PROBLÈMES DE PLONGEMENT FINIS SUR LES CORPS NON COMMUTATIFS

ANGELOT BEHAJAINA, BRUNO DESCHAMPS ET FRANÇOIS LEGRAND

Résumé. Nous étendons la notion de problème de plongement fini sur les corps commutatifs, une notion centrale de la théorie inverse de Galois, à la situation d'un corps quelconque H de dimension finie sur son centre h. Nous montrons tout d'abord que résoudre un problème de plongement fini sur H équivaut à trouver une solution à un certain problème de plongement fini sur h vérifiant une contrainte polynomiale. Nous montrons ensuite que tout problème de plongement fini scindé constant sur le corps $H(t)$ des fractions rationnelles à indéterminée centrale t admet une solution, si h est un corps ample. Il s'agit d'un analogue non commutatif d'un résultat profond de Pop. Plus généralement, nous résolvons de tels problèmes de plongement finis sur les corps tordus $H(t, \sigma)$ des fractions rationnelles, où σ est un automorphisme de H d'ordre fini. Nos résultats généralisent de précédents travaux sur le problème inverse de Galois sur les corps quelconques.

1. Introduction

1.1. **Le problème inverse de Galois sur les corps quelconques.** La théorie inverse de Galois sur un corps commutatif k, dont la première question est le *problème inverse de Galois*[1], est un domaine de recherche bien ancré en algèbre et théorie des nombres qui remonte à Hilbert et Noether. Nous renvoyons aux articles de survol [DD97, Dèb01a, Dèb01b] et aux ouvrages de référence [Ser92, Völ96, FJ08, MM18] pour un vaste panorama. Pourtant, la théorie inverse de Galois peut être considérée dès que l'on dispose d'une notion d'extension galoisienne. Alors qu'il s'agit d'un sujet très étudié dans le cas commutatif, il est étonnant que le cas non commutatif n'ait été, jusqu'à très récemment, que très peu abordé, alors qu'une notion naturelle d'extension galoisienne existe dans ce contexte. En effet, d'après Artin, si $H \subseteq L$ sont deux corps[2], l'extension L/H est *galoisienne* si tout élément de L qui est laissé fixe par tout automorphisme de L fixant H point par point est dans H. Nous renvoyons à [Coh95, §3.3] pour un panorama de la théorie de Galois sur les corps quelconques.

Le but de cet article est de contribuer au développement de la théorie inverse de Galois sur les corps quelconques, à la suite des premiers travaux [DL20, ALP20, Beh20] sur le sujet. Dans [DL20], Deschamps et Legrand montrent que, si H est un corps de dimension finie sur son centre h, le problème inverse de Galois sur H admet une réponse positive (c'est-à-dire, pour tout groupe fini G, il existe une extension galoisienne L/H de groupe G) si et seulement si h satisfait à une variante du problème inverse de Galois faisant intervenir une contrainte polynomiale associée à la *norme réduite* de H/h (voir théorème 2.2). Comme application,

[1] qui consiste à savoir si, pour tout groupe fini G, il existe un corps commutatif ℓ galoisien sur k et tel que $\mathrm{Gal}(\ell/k) = G$.

[2] Un *corps* est un anneau non nul dans lequel tout élément non nul est inversible. Un corps dont la multiplication est commutative (resp. non commutative) est un *corps commutatif* (resp. un *corps gauche*). Dans cet article, pour mieux visualiser la distinction entre corps quelconques et corps commutatifs, nous utilisons des lettres majuscules pour les corps quelconques et des lettres minuscules pour les corps commutatifs.

ils montrent que le problème inverse de Galois admet une réponse positive sur le corps $H(t)$ des fractions rationnelles à coefficients dans H et à indéterminée centrale t (voir §2.2 pour la définition), si h contient un corps ample[3]. Si H est commutatif, ce dernier résultat n'est rien d'autre qu'un profond résultat de Pop (voir [Pop96, Main Theorem A]). Une application du deuxième résultat de Deschamps et Legrand est ensuite donnée dans [ALP20] où Alon, Legrand et Paran montrent que, si H est un corps de dimension finie sur son centre h et si h contient un corps ample, alors le problème inverse de Galois admet une réponse positive sur le corps des fractions $H(X)$ de l'anneau des fonctions polynomiales en la variable X. Enfin, Behajaina généralise le deuxième résultat de Deschamps et Legrand en montrant que le problème inverse de Galois admet une réponse positive sur le corps tordu $H(t, \sigma)$ des fractions rationnelles, où σ est n'importe quel automorphisme de H d'ordre fini[4] tel que le sous-corps de h laissé fixe par σ contienne un corps ample (voir [Beh20, théorème A])[5].

1.2. **Problèmes de plongement finis sur les corps commutatifs.** Nous allons plus loin que les articles précédents, en introduisant les problèmes de plongement finis, un sujet central dans le cas commutatif, sur n'importe quel corps de dimension finie sur son centre.

Rappelons brièvement ce que sont les problèmes de plongement finis dans le cas commutatif. Un *problème de plongement fini* sur un corps commutatif k est un épimorphisme $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$, où G est un groupe fini et ℓ/k une extension galoisienne de corps commutatifs. On dit que α est *scindé* s'il existe un plongement $\alpha' : \mathrm{Gal}(\ell/k) \to G$ tel que $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(\ell/k)}$. Une *solution* à α est un isomorphisme $\beta : \mathrm{Gal}(f/k) \to G$, où f est un corps commutatif contenant ℓ et qui est une extension galoisienne de k, tel que $\alpha \circ \beta$ soit l'application de restriction $\mathrm{Gal}(f/k) \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$. Une *solution géométrique* à α est un isomorphisme $\beta : \mathrm{Gal}(e/k(t)) \to G$, où e est un corps contenant ℓ et qui est une extension galoisienne de $k(t)$, tel que $\alpha \circ \beta$ soit l'application de restriction $\mathrm{Gal}(e/k(t)) \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$.

La conjecture principale portant sur les problèmes de plongement finis dans le cas commutatif a été proposée par Dèbes et Deschamps (voir [DD97, §2.2.1]) : *tout problème de plongement fini scindé* $G \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$ *sur n'importe quel corps commutatif* k *possède une solution géométrique* $\mathrm{Gal}(e/k(t)) \to G$ *vérifiant* $e \cap \overline{k} = \ell$. L'intérêt de cette conjecture est qu'elle généralise et unifie plusieurs conjectures en théorie inverse de Galois commutative. D'une part, elle fournit une réponse positive au problème inverse de Galois sur $\mathbb{Q}$. D'autre part, elle permet de résoudre la *conjecture de Shafarevich*, qui affirme que le groupe de Galois absolu de l'extension cyclotomique maximale de $\mathbb{Q}$ est prolibre et qui est abondamment étudiée (voir, par exemple, [Pop96, HS05, Par09, Des15]). A ce jour, la conjecture de Dèbes et Deschamps n'a été démontrée que pour les corps amples (voir [Pop96, Main Theorem A]) et aucun contre-exemple n'est connu.

1.3. **Contenu de l'article.** D'un point de vue pratique, nous remplissons quatre objectifs.

Premièrement, nous introduisons toute une terminologie des problèmes de plongement finis sur un corps H de dimension finie sur son centre, qui étend naturellement la terminologie

[3]Rappelons qu'un corps commutatif k est *ample* si toute k-courbe lisse admettant au moins un point k-rationnel en admet en fait une infinité. Les corps amples incluent les corps commutatifs algébriquement clos, les corps commutatifs valués complets $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\kappa((Y))$, le corps commutatif $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$ des nombres algébriques totalement réels, etc. Nous renvoyons à l'ouvrage de référence [Jar11] et aux articles de survol [BSF13, Pop14] pour un vaste panorama des corps amples.

[4]Si $\sigma = \mathrm{id}_H$, on a $H(t, \sigma) = H(t)$.

[5]Dans [Beh20], il n'est en fait pas nécessaire que H soit de dimension finie sur son centre h.

du cas commutatif. Une première difficulté est que, si F/H et L/H sont deux extensions galoisiennes à groupes de Galois finis et telles que $L \subseteq F$, alors il n'est en général pas vrai que $\sigma(x) \in L$ si $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/H)$ et $x \in L$, c'est-à-dire il n'y a pas, a priori, d'application de restriction $\mathrm{Gal}(F/H) \to \mathrm{Gal}(L/H)$ comme dans le cas commutatif. Cependant, une telle application de restriction existe toujours si H est de dimension finie sur son centre (voir [Coh95, Chapter 3] ou §3.1). Cela nous permet de poser la définition suivante (voir §3.2.1 pour plus de détails) :

Définition 1.1. Soit H un corps de dimension finie sur son centre.
1) Un *problème de plongement fini* sur H est un épimorphisme $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$, où G est un groupe fini et L/H une extension galoisienne de corps quelconques.
2) On dit que α est *scindé* s'il existe un plongement $\alpha' : \mathrm{Gal}(L/H) \to G$ vérifiant $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(L/H)}$.
3) Une *solution* à α est un isomorphisme $\beta : \mathrm{Gal}(F/H) \to G$, où F/H est une extension galoisienne de corps quelconques vérifiant $L \subseteq F$, tel que $\alpha \circ \beta$ soit l'application de restriction $\mathrm{Gal}(F/H) \to \mathrm{Gal}(L/H)$.

Deuxièmement, si $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ désigne un problème de plongement fini sur un corps H de dimension finie sur son centre h, nous lui associons un problème de plongement fini $\breve{\alpha} : G \to \mathrm{Gal}(\ell/h)$ sur h, où ℓ est le centre de L (voir (3.3)). Nous démontrons alors le théorème suivant, dont le cas $L = H$ n'est rien d'autre que le premier résultat de [DL20] rappelé dans le §1.1 :

Théorème 1.2. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Soit $\mathrm{Nrd}_{H/h} : H \to h$ la norme réduite de H/h, soit $e_1, \dots, e_n$ une h-base de H et, pour $(x_1, \dots, x_n) \in h^n$, posons*

$$\mathcal{F}_H(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Nrd}_{H/h}(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n).$$

Alors α admet une solution si et seulement si $\breve{\alpha}$ admet une solution $\mathrm{Gal}(f/h) \to G$ telle que la forme polynomiale $\mathcal{F}_H \in h[x_1, \dots, x_n]$ ne possède que le zéro trivial sur f.

Nous renvoyons au théorème 3.9 pour un énoncé plus précis, qui fournit notamment une correspondance explicite entre les solutions à α et celles à $\breve{\alpha}$ vérifiant la contrainte polynomiale ci-dessus.

