\cdots,(x,2n-1)\}$$

L'ensemble de classes correspondantes est donc

$$\left\{\widetilde{(x,0)}, \widetilde{(x,1)} / \ x \notin 2C_{4m}\right\}$$

ensemble qui compte $4m$ éléments.

En conclusion, il y a $2m(n+3)$ classes de conjugaison dans Γ. Par passage au quotient, on en déduit que les classes de conjugaisons de G sont la réunion des deux ensembles suivants

$$\left\{\widetilde{s(x,g)} / \ x = 0,2,\cdots,2m-2,\ g = 0,\cdots,n\right\}$$

et

$$\left\{\widetilde{s(x,0)}, \widetilde{s(x,1)} / \ x = 1,3,\cdots,2m-1\right\}$$

Il y a donc $m(n+3)$ classes de conjugaison dans G, ce qui achève la preuve.

□

3.4. Totalité et opérations sur les groupes. L'ensemble des groupes vraiment totaux n'est stable par aucune opération usuelle sur les groupes. Plus précisément :

• Si G est vraiment total et si H est un sous-groupe de G, alors H n'est pas forcément vraiment total. Par exemple, le groupe $G = C_2 \ltimes_3 C_8$ est vraiment total, mais l'action de C_2 sur le sous-groupe d'ordre 2 de C_8 étant triviale, on en déduit que G possède un sous-groupe isomorphe à $C_2 \times C_2$ qui n'est pas vraiment total.

• Si G est vraiment total et H est un sous-groupe distingué de G, alors le groupe quotient G/H n'est pas forcément vraiment total. Par exemple $G = Q_8$ possède un quotient isomorphe à $C_2 \times C_2$.

• Si G est extension de deux groupes vraiment totaux H et N, alors G n'est pas forcément vraiment total. Par exemple, $H = Q_8$ et $N = C_2$ sont vraiment totaux, mais $G = C_4 \ltimes_{-1} C_4$ qui est extension de N par H ne l'est pas.

• Si G et H sont vraiment totaux, le produit cartésien $G \times H$ ne l'est pas forcément. Par exemple, pour $G = H = C_2$, le groupe $C_2 \times C_2$ n'est pas vraiment total.

On peut toutefois obtenir des résultats sur la totalité si l'on impose quelques hypothèses. Pour les produits cartésiens, on a :

Proposition 25.— *Soit G et H deux groupes vraiment totaux. Si $o(G)$ et $o(H)$ sont des entiers premiers entre eux, alors le groupe produit $G \times H$ est vraiment total.*

Preuve : On identifie G et H à leurs images canoniques dans $G \times H$. Considérons un élément $\sigma = \alpha\beta \in G \times H$ avec $\alpha \in G$ et $\beta \in H$. On a $\mathrm{Cen}_{G\times H}(\sigma) = \mathrm{Cen}_G(\alpha) \times \mathrm{Cen}_H(\beta)$ et il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{Cen}_{G\times H}(\sigma)$, on a $\omega_\sigma(x) = 1$. Écrivons $x = gh$ avec $g \in \mathrm{Cen}_G(\alpha)$ et $h \in \mathrm{Cen}_G(\beta)$, remarquons que α, β, g, h commutent deux à deux et donc

$$\begin{aligned}
\omega_\sigma(x) &= \omega_{\alpha\beta}(gh) = \omega_{\alpha\beta}(g)\omega_{\alpha\beta}(h) = \omega_g^{-1}(\alpha\beta)\omega_h^{-1}(\alpha\beta) \\
&= \omega_g^{-1}(\alpha)\omega_g^{-1}(\beta)\omega_h^{-1}(\alpha)\omega_g^{-1}(\beta) = \omega_\alpha(g)\omega_\alpha(h)\omega_\beta(g)\omega_\beta(h) \\
&= \omega_\alpha(h)\omega_\beta(g) \quad (\text{car } \alpha, g \in G,\ \beta, h \in H \text{ et } G, H \text{ sont totaux.})
\end{aligned}$$

Comme $h \in H$, $\omega_\alpha(h)$ est une racine $o(H)$-ème de l'unité, mais comme $\omega_h(\alpha) = \omega_\alpha(h)^{-1}$ et que $\alpha \in G$, on en déduit que $\omega_\alpha(h)$ est aussi une racine $o(G)$-ème de l'unité, et comme $o(H)$ et $o(G)$ sont premiers entre eux, on en déduit finalement que $\omega_\alpha(h) = 1$. On montre de la même façon que $\omega_\beta(g) = 1$ et ainsi, $\omega_\sigma(x) = 1$.