Troisièmement, nous établissons un analogue non commutatif du résultat de Pop résolvant la conjecture de Dèbes et Deschamps sur les corps amples. Si $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ est un problème de plongement fini sur un corps H de dimension finie sur son centre, nous montrons qu'il existe une application de restriction $\mathrm{Gal}(L(t)/H(t)) \to \mathrm{Gal}(L/H)$, qui est en fait un isomorphisme (voir proposition 3.5). Cela fournit ainsi un problème de plongement fini $\alpha_{H(t)} : G \to \mathrm{Gal}(L(t)/H(t))$ sur $H(t)$ et nous disons alors qu'une *solution géométrique* à α est une solution $\mathrm{Gal}(E/H(t)) \to G$ à $\alpha_{H(t)}$ (voir §3.2.3). Nous montrons enfin le théorème suivant (voir corollaire 4.2) :

Théorème 1.3. *Soit H un corps de dimension finie sur son centre h. Tout problème de plongement fini scindé sur H admet une solution géométrique, si h est un corps ample.*

Plus généralement, étant donnés un problème de plongement fini $G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ sur H, un automorphisme σ de H et un automorphisme τ de L étendant σ, tous deux d'ordre fini, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'il existe une application de restriction

$\mathrm{Gal}(L(t,\tau)/H(t,\sigma)) \to \mathrm{Gal}(L/H)$ qui soit un isomorphisme (voir proposition 3.5). Sous ces conditions, nous généralisons le théorème 1.3 en montrant que tout problème de plongement fini scindé et constant sur $H(t,\sigma)$ admet une solution, si le sous-corps de h laissé fixé par σ est ample. Nous renvoyons au théorème 4.1 pour un énoncé plus précis. En particulier, nous réobtenons [Beh20, théorème A] dans le cas particulier où H est de dimension finie sur son centre (voir remarque 4.3).

Quatrièmement, rappelons que la *réduction faible→scindé* (voir [Pop96, §1 B) 2)]) est un procédé bien connu pour déduire des résultats sur les problèmes de plongement finis sur les corps commutatifs admettant une *solution faible* de résultats sur les problèmes de plongement finis scindés sur les corps commutatifs. Plus précisément, étant donné un problème de plongement fini α sur un corps commutatif k admettant une solution faible, il existe un problème de plongement fini scindé α' sur k tel que α possède une solution s'il en est de même du problème de plongement α'. Des applications usuelles de ce procédé sont que la conjecture de Dèbes et Deschamps est équivalente à la conjecture affirmant que tout problème de plongement fini $G \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$ sur n'importe quel corps commutatif k possédant une solution faible possède en fait une solution géométrique $\mathrm{Gal}(e/k(t)) \to G$ vérifiant $e \cap \overline{k} = \ell$, et que cette dernière conjecture est vraie si k est ample.

Nous étendons la notion de solution faible (voir §3.2.1) et la réduction faible→scindé à la situation des problèmes de plongement finis sur les corps de dimension finie sur leurs centres. Les propositions 5.2 et 5.3 constituent nos résultats précis. Ceux-ci nous permettent d'étendre le théorème 1.3 et sa version plus générale, le théorème 4.1. En particulier, nous montrons que, *si H est un corps de dimension finie sur son centre h, alors tout problème de plongement fini sur H admettant une solution faible possède une solution géométrique, si h est un corps ample.* Nous renvoyons aux corollaires 5.4 et 5.5 pour nos énoncés précis.

2. Préliminaires

Dans le §2.1, nous nous intéressons tout d'abord aux extensions galoisiennes de corps quelconques tandis que le §2.2 porte sur les corps tordus des fractions rationnelles. Enfin, dans le §2.3, nous évoquons brièvement les applications de restriction dans le contexte standard des extensions de corps commutatifs.

Un *corps* est un anneau non nul dans lequel tout élément non nul est inversible. Un corps dont la multiplication est commutative (resp. non commutative) est un *corps commutatif* (resp. un *corps gauche*). De plus, si $H \subseteq L$ sont deux corps quelconques, alors L peut être considéré comme espace vectoriel sur H à gauche et comme espace vectoriel sur H à droite. Dans cet article, nous considérerons toujours L comme espace vectoriel sur H à gauche.

2.1. **Extensions galoisiennes de corps quelconques.**

Soit H un corps quelconque. Etant donné $y \in H \setminus \{0\}$, la conjugaison dans H par y est notée $I(y)$ (c'est-à-dire $I(y)(x) = yxy^{-1}$ pour tout $x \in H$); c'est un automorphisme *intérieur* de H. L'*ordre intérieur* d'un automorphisme σ de H est le plus petit $n \geq 1$ tel que σ^n soit un automorphisme intérieur de H (si un tel n existe), et ∞ sinon.

Soient $H \subseteq L$ deux corps quelconques. Le groupe des automorphismes de L laissant fixe H point par point est le *groupe d'automorphismes* de L/H, noté $\mathrm{Aut}(L/H)$. Comme défini par Artin, l'extension L/H est *galoisienne* si tout élément de L laissé fixe par n'importe quel élément de $\mathrm{Aut}(L/H)$ est dans H. Si L/H est galoisienne, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(L/H)$ est le *groupe de Galois* de L/H, noté $\mathrm{Gal}(L/H)$.

On dit qu'une extension L/H est *extérieure* si le seul automorphisme intérieur de L appartenant à $\mathrm{Gal}(L/H)$ est l'identité id_L de L. De manière équivalente, si $\widetilde{H} \subseteq L$ est le *commutant* de H dans L, c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de L tels que $xy = yx$ pour tout $y \in H$, alors L/H est extérieure si et seulement si $\widetilde{H}$ est égal au centre de L. En particulier, si L/H est extérieure, alors le centre de H est contenu dans celui de L et l'ordre intérieur de n'importe quel élément σ de $\mathrm{Gal}(L/H)$ vaut l'ordre de σ.

Lemme 2.1. *Soient L/H une extension galoisienne et h le centre de H.*
1) *Si $\mathrm{Gal}(L/H)$ est fini et si H est de dimension finie sur h, alors L/H est extérieure.*
2) *Supposons L/H extérieure et $\mathrm{Gal}(L/H)$ fini. Pour tout corps intermédiaire $H \subseteq F \subseteq L$, l'extension L/F est galoisienne et extérieure.*
3) *Supposons L/H extérieure. Alors L est commutatif si et seulement si H l'est.*

Preuve. Soit ℓ le centre de L.
1) Supposons que L/H ne soit pas extérieure. Alors, comme $\mathrm{Gal}(L/H)$ est fini, le degré $[L : H]$ de L sur H (c'est-à-dire la dimension de L sur H en tant qu'espace vectoriel à gauche) est fini et ℓ est un corps fini (voir [Des18, théorème du §2]). Comme H est de dimension finie sur h, la première des deux conclusions précédentes entraîne que L est de dimension finie sur h. Le lemme 2.1 de [Des01] montre alors que L est de dimension finie sur ℓ. Comme ℓ est fini, il en est de même de L et l'extension L/H est donc extérieure.
2) Comme $\mathrm{Gal}(L/H)$ est fini, $[L : H]$ l'est aussi (voir [Des18, théorème du §2]). Ainsi, par [Coh95, Theorem 3.3.11], L/F est galoisienne. Maintenant, si $I(y)$, $y \in L$, fixe F point par point, alors $I(y)$ fixe H point par point. Comme L/H est extérieure, cela entraîne $I(y) = \mathrm{id}_L$.
3) Supposons que H soit commutatif. Alors, comme L/H est extérieure, H est contenu dans ℓ. Ainsi tout automorphisme intérieur de L est dans $\mathrm{Gal}(L/H)$. Comme L/H est extérieure, cela entraîne que id_L est le seul automorphisme intérieur de L et L est donc commutatif. $\square$

Maintenant, soient H un corps quelconque et k un sous-corps du centre de H. Soit ℓ/k une extension galoisienne de corps commutatifs à groupe de Galois fini. Supposons que $M = H \otimes_k \ell$ soit un corps. Alors, d'après [Beh20, lemme 2.1.1], l'extension M/H est galoisienne (on identifie H et $H \otimes_k k$) et, pour tout $x \in \ell$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/H)$, on a $\sigma(1 \otimes x) = 1 \otimes \widetilde{x}$ pour un certain $\widetilde{x} \in \ell$. De plus, l'application $\widetilde{\sigma} : x \mapsto \widetilde{x}$ est un élément de $\mathrm{Gal}(\ell/k)$ et l'application suivante est un isomorphisme :

$$\widetilde{\mathrm{res}}^{M/H}_{\ell/k} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(M/H) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\ell/k) \\ \sigma & \longmapsto & \widetilde{\sigma} \end{array} \right. . \tag{2.1}$$

Enfin, soit H un corps de dimension finie n^2 sur son centre h. Rappelons que la *norme réduite* de H/h est définie comme suit. Soit d un *corps de décomposition* de la h-algèbre H, c'est-à-dire d est un corps contenant h tel qu'il existe un isomorphisme de h-algèbres $\phi : H \otimes_h d \to \mathcal{M}_n(d)$. Alors la norme réduite $\mathrm{Nrd}_{H/h}$ de H/h est définie par $\mathrm{Nrd}_{H/h} = \det\circ\phi\circ\mathrm{id} : H \to d$, où $\det : \mathcal{M}_n(d) \to d$ et $\mathrm{id} : H \to H \otimes_h d$ sont les applications déterminant et $x \mapsto x \otimes 1$. La fonction $\mathrm{Nrd}_{H/h}$ ne dépend, ni du choix du corps de décomposition d, ni de l'isomorphisme ϕ, et on a en fait $\mathrm{Nrd}_{H/h}(x) \in h$ pour tout $x \in H$ (voir, par exemple, [Bou12]). Si $e_1, \dots, e_{n^2}$ forment une h-base de H et si $(x_1, \dots, x_{n^2}) \in h^{n^2}$, on pose

$$\mathcal{F}_H(x_1, \dots, x_{n^2}) = \mathrm{Nrd}_{H/h}(x_1 e_1 + \cdots + x_{n^2} e_{n^2}). \tag{2.2}$$

A partir de maintenant, on considère $\mathcal{F}_H$ comme un polynôme dans $h[x_1, \dots, x_{n^2}]$.

Le théorème suivant est une conséquence de [DL20, théorème 7] et de sa preuve :

Théorème 2.2. *Soit H un corps de dimension finie sur son centre h.*
1) *Soit L/H une extension galoisienne à groupe de Galois fini. Les quatre conclusions suivantes sont vérifiées :*
  a) *le centre ℓ de L est une extension finie galoisienne de h,*
  b) *$\mathcal{F}_H$ (voir (2.2)) ne possède que le zéro trivial sur ℓ,*
  c) *on a $L = H \otimes_h \ell$,*
  d) *l'application $\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell/h}^{L/H}$ (voir (2.1)) est un isomorphisme.*

2) *Réciproquement, soit ℓ un corps commutatif qui est une extension galoisienne de h à groupe de Galois fini et sur lequel $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial. Les trois conclusions suivantes sont vérifiées :*
  a) *$H \otimes_h \ell$ est un corps de centre ℓ,*
  b) *l'extension $(H \otimes_h \ell)/H$ est galoisienne,*
  c) *l'application $\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell/h}^{(H\otimes_h \ell)/H}$ est un isomorphisme.*

2.2. **Corps tordus des fractions rationnelles.** On dit qu'un anneau intègre A [6] est un *anneau de Ore* si, pour tous $x, y \in A \setminus \{0\}$, il existe $a, b \in A$ tels que $xa = yb \neq 0$. Par [GW04, Theorem 6.8], si A est un anneau de Ore, il existe un corps H contenant A tel que tout élément de H s'écrive sous la forme ab^{-1} avec $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$. De plus, par [Coh95, Proposition 1.3.4], H est unique à isomorphisme près et l'on dit que H est le *corps des fractions* de A.

Soient H un corps et σ un automorphisme de H. L'*anneau tordu des polynômes* $H[t,\sigma]$ est l'anneau des polynômes $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ à coefficients dans H, muni de l'addition usuelle et dont la multiplication vérifie $ta = \sigma(a)t$ pour tout $a \in H$. Notons que $H[t,\sigma]$ est commutatif si et seulement si H l'est et $\sigma = \mathrm{id}_H$. Au sens de Ore (voir [Ore33]), l'anneau $H[t,\sigma]$ est l'anneau tordu des polynômes $H[t,\sigma,\delta]$ en la variable t, où la dérivation δ vaut 0. L'anneau $H[t,\sigma]$ est intègre, puisque le degré d'un produit de deux polynômes vaut la somme des degrés. De plus, $H[t,\sigma]$ est un anneau de Ore (voir, par exemple, [GW04, Theorem 2.6 & Corollary 6.7]). Ainsi l'anneau $H[t,\sigma]$ possède un corps des fractions, noté $H(t,\sigma)$ et appelé le *corps tordu des fractions rationnelles.* Si $\sigma = \mathrm{id}_H$, nous écrivons $H[t]$ et $H(t)$ à la place de $H[t,\sigma]$ et $H(t,\sigma)$. Nous considérons aussi *le corps tordu $H((t,\sigma))$ des séries de Laurent* de la forme $\sum_{n\geq n_0} a_n t^n$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in H$ pour tout n, muni de l'addition habituelle et dont la multiplication vérifie $ta = \sigma(a)t$ pour tout $a \in H$. Comme $H[t,\sigma]$ peut être plongé dans $H((t,\sigma))$ et est un anneau de Ore, on peut plonger $H(t,\sigma)$ dans $H((t,\sigma))$. Si $\sigma = \mathrm{id}_H$, nous écrivons $H((t))$ au lieu de $H((t,\sigma))$. Nous renvoyons à [Coh95, §2.3] pour plus de détails.

On s'intéresse maintenant au centre de $H(t,\sigma)$. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soient H un corps et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Notons $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ au centre h de H.*
1) *Le centre $H(t,\sigma)$ contient $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$, où $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est le sous-corps de h laissé fixe par $\langle\widetilde{\sigma}\rangle$.*
2) *Si H est de dimension finie sur h, alors $H(t,\sigma)$ est de dimension finie sur son centre.*

Preuve. Comme 1) est clair, il suffit de montrer 2). Pour cela, il suffit de montrer que $H(t,\sigma)$ est de dimension finie sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$ (d'après 1)). Comme H est de dimension finie sur h et

[6] c'est-à-dire $A \neq \{0\}$ et $ab \neq 0$ pour tous $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$.

σ est d'ordre fini, la dimension de H sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est finie. Soit $e_1, \ldots, e_r$ une $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$-base de H et soit Γ l'espace vectoriel engendré sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$ par tous les éléments de la forme $e_i t^j$ avec $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m-1$. On a alors $H[t,\sigma] \subseteq \Gamma \subseteq H(t,\sigma)$. De plus, Γ est un anneau et est de dimension finie sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$. Ainsi Γ est un corps. Comme tout élément de $H(t,\sigma)$ s'écrit sous la forme $P(t)Q(t)^{-1}$ avec $P(t), Q(t) \in H[t,\sigma]$, on obtient $H(t,\sigma) = \Gamma$. $\square$

Nous déterminons maintenant le centre de $H(t,\sigma)$ sous certaines hypothèses :

Proposition 2.4. *Soient H un corps et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Notons $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ au centre h de H et supposons que l'ordre intérieur de σ soit égal à m. Alors le centre de $H(t,\sigma)$ vaut $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$.*

Preuve. Par le 1) du lemme 2.3, il suffit de montrer que le centre de $H(t,\sigma)$ est contenu dans $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$. Pour cela, soit $x = \sum_{n \geq n_0} a_n t^n$ un élément non nul de $H(t,\sigma)$ avec $a_{n_0} \neq 0$. Par le *critère de rationalité* (voir [Coh95, Proposition 2.3.3]), on peut trouver deux entiers $s \geq 1$ et $n_1 \geq 0$ et des éléments $y_1, \ldots, y_s$ de H tels que

$$a_n = a_{n-1}\sigma^{n-1}(y_1) + a_{n-2}\sigma^{n-2}(y_2) + \cdots + a_{n-s}\sigma^{n-s}(y_s) \tag{2.3}$$

pour tout $n \geq n_1$. Puisque x est dans le centre de $H(t,\sigma)$, on a $tx = xt$, c'est-à-dire

$$\sum_{n \geq n_0} \sigma(a_n) t^{n+1} = \sum_{n \geq n_0} a_n t^{n+1}.$$

Cela entraîne $\sigma(a_n) = a_n$, c'est-à-dire a_n est dans le sous-corps $H^{\langle\sigma\rangle}$ de H laissé fixe par $\langle\sigma\rangle$ pour tout n. On a donc $x \in H^{\langle\sigma\rangle}((t))$. De plus, pour tout $a \in H$, on a $ax = xa$, c'est-à-dire

$$\sum_{n \geq n_0} a a_n t^n = \sum_{n \geq n_0} a_n \sigma^n(a) t^n,$$

Pour tout $n \geq n_0$ tel que $a_n \neq 0$, on a donc $\sigma^n(a) = a_n^{-1} a a_n$, c'est-à-dire σ^n est intérieur. Pour un tel n, l'hypothèse faite sur l'ordre intérieur de σ entraîne alors que m divise n. On a donc $aa_n = a_n a$ pour tout $a \in H$ et tout n tel que $a_n \neq 0$, c'est-à-dire $x \in h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m))$. Soit u le quotient de la division euclidienne de s par m. Par (2.3), on obtient

$$a_{ml} = a_{m(l-1)} y_m + a_{m(l-2)} y_{2m} + \cdots + a_{m(l-u)} y_{mu}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$ tel que $ml \geq n_1$. Ainsi, par le critère de rationalité, on obtient que x est dans $H(t^m)$. Comme x est dans le centre de $H(t,\sigma)$, on obtient en fait que x est dans le centre de $H(t^m)$, c'est-à-dire dans $h(t^m)$ (voir, par exemple, [Coh95, Proposition 2.1.5]). Ainsi x est dans $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m)) \cap h(t^m)$. Comme $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m)) \cap h = h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ et $h/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est galoisienne finie, les corps commutatifs $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m))$ et h sont linéairement disjoints sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$. Ainsi $h(t^m)$ et $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m))$ sont linéairement disjoints sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$ (voir, par exemple, [FJ08, Lemma 2.5.3]), c'est-à-dire $h(t^m) \cap h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((t^m)) = h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$. On en déduit donc $x \in h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$. $\square$

Nous concluons cette partie avec le lemme technique suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite :

Lemme 2.5. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Notons $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à h. Soient L/H une extension galoisienne à groupe de Galois fini et τ un automorphisme de L d'ordre m étendant σ. Soient ℓ le centre de L et $\widetilde{\tau}$ la restriction de τ à ℓ. Supposons qu'il existe une $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$-base de $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}$ qui soit une H-base de L. Alors $L(t,\tau) \cong H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)} \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)$.*

Preuve. Tout d'abord, par le lemme 2.1, on a $h \subseteq \ell$ et donc $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle} \subseteq \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}$, puisque τ étend σ. Ainsi $H(t,\sigma)\otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)$ est bien défini. Soit $f_1,\ldots,f_r$ une $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$-base de $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}$ comme dans l'énoncé du lemme. Notons qu'une telle base est nécessairement finie d'après le théorème 2.2 et l'hypothèse que H est de dimension finie sur son centre h. Considérons l'application $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$-linéaire

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} H(t,\sigma)\otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m) & \longrightarrow & L(t,\tau) \\ y\otimes z & \longmapsto & yz \end{array} \right. .$$

Puisque $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)$ est contenu dans le centre de $L(t,\tau)$ (voir le 1) du lemme 2.3), ψ est un morphisme d'algèbres. De plus, l'image $\mathrm{Im}(\psi)$ de ψ contient le corps $H(t,\sigma)$ et est de dimension finie (à gauche) sur ce corps. Ainsi $\mathrm{Im}(\psi)$ est un corps.

Nous montrons maintenant que ψ est surjective. Pour cela, soit $x = \sum_i a_i t^i \in L[t,\tau]$ ($(a_i)_i \subset L$). Pour tout i, il existe $(a_{i,k})_{k=1}^r \subset H$ tel que $a_i = \sum_{k=1}^r a_{i,k}f_k$. On a donc

$$x = \sum_i \left(\sum_{k=1}^r a_{i,k}f_k\right)t^i = \sum_i\sum_k \left((a_{i,k}t^i)f_k\right) = \psi\left(\sum_i\sum_k \left((a_{i,k}t^i)\otimes f_k\right)\right).$$

Ainsi $L[t,\tau] \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$. Comme $\mathrm{Im}(\psi)$ est un corps et tout élément de $L(t,\tau)$ s'écrit sous la forme $P(t)Q(t)^{-1}$ avec $P(t),Q(t)\in L[t,\tau]$, on en déduit $L(t,\tau)=\mathrm{Im}(\psi)$.