□

Complétons le cas des produits par quelques résultats obtenus sur machine :

G	$C_2 \times S_3$	$C_3 \times S_3$	$C_2 \times Q_8$	$C_2 \times A_4$	$C_2 \times D_8$	$C_3 \times D_8$
$o(G)$	12	18	16	24	16	24
$\sharp G_{\mathrm{conj}}$	6	9	10	8	10	15
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	3 ou 6	9	4 ou 10	6 ou 8	1, 4 ou 10	6 ou 15
G	$C_2 \times Q_{12}$	$C_4 \times S_3$	$C_2 \times C_2 \times S_3$	$C_2 \times D_{10}$	$C_2 \times D_{12}$	$C_2 \times D_{14}$
$o(G)$	24	24	24	20	24	28
$\sharp G_{\mathrm{conj}}$	12	12	12	8	12	10
$\dim_k Z(\mathfrak{A}_f^G)$	6 ou 12	6 ou 12	3, 6 ou 12	5 ou 8	3, 6 ou 12	7 ou 10

Le cas du groupe $G = C_3 \times S_3$ est intéressant puisqu'il constitue un contre-exemple, dans le cas non-abélien, à la réciproque de la proposition 25. Par ailleurs, puisque le centralisateur du couple $(1, \rho)$ est isomorphe à $C_3 \times C_3$, ce groupe constitue un exemple de groupe total qui n'est pas quasi-CC.

La proposition 25 couplée à l'étude des groupes quasi-CC permet d'exhiber une large famille de groupes totaux dont aucun n'est quasi-CC : on prend les produits cartésiens $G \times H$ où G et H sont des groupes quasi-CC non cycliques d'ordre premier entre eux (les éléments non centraux des facteurs G et H n'ont alors pas de centralisateurs cycliques). Par exemple, les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{2^n}) \times (C_{11} \ltimes_4 C_{23})$ sont totaux mais pas quasi-CC dés que $n \not\equiv 11 \bmod(23)$ et $n \not\equiv 5 \bmod(11)$.

Le fait que la totalité ne soit pas stable par passage au quotient est lié au fait que les stabilisateurs d'un groupe quotient peuvent "grossir". Si l'on peut contrôler ces stabilisateurs, on peut alors conclure :

Proposition 26.— *Soit G un groupe vraiment total, H un sous-groupe distingué de G et s : $G \longrightarrow G/H$ la surjection canonique. Si, pour tout $\alpha \in G - H$ on a*

$$s(\mathrm{Cen}_G(\alpha)) = \mathrm{Cen}_{G/H}(s(\alpha))$$

alors le groupe quotient G/H est vraiment total.

Preuve : Considérons un 2-cocyle $f \in Z^2(G/H, k^*)$ et f' l'image de f par l'application d'inflation $Z^2(G/H, k^*) \longrightarrow Z^2(G, k^*)$. On a, par définition, pour tout $g, h \in G$, $f'(g,h) = f(\overline{g}, \overline{h})$. Soit donc $\sigma \in G-H$, par hypothèse quand g parcourt $\mathrm{Cen}_G(\sigma)$, $\overline{g}$ parcourt $\mathrm{Cen}_{G/H}(\overline{\sigma})$ et donc on a

$$\omega_{\overline{\sigma}}(\overline{g}) = \omega_\sigma(g) = 1$$

ce qui prouve que G/H est vraiment total.