Nous montrons enfin que ψ est injective. Pour cela, notons que, puisque H est de dimension finie sur h et puisque σ est d'ordre fini, la dimension de H sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est finie. Considérons une $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$-base $(e_l)_l$ de H. Soit $x=\sum_i x_i\otimes y_i \in H(t,\sigma)\otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)$ ($(x_i)_i\subset H(t,\sigma)$ et $(y_i)_i \subset \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)$) tel que $\psi(x)=0$. Comme $\psi(x)=0$ et $H[t,\sigma]$ est un anneau de Ore, par itération de la propriété de Ore, on peut supposer $(x_i)_i\subset H[t,\sigma]$ et $(y_i)_i\subset \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}[t^m]$. On peut alors écrire

$$x = \sum_l \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{l,j}(e_l t^j \otimes v_{l,j}), \tag{2.4}$$

où $(\lambda_{l,j})_{l,j}\subset h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ et $(v_{l,j})_{l,j}\subset \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}[t^m]\setminus\{0\}$. Pour tout (l,j), on pose $v_{l,j}=\sum_a b_{l,j,a}t^{ma}$, avec $(b_{l,j,a})_{l,j,a}\subset \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}$ et, pour tout (l,j,a), on a $b_{l,j,a}=\sum_k c_{l,j,a,k}f_k$ avec $(c_{l,j,a,k})_{l,j,a,k}\subset h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$. Ainsi

$$\psi(x) = \sum_{(j,a)}\left(\sum_k\left(\sum_l \left(\lambda_{l,j}c_{l,j,a,k}\right)e_l\right)f_k\right)t^{ma+j}.$$

L'égalité précédente montre alors que, pour tout (j,a,k,l), on a

$$\lambda_{l,j}c_{l,j,a,k}=0. \tag{2.5}$$

Fixons maintenant (l,j). Comme $v_{l,j}\neq 0$, il existe (a,k) tel que $c_{l,j,a,k}\neq 0$. Ainsi, en utilisant (2.5), on obtient $\lambda_{l,j}=0$. Par (2.4), on en déduit $x=0$. $\square$

Remarque 2.6. Si l'on suppose de plus que l'ordre intérieur de σ soit égal à m, alors, par la proposition 2.4, le centre de $H(t,\sigma)$ vaut $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$. Ainsi l'injectivité de l'application ψ de la preuve du lemme 2.5 est une conséquence directe de [Bla72, théorème II-3].

2.3. **Applications de restriction dans le cas commutatif.** Si ℓ/h et f/m sont deux extensions galoisiennes de corps commutatifs à groupes de Galois finis et telles que $h\subseteq m$ et $\ell\subseteq f$, l'application de restriction usuelle $\mathrm{Gal}(f/m)\to\mathrm{Gal}(\ell/h)$ sera notée

$$\widehat{\mathrm{res}}_{\ell/h}^{f/m}. \tag{2.6}$$

Lemme 2.7. *Soient f/h une extension galoisienne de corps commutatifs à groupe de Galois fini et ℓ, m deux corps intermédiaires tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*
1) $\mathrm{Gal}(f/h) = \langle \mathrm{Gal}(f/\ell), \mathrm{Gal}(f/m)\rangle$,
2) *ℓ/h est galoisienne et $[\ell : h] = [f : m]$.*
Alors l'application de restriction $\widehat{\mathrm{res}}^{f/m}_{\ell/h}$ est un isomorphisme, on a $\mathrm{Gal}(f/h) \cong \mathrm{Gal}(f/\ell) \rtimes \mathrm{Gal}(f/m)$ et l'égalité $f = \ell m$ vaut.

Preuve. Par le 1) et puisque ℓ/h est galoisienne, ℓ et m sont linéairement disjoints sur h. On a donc $[\ell m : m] = [\ell : h]$, qui vaut $[f : m]$ par le 2). Ainsi $f = \ell m$ et $\widehat{\mathrm{res}}^{f/m}_{\ell/h}$ est un isomorphisme. Enfin, $\mathrm{Gal}(f/\ell) \trianglelefteq \mathrm{Gal}(f/h)$ par le 2), on a $\mathrm{Gal}(f/h) = \mathrm{Gal}(f/\ell)\mathrm{Gal}(f/m)$ par le 1) et $\mathrm{Gal}(f/m) \cap \mathrm{Gal}(f/\ell)$ est trivial puisque $f = \ell m$, ce qui conclut la preuve. □

3. Problèmes de plongement finis

Dans cette partie, nous étendons la terminologie des problèmes de plongement finis sur les corps commutatifs à la situation des corps de dimension finie sur leurs centres. Nous démontrons aussi une version plus précise du théorème 1.2 (voir théorème 3.9).

3.1. **Applications de restriction.**

Notre premier objectif est de définir une notion d'application de restriction qui unifie celles définies précédemment. Pour cela, nous posons :

Définition 3.1. Soient L/H et F/M deux extensions galoisiennes à groupes de Galois finis et telles que $L \subseteq F$ et $H \subseteq M$. Une *application de restriction* est une application $\mathrm{res}^{F/M}_{L/H}$: $\mathrm{Gal}(F/M) \to \mathrm{Gal}(L/H)$ vérifiant $\mathrm{res}^{F/M}_{L/H}(\sigma)(x) = \sigma(x)$ pour tous $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/M)$ et $x \in L$.

Si une application $\mathrm{res}^{F/M}_{L/H}$ existe, elle est nécessairement unique. Nous donnons maintenant des conditions suffisantes sur L, H, F et M pour l'existence d'une telle application :

Proposition 3.2. *Soient L/H et F/M deux extensions galoisiennes à groupes de Galois finis, telles que $L \subseteq F$ et $H \subseteq M$ et vérifiant les conditions suivantes :*
1) *$F = M \otimes_{k_M} \ell_M$ et $L = H \otimes_{k_H} \ell_H$ pour des extensions galoisiennes ℓ_M/k_M et ℓ_H/k_H de corps commutatifs à groupes de Galois finis et telles que k_M (resp. k_H) soit contenu dans le centre de M (resp. de H),*
2) *il existe une extension galoisienne ℓ_0/k_0 de corps commutatifs de groupe fini telle que*
   a) *$\ell_0 \subseteq \ell_M \cap \ell_H$ et $k_0 \subseteq k_M \cap k_H$,*
   b) *l'extension ℓ_H/k_0 est galoisienne finie et $[\ell_0 : k_0] = [\ell_H : k_H]$,*
   c) $\mathrm{Gal}(\ell_H/k_0) \cong \mathrm{Gal}(\ell_H/\ell_0) \rtimes \mathrm{Gal}(\ell_H/k_H)$.
Alors il existe une application de restriction $\mathrm{res}^{F/M}_{L/H}$.

Preuve. On a le diagramme d'extensions de corps suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & F = M \otimes_{k_M} \ell_M \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & & & L = H \otimes_{k_H} \ell_H \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
L = H \otimes_{k_H} \ell_H \arrow[dd, dash] & & \ell_M \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & \ell_H \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \ell_0 \arrow[dd, dash] & & H \arrow[dl, dash] \\
H & & k_M \arrow[dr, dash] & & k_H \arrow[dl, dash] & \\
 & & & k_0 & &
\end{tikzcd}$$

Puisque ℓ_0/k_0 est galoisienne et puisque a) est vérifiée, on peut considérer l'application de restriction $\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M}$ (voir (2.6)). De plus, puisque ℓ_0/k_0 est galoisienne et puisque b) et c) sont vraies, le lemme 2.7 s'applique : $\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_H/k_H}$ est un isomorphisme et on a $\ell_H = \ell_0 k_H$. En outre, puisque 1) est vraie, les applications $\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_M/k_M}^{F/M}$ et $\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_H/k_H}^{L/H}$ (voir (2.1)) sont des isomorphismes bien définis. On peut alors considérer l'application composée

$$g = (\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_H/k_H}^{L/H})^{-1} \circ (\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_H/k_H})^{-1} \circ \widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M} \circ \widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_M/k_M}^{F/M} : \mathrm{Gal}(F/M) \to \mathrm{Gal}(L/H). \tag{3.1}$$

Alors g est une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{F/M}$. En effet, par ce qui précède, on a $L = H \otimes_{k_H} \ell_H = H \otimes_{k_H} \ell_0 k_H$. Etant donnés $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/M)$, $x \in H$, $y \in \ell_0$ et $z \in k_H$, on a donc

$$g(\sigma)(x \otimes yz) = x \otimes ((\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_H/k_H})^{-1} \circ \widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M} \circ \widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_M/k_M}^{F/M}(\sigma)(yz)).$$

Mais, puisque y est dans ℓ_0, on a $(\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_H/k_H})^{-1} \circ \widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M} \circ \widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_M/k_M}^{F/M}(\sigma)(y) = \sigma(y)$ et, puisque $z \in k_H$ et σ laisse fixe H point par point, on a

$$(\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_H/k_H})^{-1} \circ \widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M} \circ \widetilde{\mathrm{res}}_{\ell_M/k_M}^{F/M}(\sigma)(z) = z = \sigma(z),$$

Ainsi $g(\sigma)(x \otimes yz) = x \otimes \sigma(yz) = \sigma(x \otimes yz)$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Remarque 3.3. Avec les notations de la proposition, la définition de $\mathrm{res}_{L/H}^{F/M}$ (voir (3.1)) montre que cette application est un isomorphisme si et seulement s'il en est de même de $\widehat{\mathrm{res}}_{\ell_0/k_0}^{\ell_M/k_M}$.

Nous appliquons maintenant notre construction à quatre situations présentant chacune un certain intérêt :

I) Soit F/M une extension galoisienne à groupe de Galois fini. Supposons $F = M \otimes_k \ell$ pour une certaine extension galoisienne ℓ/k de corps commutatifs à groupe de Galois fini et telle que k soit contenu dans le centre de M. On pose $\ell_M = \ell_0 = \ell_H = L = \ell$ et $k_M = k_0 = k_H = H = k$. Alors l'application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{F/M}$ de la proposition 3.2 est un isomorphisme, qui n'est rien d'autre que l'application de restriction $\widetilde{\mathrm{res}}_{\ell/k}^{F/M}$ (voir (2.1)). En particulier, si M est de dimension finie sur son centre m, alors $F = M \otimes_m f$ par le théorème 2.2, où f est le centre de F. Ainsi l'application de restriction $\mathrm{res}_{f/m}^{F/M}$ est un isomorphisme.

II) Soient F/M et L/H deux extensions galoisiennes de corps commutatifs à groupes de Galois finis et telles que $H \subseteq M$ et $L \subseteq F$. Dans ce cas, on a $F = M \otimes_M F$ et $L = H \otimes_H L$. Posons $\ell_M = F$, $k_M = M$, $\ell_H = \ell_0 = L$ et $k_H = k_0 = H$. Alors l'application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{F/M}$ de la proposition 3.2 coïncide avec l'application $\widehat{\mathrm{res}}_{L/H}^{F/M}$ (voir (2.6)).

III) Soient L/H et F/H deux extensions galoisiennes à groupes de Galois finis. Supposons $L \subseteq F$ et H de dimension finie sur son centre h. Par le lemme 2.1, F/L est galoisienne et extérieure. Ainsi $\ell \subseteq f$, où ℓ (resp. f) est le centre de L (resp. de F). De même, on a $h \subseteq \ell$. De plus, par le théorème 2.2, on a $F = H \otimes_h f$ (resp. $L = H \otimes_h \ell$) et l'extension f/h (resp. ℓ/h) est galoisienne finie. En posant $M = H$, $\ell_M = f$, $k_M = h$, $\ell_0 = \ell_H = \ell$ et $k_0 = k_H = h$, la proposition 3.2 fournit une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{F/H}$.

Remarque 3.4. Plus généralement, si L/H et F/H sont deux extensions galoisiennes à groupes de Galois finis et telles que F/H soit extérieure et $L \subseteq F$, alors il existe une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{F/H}$ (voir [Coh95, Chapter 3]).

IV) Nous appliquons enfin la proposition 3.2 aux corps tordus des fractions rationnelles.

Proposition 3.5. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Soient L/H une extension galoisienne à groupe de Galois fini et τ un automorphisme de L d'ordre m étendant σ. Notons $\widetilde{\tau}$ la restriction de τ au centre ℓ de L et supposons que la condition suivante soit vérifiée (à l'intérieur du groupe d'automorphismes de ℓ) :*

$$\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h) \rangle \cong \langle \widetilde{\tau} \rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h). \tag{3.2}$$

Alors $L(t,\tau)/H(t,\sigma)$ est galoisienne à groupe de Galois fini et il existe une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}$, qui est en fait un isomorphisme.

Preuve. Tout d'abord, notons $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à h. Puisque $h \subseteq \ell$ et τ étend σ, on a $h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle} \subseteq \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}$. De plus, on a $h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle} = \ell^{\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h) \rangle}$. Par (3.2), on en déduit que $\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}/h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}$ est galoisienne et que l'égalité $[\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle} : h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}] = [\ell : h]$ vaut. Le lemme 2.7 montre alors que l'application de restriction $\mathrm{res}_{\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}/h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}}^{\ell/h}$ du II) est un isomorphisme et que l'on a $\ell = \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle} h$.

De plus, les corps commutatifs $\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}$ et h sont linéairement disjoints sur $h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}$. Par conséquent, si $e_1, \ldots, e_n$ est une $h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}$-base de $\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}$, alors $e_1, \ldots, e_n$ est une h-base de $\ell = \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle} h$. Puisque $L = H \otimes_h \ell$ (voir théorème 2.2), $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$ est une H-base de L. Le lemme 2.5 fournit alors l'égalité $L(t,\tau) = H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}(t^m)} \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}(t^m)$. En particulier, $H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}(t^m)} \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}(t^m)$ est un corps. Par le §2.1 et le 1) du lemme 2.3, l'extension $L(t,\tau)/H(t,\sigma) = (H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}(t^m)} \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}(t^m))/H(t,\sigma)$ est alors galoisienne et l'application de restriction $\mathrm{res}_{\ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}(t^m)/h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}(t^m)}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}$ du I) est un isomorphisme. Nous sommes donc dans la situation de la proposition 3.2. Plus précisément, avec les notations de la proposition, on pose $F = L(t,\tau)$, $M = H(t,\sigma)$, $\ell_M = \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}(t^m)$, $k_M = h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}(t^m)$, $\ell_0 = \ell^{\langle \widetilde{\tau} \rangle}$, $k_0 = h^{\langle \widetilde{\sigma} \rangle}$, $\ell_H = \ell$ et $k_H = h$. Il existe donc une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}$ et, par la remarque 3.3, c'est un isomorphisme. □

Remarque 3.6. La proposition 3.5 s'applique déjà dans les deux situations suivantes :
1) H est de dimension finie sur son centre, $\sigma = \mathrm{id}_H$, l'extension L/H est galoisienne à groupe de Galois fini et $\tau = \mathrm{id}_L$,
2) H est de dimension finie sur son centre, σ est un automorphisme de H d'ordre fini, $L = H$ et $\tau = \sigma$.

Cependant, la proposition 3.5 s'applique aussi de manière moins immédiate. Nous donnons ci-dessous deux exemples illustratifs.

Tout d'abord, soit k un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique nulle. Fixons un *système cohérent* $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de racines de l'unité*, c'est-à-dire $\zeta_n \in k$ est une racine primitive n-ième de l'unité et $\zeta_{nm}^n = \zeta_m$ pour tous entiers strictement positifs n et m. Soient m et n deux tels entiers tels que $n \equiv 1 \pmod{m}$. Alors $L = k((u^{1/n}))$ est une extension galoisienne de $H = k((u))$ de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si σ est l'automorphisme de H d'ordre m défini par $u \mapsto \zeta_m u$, on considère l'automorphisme τ de L défini par $u^{1/n} \mapsto \zeta_m u^{1/n}$. Alors τ est d'ordre m et, puisque $n \equiv 1 \pmod{m}$, la restriction de τ à H vaut σ. De plus, (3.2) est vraie. L'intérêt de cet exemple est qu'il s'applique à n'importe quelle extension galoisienne de H à groupe de Galois fini.

Nous donnons maintenant un exemple où L et H sont des corps gauches. Pour cela, soit K un corps gauche de dimension finie sur son centre k. Soient $m \geq 2$ un entier et G un groupe fini non trivial tels qu'il existe une extension galoisienne L/K de groupe de Galois $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times G$ [7]. Par le théorème 2.2, si ℓ est le centre de L, on a :

$$\begin{tikzcd}
 & \ell \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\ell^{\{0\}\times G} \arrow[ur, bend left, dash, "G"] \arrow[dr, dash] \arrow[dr, bend right, dash, "\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}"'] & & \ell^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\{1\}} \arrow[dl, dash] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

De plus, $H = K \otimes_k \ell^{\{0\}\times G}$ est un corps gauche et H/K est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Soient $\widetilde{\sigma}$ un générateur de $\mathrm{Gal}(h/k)$, où h est le centre de H, et σ un générateur de $\mathrm{Gal}(H/K)$ tel que $\mathrm{res}_{h/k}^{H/K}(\sigma) = \widetilde{\sigma}$. En outre, h et $\ell^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\{1\}}$ sont linéairement disjoints sur k et leur compositum vaut ℓ. Ainsi il existe $\widetilde{\tau} \in \mathrm{Gal}(\ell/k)$ d'ordre m et tel que $\mathrm{res}_{h/k}^{\ell/k}(\widetilde{\tau}) = \widetilde{\sigma}$. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ l'antécédent de $\widetilde{\tau}$ sous l'isomorphisme $\mathrm{res}_{\ell/k}^{L/K}$. Alors τ étend σ. Enfin, L/H est galoisienne de groupe G (voir théorème 2.2) et, par construction, on a $\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle \widetilde{\tau}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h)$.

La proposition 3.5 admet la réciproque partielle suivante :

Proposition 3.7. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Soient L/H une extension galoisienne à groupe de Galois fini et τ un automorphisme de L d'ordre fini n étendant σ. Notons $\widetilde{\tau}$ la restriction de τ au centre ℓ de L. Supposons que $L(t,\tau)/H(t,\sigma)$ soit galoisienne à groupe de Galois fini et que $|\mathrm{Gal}(L/H)| = |\mathrm{Gal}(L(t,\tau)/H(t,\sigma))|$. Supposons de plus que les ordres intérieurs de σ et τ soient respectivement égaux à m et n. Alors $n = m$ et $\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle \widetilde{\tau}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h)$.*

Preuve. Soit $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à h. Par l'hypothèse sur les ordres intérieurs, les centres respectifs de $H(t,\sigma)$ et $L(t,\tau)$ sont $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$ et $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^n)$ (voir proposition 2.4). Le théorème 2.2 et le lemme 2.3 montrent alors que $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^n)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)$ est galoisienne et que l'application $\mathrm{res}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^n)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}$ du I) est un isomorphisme. De plus, comme $t^m \in \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^n)$, on a $n \,|\, m$ et

[7] Une telle extension L/K existe (pour m et G arbitraires) si $K = \mathbb{H}(t)$, où $\mathbb{H}$ est le corps gauche des quaternions de Hamilton (voir §1.1).

donc $n = m$. Ainsi $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est galoisienne et l'application $\mathrm{res}^{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^n)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}}$ du II) est un isomorphisme. En outre, $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle} = \ell^{\langle\widetilde{\tau},\mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle}$ et, par l'hypothèse sur $|\mathrm{Gal}(L/H)|$, on a

$$[\ell : h] = |\mathrm{Gal}(L/H)| = |\mathrm{Gal}(L(t,\tau)/H(t,\sigma))| = [\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle} : h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}].$$

Comme $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est galoisienne, le lemme 2.7 fournit l'isomorphisme $\langle\widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle\widetilde{\tau}\rangle \rtimes \mathrm{Gal}(\ell/h)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à noter que, comme $h/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est galoisienne, $\mathrm{Gal}(\ell/h)$ est un sous-groupe normal de $\langle\widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle$. □

3.2. **Problèmes de plongement finis.**

3.2.1. *Terminologie.* Soit H un corps de dimension finie sur son centre. Un *problème de plongement fini* sur H est un épimorphisme $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$, où G est un groupe fini et L/H une extension galoisienne. On dit que α est *scindé* s'il existe un plongement $\alpha' : \mathrm{Gal}(L/H) \to G$ tel que $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(L/H)}$. Une *solution faible* à α est un isomorphisme $\beta : \mathrm{Gal}(F/H) \to G'$, où G' est un sous-groupe de G et F/H une extension galoisienne vérifiant $L \subseteq F$, tel que l'application composée $\alpha \circ \beta$ soit l'application de restriction $\mathrm{res}^{F/H}_{L/H}$ du III) du §3.1. Si $G' = G$, on dit *solution* plutôt que solution faible.

Remarque 3.8. 1) Plus généralement, on peut définir un problème de plongement fini sur un corps quelconque H (de dimension quelconque sur son centre), ainsi qu'un problème de plongement fini scindé sur H. Cependant, pour la notion de solution faible, nous avons besoin de l'existence d'une application de restriction $\mathrm{res}^{F/H}_{L/H}$. Comme mentionné dans la remarque 3.4, une telle application existe sans aucune hypothèse sur H, à condition de supposer F/H extérieure. Comme la plupart des résultats de cet article supposent H de dimension finie sur son centre, nous nous restreignons à cette situation dans la terminologie ci-dessus.
2) Soit $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Puisque G est fini et puisque H est de dimension finie sur son centre, le lemme 2.1 s'applique : L est commutatif si et seulement si H l'est. De même, si $\beta : \mathrm{Gal}(F/H) \to G'$ est une solution faible à α, alors F est commutatif si et seulement si H l'est. Par conséquent, notre terminologie étend celle du cas commutatif rappelée dans le §1.2 et aucune confusion n'est possible.

3.2.2. *Passage des corps quelconques aux corps commutatifs et vice-versa.* Soit H un corps de dimension finie sur son centre h. Nous renvoyons à (2.2) pour la définition de la forme polynomiale $\mathcal{F}_H$ associée à la norme réduite de H/h.