□

Une illustration pertinente de cette propriété consiste à regarder l'épimorphisme $\mathrm{Q}_{4n} \longrightarrow \mathrm{D}_{2n}$. Si l'on présente ces groupes de la manière suivante :

$$\mathrm{Q}_{4n} = < \alpha, \beta \mid \alpha^{2n} = e,\ \beta^2 = \alpha^n,\ \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1} >$$
$$\mathrm{D}_{2n} = < \rho, \sigma \mid \rho^n = e,\ \sigma^2 = e,\ \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} >$$

alors $Z(\mathrm{Q}_{4n}) = < \alpha^n > = < \beta^2 >$ est d'ordre 2 et l'on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow Z(\mathrm{Q}_{4n}) \longrightarrow \mathrm{Q}_{4n} \xrightarrow{s} \mathrm{D}_{2n} \longrightarrow 1$$

où $s(\alpha) = \rho$ et $s(\beta) = \sigma$.

Si $n = 2m$ est pair, alors $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^m) = < \alpha >$ puisque $\beta\alpha^m\beta^{-1} = \alpha^{-m} \neq \alpha^m$. Cependant, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(s(\alpha^m)) = \mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(\rho^m) = \mathrm{D}_{2n} \neq s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(\alpha^m)) = < \rho >$, ce qui montre que les hypothèses de la proposition 26 ne sont pas vérifiées lorsque n est pair.

Si $n = 2m + 1$ est impair, les classes de conjugaison et les centralisateurs sont :

- $\widetilde{e} = \{e\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(e) = \mathrm{Q}_{4n}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(e) = \mathrm{D}_{2n} = s(\mathrm{Q}_{4n})$
- $\widetilde{\alpha^n} = \{\alpha^n\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^n) = \mathrm{Q}_{4n}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(s(\alpha^n)) = s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^n))$
- $\widetilde{\alpha^k} = \{\alpha^k, \alpha^{-k}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^k) = < \alpha >$ pour tout $k = 1, \cdots, n-1$
- $\widetilde{\rho^k} = \{\rho^k, \rho^{-k}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(s(\alpha^k)) = < \rho > = s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^k)) = s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\alpha^{k+m}))$ pour tout $k = 1, \cdots, m$
- $\widetilde{\beta} = \{\beta, \beta\alpha^2, \cdots, \beta\alpha^{2n-2}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\beta) = < \beta >$
- $\widetilde{\beta\alpha} = \{\beta\alpha, \beta\alpha^3, \cdots, \beta\alpha^{2n-1}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\beta\alpha) = < \beta\alpha >$ d'ordre 4
- $\widetilde{\sigma} = \{\sigma, \sigma\rho, \cdots, \sigma\rho^{2m}\}$, $\mathrm{Cen}_{\mathrm{D}_{2n}}(\sigma) = < \sigma > = s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\beta)) = s(\mathrm{Cen}_{\mathrm{Q}_{4n}}(\beta^3))$

et nous sommes là en pleine application de la proposition 26, ce qui donne une autre preuve de la proposition 22.a).

Bibliographie

[BrSuWa] R. Brauer, M. Suzuki and G.E. Wall, *A characterization of the one-dimensional unimodular projective groups over finite fields*, Illinois Journal of Mathematics 2, p.718-745 (1958).

[Da] A. Davydov, *Twisted automorphisms of group algebras*, arXiv:0708.2758

[Su] M. Suzuki, *The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order*, Proceedings of the American Mathematical Society (American Mathematical Society) 8 (4), p.686-695 (1957).

[Ti1] J.-P. Tignol, *Sur les décompositions des algèbres à division en produit tensoriel d'algèbres cycliques*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), p.126-145, Lecture Notes in Math., 917, Springer, Berlin-New York (1982).

[Ti2] J.-P. Tignol, *Produits croisés abéliens*, J. Algebra, 70, p. 420-436 (1981).

[We] L. Weisner, *Groups in which the normaliser of every element except identity is abelian*, Bull. Amer. Math. Soc. 31, 8, p. 413-416 (1925).

[Wu] Y.-F. Wu, *Groups in which commutativity is a transitive relation*, J. Algebra 207, 1, p.165-181 (1998).

Bruno Deschamps, Ivan Suarez Atias
Département de Mathématiques — Université du Maine
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr, Ivan.Suarez_Atias@univ-lemans.fr