Soit $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Puisque l'application de restriction $\mathrm{res}^{L/H}_{\ell/h}$ du I) du §3.1 est un isomorphisme, où ℓ est le centre de L,

$$\breve{\alpha} = \mathrm{res}^{L/H}_{\ell/h} \circ \alpha : G \to \mathrm{Gal}(\ell/h) \tag{3.3}$$

est un problème de plongement fini sur h. Par le théorème 2.2, $\mathcal{F}_H$ n'a que le zéro trivial sur ℓ. De plus, si $\beta : \mathrm{Gal}(F/H) \to G'$ est une solution faible à α, alors l'application de restriction $\mathrm{res}^{F/H}_{f/h}$ du I) du §3.1 est un isomorphisme, où f est le centre de F. Ainsi

$$\breve{\beta} = \beta \circ (\mathrm{res}^{F/H}_{f/h})^{-1} : \mathrm{Gal}(f/h) \to G' \tag{3.4}$$

est une solution faible à $\breve{\alpha}$, puisque $\mathrm{res}^{L/H}_{\ell/h} \circ \mathrm{res}^{F/H}_{L/H} = \mathrm{res}^{f/h}_{\ell/h} \circ \mathrm{res}^{F/H}_{f/h}$. De plus, par le théorème 2.2, $\mathcal{F}_H$ n'a que le zéro trivial sur f et il est clair que β est une solution à α si et seulement si $\breve{\beta}$ est une solution à $\breve{\alpha}$.

Réciproquement, soit $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(\ell/h)$ un problème de plongement fini sur h tel que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur ℓ. Par le théorème 2.2, $(H \otimes_h \ell)/H$ est galoisienne à groupe de Galois fini et le centre de $H \otimes_h \ell$ vaut ℓ. Ainsi l'application de restriction $\mathrm{res}_{\ell/h}^{(H\otimes_h \ell)/H}$ du I) du §3.1 est un isomorphisme. Par conséquent, l'application composée

$$\hat{\alpha} = (\mathrm{res}_{\ell/h}^{(H\otimes_h \ell)/H})^{-1} \circ \alpha : G \to \mathrm{Gal}((H \otimes_h \ell)/H) \tag{3.5}$$

est un problème de plongement fini sur H. De plus, si $\beta : \mathrm{Gal}(f/h) \to G'$ est une solution faible à α telle que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur f, alors, par le théorème 2.2, $(H \otimes_h f)/H$ est une extension galoisienne à groupe de Galois fini et le centre de $H \otimes_h f$ vaut f. Ainsi l'application de restriction $\mathrm{res}_{f/h}^{(H\otimes_h f)/H}$ du I) du §3.1 est un isomorphisme. Par conséquent, l'application composée

$$\hat{\beta} = \beta \circ \mathrm{res}_{f/h}^{(H\otimes_h f)/H} : \mathrm{Gal}((H \otimes_h f)/H) \to G' \tag{3.6}$$

est une solution faible à $\hat{\alpha}$, puisque $\mathrm{res}_{\ell/h}^{(H\otimes_h \ell)/H} \circ \mathrm{res}_{(H\otimes_f \ell)/H}^{(H\otimes_h f)/H} = \mathrm{res}_{\ell/h}^{f/h} \circ \mathrm{res}_{f/h}^{(H\otimes_h f)/H}$. Il est également clair que β est une solution à α si et seulement si $\hat{\beta}$ est une solution à $\hat{\alpha}$.

Enfin, soit $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Puisque $L = H \otimes_h \ell$ (voir théorème 2.2), où h (resp. ℓ) est le centre de H (resp. de L), on a $\hat{\check{\alpha}} = \alpha$. De même, si $\beta : \mathrm{Gal}(F/H) \to G'$ est une solution faible à α, alors $\hat{\check{\beta}} = \beta$. Réciproquement, soit $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(\ell/h)$ un problème de plongement fini sur h tel que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur ℓ. Puisque le centre de $H \otimes_h \ell$ vaut ℓ, on a $\check{\hat{\alpha}} = \alpha$. De même, si $\beta : \mathrm{Gal}(f/h) \to G'$ est une solution faible à α telle que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur f, alors $\check{\hat{\beta}} = \beta$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant, qui généralise à la fois [DL20, théorème 7] et le théorème 1.2 de l'introduction :

Théorème 3.9. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Les applications $\beta \mapsto \check{\beta}$ et $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des solutions β à α et l'ensemble des solutions $\gamma : \mathrm{Gal}(f/h) \to G$ à $\check{\alpha}$ telles que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur f.*

3.2.3. *Solutions géométriques.* Soit H un corps de dimension finie sur son centre h, soit σ un automorphisme de H d'ordre fini m et soit $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à h. Soient $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H et τ un automorphisme de L d'ordre m étendant σ. Notons $\widetilde{\tau}$ la restriction de τ au centre ℓ de L et supposons $\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle \widetilde{\tau}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h)$. Alors, par la proposition 3.5, l'extension $L(t,\tau)/H(t,\sigma)$ est galoisienne à groupe de Galois fini et il existe une application de restriction $\mathrm{res}_{L/H}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}$, qui est en fait un isomorphisme. On peut donc considérer le problème de plongement fini

$$\alpha_{\sigma,\tau} = (\mathrm{res}_{L/H}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)})^{-1} \circ \alpha : G \to \mathrm{Gal}(L(t,\tau)/H(t,\sigma)) \tag{3.7}$$

sur $H(t,\sigma)$. Une *solution* (σ,τ)*-géométrique* à α est une solution $\beta : \mathrm{Gal}(E/H(t,\sigma)) \to G$ à $\alpha_{\sigma,\tau}$. Si $\sigma = \mathrm{id}_H$ et $\tau = \mathrm{id}_L$, on dit *solution géométrique* plutôt que solution $(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_L)$-géométrique et on écrit $\alpha_{H(t)}$ plutôt que $\alpha_{\mathrm{id}_H,\mathrm{id}_L}$. Comme $H(t,\sigma)$ est de dimension finie sur son centre (voir le 2) du lemme 2.3), on a, comme dans la remarque 3.8, que E est commutatif si et seulement si $H(t,\sigma)$ l'est. En particulier, il n'y a aucune confusion possible avec la notion de solution géométrique rappelée dans le §1.2.

De plus, comme vu dans le premier paragraphe de la preuve de la proposition 3.5, l'extension $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est galoisienne et l'application $\mathrm{res}^{\ell/h}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}}$ du II) du §3.1 est un isomorphisme. Avec $\breve{\alpha}$ comme dans (3.3), on peut considérer le problème de plongement fini sur $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ suivant :

$$\overline{\alpha}_{\sigma,\tau} = \mathrm{res}^{\ell/h}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}} \circ \breve{\alpha} : G \to \mathrm{Gal}(\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}). \tag{3.8}$$

Lemme 3.10. *On a* $\alpha_{\sigma,\tau} = (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\sigma,\tau}$.

Preuve. Par la définition de l'application de restriction $\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{L/H}$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_{\sigma,\tau} &= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{L/H})^{-1} \circ \alpha \\
&= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)})^{-1} \circ (\mathrm{res}^{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \mathrm{res}^{\ell/h}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}} \circ \breve{\alpha} \\
&= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)})^{-1} \circ (\mathrm{res}^{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(t^m)/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(t^m)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\sigma,\tau} \\
&= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\sigma,\tau},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

4. Résolution de problèmes de plongement finis scindés

Le théorème suivant est l'objectif de cette partie :

Théorème 4.1. *Soit H un corps de dimension finie sur son centre h, soit σ un automorphisme de H d'ordre fini m et soit $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à h. Soient $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H et τ un automorphisme de L d'ordre fini m étendant σ. Soit $\widetilde{\tau}$ la restriction de τ au centre ℓ de L. Supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :*
1) *α est scindé,*
2) *$\langle\widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle\widetilde{\tau}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h)$,*
3) *il existe un sous-corps ample k_0 de $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ et un corps commutatif ℓ_0 galoisien sur k_0 tels que ℓ_0 et $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ soient linéairement disjoints sur k_0 et tels que $\ell_0 \cdot h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle} = \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}$.*
Alors α admet une solution (σ,τ)-géométrique.

Avant de démontrer le théorème 4.1, nous considérons le cas $\sigma = \mathrm{id}_H$ et $\tau = \mathrm{id}_L$. Dans cette situation, nous avons le corollaire suivant, qui n'est rien d'autre que le théorème 1.3 :

Corollaire 4.2. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Supposons α scindé et h ample. Alors α a une solution géométrique.*

Remarque 4.3. 1) Si $H = L$ dans le théorème 4.1, on a l'énoncé suivant, qui est un cas particulier de [Beh20, théorème A] et dont le cas $\sigma = \mathrm{id}_H$ est [DL20, théorème B] :
Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini. Supposons que $h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ contienne un corps ample, où $\widetilde{\sigma}$ est la restriction de σ à h. Alors tout groupe fini est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $H(t,\sigma)$.
2) Le corollaire 4.2 et le 1) de cette remarque correspondent aux deux situations de la remarque 3.6 dans lesquelles la proposition 3.5 s'applique immédiatement. Bien entendu, des corollaires du théorème 4.1 correspondant aux situations "non triviales" de la remarque 3.6 peuvent aussi être donnés. Nous laissons ce travail au lecteur intéressé.

Nous démontrons maintenant le théorème 4.1. Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 4.4. *En conservant les notations du théorème, supposons que* 2) *soit vérifiée et posons* $u = t^m$. *Alors le problème de plongement fini* α *sur* H *a une solution* (σ, τ)-*géométrique, pourvu que le problème de plongement fini* $\overline{\alpha}_{\sigma,\tau}$ *(voir* (3.8)*) possède une solution géométrique* $\mathrm{Gal}(e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)) \to G$ *vérifiant* $e \subseteq \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}((u))$.

Preuve. Tout d'abord, notons que le problème de plongement fini $\overline{\alpha}_{\sigma,\tau}$ est bien défini puisque 2) est vraie. Soit $\beta : \mathrm{Gal}(e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)) \to G$ une solution géométrique à $\overline{\alpha}_{\sigma,\tau}$ telle que $e \subseteq \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}((u))$. Puisque la dernière inclusion vaut, [Beh20, proposition 2.1.2] s'applique : $L(t,\tau) \otimes_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u)} e$ est un corps. De plus, puisque 2) est vraie, on a

$$L(t,\tau) = H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u) \tag{4.1}$$

(voir lemme 2.5). Ainsi, en vertu de la proposition 37 de [Des12], on a

$$L(t,\tau) \otimes_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u)} e = (H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u)) \otimes_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u)} e = H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} e.$$

En particulier, $F = H(t,\sigma) \otimes_{h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} e$ est un corps et, par le §2.1, l'extension $F/H(t,\sigma)$ est galoisienne. De plus, puisque e contient $\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}(u)$ et (4.1) est vraie, on a $L(t,\tau) \subseteq F$.

Maintenant, le §2.1 montre que $\mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)}$ est un isomorphisme. On peut alors considérer l'isomorphisme composé $\beta \circ \mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} : \mathrm{Gal}(F/H(t,\sigma)) \to G$. Le lemme 3.10 fournit alors

$$\begin{aligned}
\alpha_{\sigma,\tau} \circ \beta \circ \mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} &= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\sigma,\tau} \circ \beta \circ \mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} \\
&= (\mathrm{res}^{L(t,\tau)/H(t,\sigma)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}})^{-1} \circ \mathrm{res}^{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)}_{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}} \circ \mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{e/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)} \\
&= \mathrm{res}^{F/H(t,\sigma)}_{L(t,\tau)/H(t,\sigma)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme. $\square$

Preuve du théorème 4.1. Par 3), l'application de restriction $\mathrm{res}^{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}}_{\ell_0/k_0}$ est un isomorphisme. Considérons le problème de plongement fini

$$\alpha' = \mathrm{res}^{\ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}}_{\ell_0/k_0} \circ \overline{\alpha}_{\sigma,\tau} : G \to \mathrm{Gal}(\ell_0/k_0)$$

sur k_0. Puisque k_0 est ample (par 3)) et α' est scindé (par 1)), on peut appliquer le résultat de Pop résolvant la conjecture de Dèbes et Deschamps sur les corps amples : α' a une solution géométrique $\beta : \mathrm{Gal}(e/k_0(u)) \to G$ vérifiant $e \subseteq \ell_0((u))$ (voir aussi [HJ98, Theorem 1]). Or, par 3) et puisque $e \cap \overline{k_0} = \ell_0$, l'application $\mathrm{res}^{eh^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)}_{e/k_0(u)}$ est un isomorphisme. Ainsi

$$\beta \circ \mathrm{res}^{eh^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)}_{e/k_0(u)} : \mathrm{Gal}(eh^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}/h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}(u)) \to G$$

est une solution géométrique à $\overline{\alpha}_{\sigma,\tau}$. De plus, comme $e \subseteq \ell_0((u))$, on a $eh^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle} \subseteq \ell_0 h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}((u)) = \ell^{\langle\widetilde{\tau}\rangle}((u))$. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 4.4 pour conclure la démonstration. $\square$

5. A propos de la réduction faible→scindé

Dans cette dernière partie, nous étendons la réduction faible→scindé à la situation des problèmes de plongement finis sur les corps de dimension finie sur leurs centres. Nous donnons aussi une variante du théorème 4.1 pour les problèmes de plongement finis admettant une solution faible (voir corollaire 5.4).

5.1. **Extensions de la réduction faible→scindé.** Rappelons tout d'abord cette réduction dans le cas commutatif (voir [Pop96, §1 B) 2)] pour une brève démonstration) :

Proposition 5.1. *Soient k un corps commutatif et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(\ell/k)$ un problème de plongement fini sur k. Pour toute solution faible $\mathrm{Gal}(\ell'/k) \to G'$ à α, il existe un problème de plongement fini scindé $\alpha' : G'' \to \mathrm{Gal}(\ell'/k)$ sur k vérifiant les propriétés suivantes :*
1) $\ker(\alpha) \cong \ker(\alpha')$,
2) *toute solution $\mathrm{Gal}(f'/k) \to G''$ à α' fournit une solution $\mathrm{Gal}(f/k) \to G$ à α telle que $f \subseteq f'$,*
3) *toute solution géométrique $\mathrm{Gal}(e'/k(t)) \to G''$ à α' fournit une solution géométrique $\mathrm{Gal}(e/k(t)) \to G$ à α vérifiant $e \subseteq e'$.*

Nous démontrons maintenant une première généralisation :

Proposition 5.2. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre, $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H et $\gamma : \mathrm{Gal}(L'/H) \to G'$ une solution faible à α. Il existe un problème de plongement fini scindé $\alpha' : G'' \to \mathrm{Gal}(L'/H)$ sur H vérifiant :*
1) $\ker(\alpha) \cong \ker(\alpha')$,
2) *toute solution $\mathrm{Gal}(F'/H) \to G''$ à α' fournit une solution $\mathrm{Gal}(F/H) \to G$ à α vérifiant $F \subseteq F'$.*

Preuve. Considérons le problème de plongement fini $\breve{\alpha} : G \to \mathrm{Gal}(\ell/h)$ sur le centre h de H (voir (3.3)), où ℓ est le centre de L. Comme γ est une solution faible à α, l'application $\breve{\gamma} : \mathrm{Gal}(\ell'/h) \to G'$ (voir (3.4)), où ℓ' est le centre de L', est une solution faible à $\breve{\alpha}$ et $\mathcal{F}_H$ (voir (2.2)) n'a que le zéro trivial sur ℓ'. La proposition 5.1 fournit alors un problème de plongement fini scindé $(\breve{\alpha})' : G'' \to \mathrm{Gal}(\ell'/h)$ sur h qui vérifie les 1) et 2) de cette dernière proposition. Comme $\mathcal{F}_H$ n'a que le zéro trivial sur ℓ', on peut considérer le problème de plongement fini $\widehat{(\breve{\alpha})'} : G'' \to \mathrm{Gal}(L'/H)$ sur H (voir (3.5)), que l'on note α'. Notons que α' est scindé (car il en est de même pour $(\breve{\alpha})'$). De plus, puisque $(\breve{\alpha})'$ vérifie le 1) de la proposition 5.1, on a $\ker(\alpha') = \ker((\breve{\alpha})') \cong \ker(\breve{\alpha}) = \ker(\alpha)$, ce qui démontre le 1). Maintenant, soit $\beta' : \mathrm{Gal}(F'/H) \to G''$ une solution à α'. Alors $\breve{\beta}' : \mathrm{Gal}(f'/h) \to G''$ est une solution à $\breve{\alpha}' = (\breve{\alpha})'$, où f' est le centre de F', et $\mathcal{F}_H$ n'a que le zéro trivial sur f'. Comme $(\breve{\alpha})'$ vérifie le 2) de la proposition 5.1, il existe une solution $\beta : \mathrm{Gal}(f/h) \to G$ à $\breve{\alpha}$ telle que $f \subseteq f'$. Enfin, puisque $\mathcal{F}_H$ n'a que le zéro trivial sur f, on en déduit que $\hat{\beta} : \mathrm{Gal}((H \otimes_h f)/H) \to G$ (voir (3.6)) est une solution à $\hat{\breve{\alpha}} = \alpha$ vérifiant $H \otimes_h f \subseteq H \otimes_h f' = F'$. $\square$

Nous concluons cette partie avec la variante géométrique de la proposition 5.2 suivante :

Proposition 5.3. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Soient $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H et τ un automorphisme de L d'ordre m, étendant σ et tel que*

$$\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h) \rangle \cong \langle \widetilde{\tau} \rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h), \tag{5.1}$$

où $\widetilde{\tau}$ est la restriction de τ au centre ℓ de L. Soit $\gamma : \mathrm{Gal}(L'/H) \to G'$ une solution faible à α et soit τ' un automorphisme de L' d'ordre m, étendant τ et tel que

$$\langle \widetilde{\tau'}, \mathrm{Gal}(\ell'/h) \rangle \cong \langle \widetilde{\tau'} \rangle \times \mathrm{Gal}(\ell'/h), \tag{5.2}$$

où $\widetilde{\tau'}$ est la restriction de τ' au centre ℓ' de L'. Alors il existe un problème de plongement fini scindé $\alpha' : G'' \to \mathrm{Gal}(L'/H)$ sur H vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\ker(\alpha) \cong \ker(\alpha')$,
2) *toute solution (σ, τ')-géométrique* $\mathrm{Gal}(E'/H(t,\sigma)) \to G''$ *à α' fournit une solution (σ,τ)-géométrique* $\mathrm{Gal}(E/H(t,\sigma)) \to G$ *à α vérifiant $E \subseteq E'$.*

Preuve. Comme (5.1) vaut, on peut considérer le problème de plongement fini

$$\alpha_{\sigma,\tau} : G \to \mathrm{Gal}(L(t,\tau)/H(t,\sigma))$$

sur $H(t,\sigma)$ (voir (3.7)). De plus, comme (5.2) vaut, $L'(t,\tau')/H(t,\sigma)$ est galoisienne et il existe une application $\mathrm{res}^{L'(t,\tau')/H(t,\sigma)}_{L'/H}$, qui est en fait un isomorphisme (voir proposition 3.5). On peut donc considérer l'isomorphisme composé

$$\gamma_{\sigma,\tau} = \gamma \circ \mathrm{res}^{L'(t,\tau')/H(t,\sigma)}_{L'/H} : \mathrm{Gal}(L'(t,\tau')/H(t,\sigma)) \to G'$$

et l'on voit que $\gamma_{\sigma,\tau}$ est une solution faible à $\alpha_{\sigma,\tau}$. Puisque $H(t,\sigma)$ est de dimension finie sur son centre (voir le 2) du lemme 2.3), la proposition 5.2 s'applique et fournit un problème de plongement fini scindé $\underline{\alpha} : G'' \to \mathrm{Gal}(L'(t,\tau')/H(t,\sigma))$ sur $H(t,\sigma)$ qui vérifie le 1) et le 2) de cette dernière proposition. On peut alors considérer le problème de plongement fini

$$\alpha' = \mathrm{res}^{L'(t,\tau')/H(t,\sigma)}_{L'/H} \circ \underline{\alpha} : G'' \to \mathrm{Gal}(L'/H)$$

sur H. Comme $\underline{\alpha}$ est scindé, il en est de même pour α' et on a $\ker(\alpha') = \ker(\underline{\alpha}) \cong \ker(\alpha_{\sigma,\tau}) = \ker(\alpha)$. Maintenant, soit $\beta' : \mathrm{Gal}(E'/H(t,\sigma)) \to G''$ une solution (σ,τ')-géométrique à α'. Alors β' est une solution à $\alpha'_{\sigma,\tau'} = \underline{\alpha}$. Comme $\underline{\alpha}$ vérifie le 2) de la proposition 5.2, il existe une solution $\beta : \mathrm{Gal}(E/H(t,\sigma)) \to G$ à $\alpha_{\sigma,\tau}$ vérifiant $E \subseteq E'$. Cela conclut la démonstration puisque, par définition, β est une solution (σ,τ)-géométrique à α. □

5.2. **Extension du théorème 4.1.** Notre dernier objectif est la variante du théorème 4.1 suivante, qui concerne les problèmes de plongement finis admettant une solution faible :

Corollaire 5.4. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et σ un automorphisme de H d'ordre fini m. Soient $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H et τ un automorphisme de L d'ordre m étendant σ. Supposons :*
1) *α admet une solution faible $\mathrm{Gal}(L'/H) \to G'$ et il existe un automorphisme τ' de L' d'ordre m, étendant τ et tel que $\langle \widetilde{\tau'}, \mathrm{Gal}(\ell'/h)\rangle \cong \langle \widetilde{\tau'}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell'/h)$, où $\widetilde{\tau'}$ est la restriction de τ' au centre ℓ' de L',*
2) *$\langle \widetilde{\tau}, \mathrm{Gal}(\ell/h)\rangle \cong \langle \widetilde{\tau}\rangle \times \mathrm{Gal}(\ell/h)$, où $\widetilde{\tau}$ est la restriction de τ au centre ℓ de L,*
3) *$h^{\langle\widetilde{\sigma}\rangle}$ est un corps ample, où $\widetilde{\sigma}$ est la restriction de σ à h.*
Alors α a une solution (σ,τ)-géométrique.

Preuve. Comme 1) et 2) sont vraies, la proposition 5.3 s'applique et fournit un problème de plongement fini scindé $\alpha' : G'' \to \mathrm{Gal}(L'/H)$ sur H vérifiant le 1) et le 2) de cette dernière proposition. Maintenant, comme 1) et 3) sont vraies et comme α' est scindé, α' a une solution (σ,τ')-géométrique (voir théorème 4.1). Il ne reste alors plus qu'à utiliser que le problème de plongement fini α' vérifie le 2) de la proposition 5.3 pour achever la démonstration. □

Donnons à titre d'illustration l'énoncé simple suivant, qui est le cas $(\sigma,\tau,\tau') = (\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_L, \mathrm{id}_{L'})$ et qui généralise le corollaire 4.2 :

Corollaire 5.5. *Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Supposons que α possède une solution faible et que h soit ample. Alors α a une solution géométrique.*

5.3. **Remarque finale.** Pour simplifier, on se restreint au cas d'une indéterminée centrale t. Soient H un corps de dimension finie sur son centre h et $\alpha : G \to \mathrm{Gal}(L/H)$ un problème de plongement fini sur H. Par le lemme 4.4, α a une solution géométrique, si $\breve{\alpha}$ a une solution géométrique $\beta : \mathrm{Gal}(e/h(t)) \to G$ vérifiant $e \subseteq \ell((t))$, où ℓ est le centre de L.

Cependant, la réciproque de cette implication n'est pas vraie en général. En effet, supposons que les trois condition suivantes soient vérifiées :
1) h est ample,
2) α possède une solution faible,
3) α n'est pas scindé.
Comme 1) et 2) sont vraies, α a une solution géométrique (voir corollaire 5.5). Cependant, supposons que $\breve{\alpha}$ possède une solution géométrique $\beta : \mathrm{Gal}(e/h(t)) \to G$ vérifiant $e \subseteq \ell((t))$. Alors 0 n'est pas un point de branchement[8] de $e/\ell(t)$. Puisque 0 n'est pas non plus un point de branchement de $\ell(t)/h(t)$, on en déduit que 0 n'est pas un point de branchement de $e/h(t)$. De plus, le corps résiduel de e en n'importe quel idéal maximal $\mathfrak{P}$ contenant t vaut ℓ. Si $D_{\mathfrak{P}}$ désigne le groupe de décomposition de l'extension $e/h(t)$ en l'idéal maximal $\mathfrak{P}$, on a un isomorphisme $\varphi_0 : D_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}(\ell/h)$ défini comme suit. Soit B la clôture intégrale de $h[t]$ dans e et soit $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de B contenant t. La réduction modulo $\mathfrak{P}$ de n'importe quel élément x de B est notée $\overline{x}$. On a donc $B/\mathfrak{P} = \ell$ et, pour $\sigma \in D_{\mathfrak{P}}$ et $x \in B$, on pose $\varphi_0(\sigma)(\overline{x}) = \overline{\sigma(x)}$. On vérifie alors facilement que l'on a $\breve{\alpha} \circ \beta \circ \varphi_0^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Gal}(\ell/h)}$, ce qui contredit 3).

Pour conclure, nous donnons un exemple de problème de plongement fini comme ci-dessus. Considérons le groupe quaternionique Q_8, muni de la présentation $\langle i, j \mid i^4 = 1, i^2 = j^2, jij^{-1} = i^{-1} \rangle$, et le problème de plongement fini $\alpha : Q_8 \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2})/\mathbb{Q}((t)))$ sur le corps ample $\mathbb{Q}((t))$, défini par $\alpha(i)(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ et $\alpha(j)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Puisque Q_8 ne peut s'écrire sous la forme $H_1 \rtimes H_2$, où H_1 et H_2 sont des sous-groupes propres et non triviaux de Q_8, le problème de plongement fini α n'est pas scindé. Cependant, α a une solution faible. En effet, d'après [Ser92, Theorem 1.2.1], l'extension $\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}((t))$ est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et on a clairement $\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}})$. Si σ désigne un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}((t)))$, on considère l'isomorphisme β : $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}((t))) \to \langle i \rangle$ défini par $\sigma \mapsto i$. Alors β est une solution faible à α. Enfin, si l'on considère la $\mathbb{Q}((t))$-base $1, i, j, ij$ du corps gauche $H_{\mathbb{Q}((t))}$ des quaternions à coefficients dans $\mathbb{Q}((t))$, alors la forme $\mathcal{F}_{H_{\mathbb{Q}((t))}}$ (voir (2.2)) vérifie $\mathcal{F}_{H_{\mathbb{Q}((t))}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Puisque l'on a $\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}}) \subseteq \mathbb{R}((t))$, la forme $\mathcal{F}_{H_{\mathbb{Q}((t))}}$ ne possède que le zéro trivial sur $\mathbb{Q}((t))(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ (voir [DL20, lemme 8]). Ainsi $\hat{\beta}$ est une solution faible au problème de plongement fini $\hat{\alpha}$ sur $H_{\mathbb{Q}((t))}$, ce dernier n'étant pas scindé.

References

[ALP20] Gil Alon, François Legrand, and Elad Paran. Galois groups over rational function fields over skew fields. 2020. To appear in Comptes Rendus - Mathématique.

[Beh20] Angelot Behajaina. Théorie inverse de Galois sur les corps de fractions rationnelles tordus. (French). *Manuscript*, 2020. arXiv:2008.02587.

[8] Etant donnée une extension galoisienne $e/k(t)$ de corps commutatifs à groupe de Galois fini, on dit que $t_0 \in \overline{k}$ est un *point de branchement* de $e/k(t)$ si l'idéal maximal de $\overline{k}[t]$ engendré par $t - t_0$ est ramifié dans la clôture intégrale de $\overline{k}[t]$ dans $e\overline{k}$.

[Bla72] André Blanchard. *Les corps non commutatifs. (French).* Collection Sup : Le Mathématicien, No. 9. Presses Universitaires de France, Vendôme, 1972. 135 pp.

[Bou12] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples. (French).* Springer, Berlin, 2012. x+489 pp. Second revised version of the 1958 edition.

[BSF13] Lior Bary-Soroker and Arno Fehm. Open problems in the theory of ample fields. In *Geometric and differential Galois theories*, volume 27 of *Sémin. Congr.*, pages 1–11. Soc. Math. France, Paris, 2013.

[Coh95] Paul Moritz Cohn. *Skew fields. Theory of general division rings.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+500 pp.

[DD97] Pierre Dèbes and Bruno Deschamps. The regular inverse Galois problem over large fields. In *Geometric Galois actions, 2*, volume 243 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 119–138. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Dèb01a] Pierre Dèbes. Méthodes topologiques et analytiques en théorie inverse de Galois : théorème d'existence de Riemann. (French). In *Arithmétique de revêtements algébriques (Saint-Étienne, 2000)*, volume 5 of *Sémin. Congr.*, pages 27–41. Soc. Math. France, Paris, 2001.

[Dèb01b] Pierre Dèbes. Théorie de Galois et géométrie : une introduction. (French). In *Arithmétique de revêtements algébriques (Saint-Étienne, 2000)*, volume 5 of *Sémin. Congr.*, pages 1–26. Soc. Math. France, Paris, 2001.

[Des01] Bruno Deschamps. A propos d'un théorème de Frobenius. (French). *Ann. Math. Blaise Pascal*, 8(2):61–66, 2001.

[Des12] Bruno Deschamps. *Une introduction au groupe de Brauer. (French).* Lecture notes, 2012. At http://perso.univ-lemans.fr/ bdesch/BrauerCaen.pdf.

[Des15] Bruno Deschamps. Minimalité et abyssalité des extensions abéliennes et projectives de $\mathbb{Q}$. (French). *J. Algebra*, 441:1–20, 2015.

[Des18] Bruno Deschamps. Des extensions plus petites que leurs groupes de Galois. (French). *Comm. Algebra*, 46(10):4555–4560, 2018.

[DL20] Bruno Deschamps and François Legrand. Le problème inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale. (French). *J. Pure Appl. Algebra*, 224(5), 2020. 106240.

[FJ08] Michael D. Fried and Moshe Jarden. *Field arithmetic.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 11. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2008. Revised by Jarden. xxiv+792 pp.

[GW04] Kenneth R. Goodearl and Robert Breckenridge Warfield, Jr. *An Introduction to noncommutative Noetherian rings.* London Mathematical Society Student Texts, 61. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Second edition. xxiv+344 pp.

[HJ98] Dan Haran and Moshe Jarden. Regular split embeddings problems over function fields of one variable over ample fields. *J. Algebra*, 208(1):147–164, 1998.

[HS05] David Harbater and Katherine F. Stevenson. Local Galois theory in dimension two. *Adv. Math.*, 198(2):623–653, 2005.

[Jar11] Moshe Jarden. *Algebraic patching.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011. xxiv+290 pp.

[MM18] Gunter Malle and B. Heinrich Matzat. *Inverse Galois theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2018. Second edition. xvii+532 pp.

[Ore33] Oystein Ore. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 34(3):480–508, 1933.

[Par09] Elad Paran. Split embedding problems over complete domains. *Ann. of Math. (2)*, 170(2):899–914, 2009.

[Pop96] Florian Pop. Embedding problems over large fields. *Ann. of Math. (2)*, 144(1):1–34, 1996.

[Pop14] Florian Pop. Little survey on large fields - old & new. In *Valuation theory in interaction*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 432–463. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.

[Ser92] Jean-Pierre Serre. *Topics in Galois Theory*, volume 1 of *Research Notes in Mathematics.* Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992. Lecture notes prepared by Henri Darmon [Henri Darmon]. With a foreword by Darmon and the author. xvi+117 pp.

[Völ96] Helmut Völklein. *Groups as Galois groups. An introduction*, volume 53 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. xviii+248 pp.

E-mail address: angelot.behajaina@unicaen.fr

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen - Normandie, BP 5186, 14032 Caen Cedex, France

E-mail address: Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen - Normandie, BP 5186, 14032 Caen Cedex, France et Département de Mathématiques, Le Mans Université, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

E-mail address: francois.legrand@tu-dresden.de

Institut für Algebra, Fachrichtung Mathematik, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany