La méthode Behajaina appliquée aux corps de fractions tordus par une dérivation

Bruno DESCHAMPS
LMNO - Le Mans Université

Résumé.– Dans cet article, nous montrons que le Problème Inverse de la théorie de Galois admet une réponse positive sur certains corps de fractions tordus $H(t,\alpha,\delta)$ non triviaux.

Abstract.– In this article, we show that the Inverse Galois Problem has a positive answer over some non-trivial skew fields of fractions $H(t,\alpha,\delta)$.

1.– Introduction. Cet article s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux récents sur la problématique inverse de la théorie de Galois pour les corps gauches. Un des résultats les plus significatifs de la théorie inverse de Galois classique, du à Pop (voir [Pop]), affirme que si un corps commutatif H contient un corps ample[1], alors le Problème Inverse de Galois Régulier admet une réponse positive sur le corps H (i.e. tout groupe fini est groupe de Galois d'une extension régulière du corps des fractions $H(t)$). Lorsque le corps H n'est plus nécessairement commutatif, les analogues naturels du corps de fractions $H(t)$ ont été décrits et étudiés par Ore (voir [Ore]). Il s'agit des corps $H(t,\alpha,\delta)$ de fractions d'anneaux de polynômes en la variable t, tordus par la multiplication induite par la relation $ta=\alpha(a)t+\delta(a)$ où α est un automorphisme de H et δ est une α-dérivation[2] de H. La théorie de Galois, dans le cas des corps gauches, a notamment été développée par Jacobson (voir [Jac]) et autorise la problématique de Galois inverse. Dans un premier article (voir [DL]), l'auteur et Legrand ont montré que si H était un corps gauche de dimension finie sur son centre C, alors le Problème Inverse de Galois possédait une réponse positive sur le corps des fractions tordu à indéterminée centrale $H(t)=H(t,\mathrm{Id},0)$ dès que C contenait un corps ample. L'idée arithmétique utilisée pour ce résultat consistait en un contrôle efficace de la norme réduite de l'extension des scalaires. Telle quelle, leur méthode ne pouvait s'appliquer à autre chose que $\alpha=\mathrm{Id}$ et uniquement sous l'hypothèse $[H:k]<+\infty$. Dans l'article [Beh], Behajaina a repris la stratégie de l'extension des scalaires introduite dans [DL] et a proposé une idée astucieuse et très efficace de plongement dans un corps de séries tordu, pour montrer que le résultat restait vrai sur le corps $H(t,\alpha,0)$ lorsque α était d'ordre fini et surtout en ne faisant aucune hypothèse de finitude de H sur son centre C.

Dans cet article, nous adaptons cette idée de Behajaina pour s'attaquer au cas où $\delta\neq 0$. Dans [Beh], on utilise un plongement du corps $H(t,\alpha)$ dans le corps des séries tordu $H((t,\alpha))$[3], mais ce plongement n'existe que pour $\delta=0$. Pour le cas $\delta\neq 0$, nous exploitons une idée de Schur (voir [Sch]) qui permet de plonger $H(t,\alpha,\delta)$ dans un corps de séries tordu plus "compliqué" que $H((t,\alpha))$, noté $H_{\alpha,\delta}((z))$, et qui correspond moralement en une complétion en t^{-1} de $H(t,\alpha,\delta)$ (un analogue non commutatif du corps de séries de Laurent $k((1/t))$). L'étude du corps $H_{\alpha,\delta}((z))$ et du plongement de $H(t,\alpha)$ associé est l'objet de la partie 2 de ce texte. La méthode Behajaina, que nous formalisons dans la partie 3, s'avère alors payante dans cette situation plus générale et permet de montrer le

Théorème Principal.– *Soient H un corps de centre C, $\alpha\in\mathrm{Aut}(H)$ un automorphisme de H, $\delta\in\mathrm{Der}_\alpha(H)$ une α-dérivation, $C_{\mathrm{cste}(\delta)}$ le corps des δ-constantes de C et $H(t,\alpha,\delta)$ le corps des fractions tordu par α et δ. S'il existe un entier $m\geq 1$ tel que $t^m\in Z(H(t,\alpha,\delta))$ et si le sous-corps de $C_{\mathrm{cste}(\delta)}$ laissé invariant par α*

$$C_0=C_{\mathrm{cste}(\delta)}^{<\alpha>}=\{x\in C/\ \delta(x)=0,\ \alpha(x)=x\}$$

---

[0] Classification AMS 2010 : 12E15, 12F12.

[1] Notion introduite par Pop, qui appelle ces corps "large". Il s'agit des corps commutatifs K qui vérifient que, toute courbe courbe lisse définie sur K et géométriquement irréductible possède une infinité de points K-rationnels dès qu'elle en possède un.

[2] $\delta: H\longrightarrow H$ est un morphisme additif qui vérifie de plus $\delta(ab)=\delta(a)b+\alpha(a)\delta(b)$. Lorsque $\alpha=\mathrm{Id}$, δ est une dérivation au sens classique du terme.

[3] $H((t,\alpha))$ est le complété en t de $H(t,\alpha)$ et correspond au corps des séries de Laurent tordu par la multiplication induite par la relation $ta=\alpha(a)t$.

contient un corps ample, alors le Problème Inverse de la théorie de Galois admet une réponse positive sur $H(t, \alpha, \delta)$.

Ce théorème généralise bien [Beh,Théorème A] puisque, si $\delta = 0$ et $o(\alpha) = m$, alors t^m est central dans $H(t, \alpha)$. Il est remarquable (voir [Coh]) que, si δ est intérieure[4] (e.g. lorsque $C \neq C^{<\alpha>}$), alors le corps $H(t, \alpha, \delta)$ est en fait isomorphe à $H(t, \alpha)$. De même, si l'on suppose maintenant que α est intérieur (e.g. lorsque $C = C^{<\alpha>}$ et $\delta_{|C} \neq 0$), alors le corps $H(t, \alpha, \delta)$ est en fait isomorphe à un corps de fractions tordu $H(t, \mathrm{Id}, \delta')$ où δ' est alors une simple dérivation du corps H. Ainsi, l'étude de $H(t, \alpha, \delta)$ se ramène uniquement à trois situations : $H(t, \alpha)$, $H(t, \mathrm{Id}, \delta)$ avec δ non intérieure et $H(t, \alpha, \delta)$ avec α et δ non intérieurs. Le Théorème Principal étend donc [Beh,Théorème A] aux deux dernières situations. C'est dans ces deux situations que nous donnons des exemples d'application, en fin d'article.

Pour le lecteur non familiarisé à la théorie de Galois sur les corps gauches, nous le renvoyons aux livres [Jac] et [Coh], ainsi qu'à l'article [DL] où les éléments essentiels de cette théorie sont introduits de manière *ad hoc*. Pour la problématique inverse de Galois sur les corps gauches, et notamment sur les corps de fractions tordus, nous renvoyons à [Des], [DL], [Beh] et [BDL].

Cet article s'inscrit dans les travaux du projet RIN "TIGaNoCo" (Théorie Inverse de Galois Non Commutative), financé par l'Union Européenne dans le cadre du programme opérationnel FEDER/FSE.

2.– Plongement sériel d'un corps de fractions tordu. On considère un corps H, un automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ et une α-dérivation $\delta \in \mathrm{Der}_\alpha(H)$. La définition du classique corps des séries de Laurent tordu $H((t, \alpha))$ n'a pas de sens si l'on rajoute $\delta \neq 0$. Pour contourner cette difficulté, Schur a introduit une idée qui va permettre de plonger le corps $H(t, \alpha, \delta)$ dans un autre corps de séries tordu en complétant, non pas $H[t, \alpha, \delta]$ comme pour le cas $\delta = 0$, mais plutôt le sous-anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}] =< H, t^{-1} >$ de $H(t, \alpha, \delta)$, engendré par H et t^{-1}. Cette idée, introduite dans [Sch], consiste à considérer la variable $z = t^{-1}$ et à remarquer que, puisque $ta = \alpha(a)t + \delta(a)$ alors on a, par récurrence sur l'entier $n \geq 1$,

$$(F) \quad az = z\alpha(a) + z\delta(a)z = z\alpha(a) + z^2\alpha \circ \delta(a) + z^2\delta^2(a)z = \cdots = z\alpha(a) + z^2\alpha \circ \delta(a) + \cdots + z^n\alpha \circ \delta^{n-1}(a) + z^n\delta^n(a)z$$

Une première conséquence de cette égalité (F) est que, si δ est localement nilpotente (i.e. pour tout $a \in H$, il existe $n_a \geq 0$ tel que $\delta^{n_a}(a) = 0$), alors on a

$$az = \sum_{n \geq 1} z^n \alpha \circ \delta^{n-1}(a) = \sum_{n=1}^{n_a+1} z^n \alpha \circ \delta^{n-1}(a)$$

Dans cette situation, l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est donc plus simplement égal à l'ensemble des polynômes à coefficients à droite, en la variable t^{-1} :

$$H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]_0 = \{t^{-n}a_0 + \cdots + ta_{n-1} + a_n / \ n \geq 0, \ a_0, \cdots, a_n \in H\}$$

Cette remarque permet d'établir une propriété forte de l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$:

Lemme 1.– *Si δ est localement nilpotente alors l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est un anneau de Ore et $H(t, \alpha, \delta)$ est son corps de fractions.*

Preuve : Commenọns par remarquer que, dans $H(t, \alpha, \delta)$, la conjugaison par l'élément t^{-1} (resp. t) laisse stable $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$. En effet, pour tout $a \in H$, on a :

$$t^{-1}at = t^{-1}(t\alpha^{-1}(a) - \delta \circ \alpha^{-1}(a)) = \alpha^{-1}(a) - t^{-1}\delta \circ \alpha^{-1}(a) \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$$

et, respectivement, si $n \geq 1$ est tel que $\delta^n(a) = 0$ alors, par la formule (F), on a :

$$tat^{-1} = \alpha(a) + t^{-1}\alpha \circ \delta(a) + \cdots + t^{-n}\alpha \circ \delta^{n-1}(a) \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$$

ce qui prouve bien la propriété, puisque la conjugaison est un morphisme.

[4] C'est-à-dire, s'il existe $\lambda \in H$ tel que $\delta(x) = \lambda x - \alpha(x)\lambda$, pour tout $x \in H$.

Si l'on considère maintenant $p = a_n t^n + \cdots + a_0 \in H[t,\alpha,\delta]$, en posant

$$\widehat{p} = t^{-n}p = (t^{-n}a_n t^n) + t^{-1}(t^{-(n-1)}a_n t^{n-1}) + \cdots + t^{-n}a_0 \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$$

et $\widetilde{p} = t^n \widehat{p} t^{-n} \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$, on voit que,

Pour tout $p \in H[t,\alpha,\delta]$, *il existe un entier* $n \geq 0$ *et* $\widetilde{p}, \widehat{p} \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ *tels que* $p = \widetilde{p}t^n = t^n\widehat{p}$

Une fois cette propriété remarquée, si l'on considère deux éléments $a, b \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ alors dans $H(t,\alpha,\delta)$, on peut écrire $a = p_a q_a^{-1}$ et $b = p_b q_b^{-1}$ avec $p_a, p_b, q_a, q_b \in H[t,\alpha,\delta]$ (l'anneau $H[t,\alpha,\delta]$ étant de Ore et $H(t,\alpha,\delta)$ étant, par définition, son corps de fractions). Avec les notations précédentes, on peut écrire $p_a = a\widetilde{q_a}t^{n_a}$ et $p_b = b\widetilde{q_b}t^{n_b}$ avec $n_a, n_b \geq 0$ et $\widetilde{q_a}, \widetilde{q_b} \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$. Comme $H[t,\alpha,\delta]$ est un anneau de Ore, il existe $A, B \in H[t,\alpha,\delta]$ non nuls tels que $p_a A = p_b B$. On pose $A = t^{n_A}\widehat{p_A}$ et $B = t^{n_A}\widehat{p_A}$ et, en considérant les entiers positifs $h = n_a + n_A$ et $g = n_b + n_B$ (avec, par exemple, $h \geq g$), on a alors

$$\begin{aligned} p_a A = p_b B \quad &\Longrightarrow \quad a\widetilde{q_a}t^h\widehat{p_A} = b\widetilde{q_b}t^g\widehat{p_B} \\ &\Longrightarrow \quad a\widetilde{q_a}(t^h\widehat{p_A}t^{-h})t^h = b\widetilde{q_b}(t^g\widehat{p_B}t^{-g})t^g \\ &\Longrightarrow \quad a\left(\widetilde{q_a}(t^h\widehat{p_A}t^{-h})\right) = b\left(\widetilde{q_b}(t^g\widehat{p_B}t^{-g})t^{g-h}\right) \end{aligned}$$

Les éléments $\widetilde{q_a}, \widetilde{q_b}$ et t^{g-h} sont des éléments non nuls de $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ et, d'après ce qui précède, les conjugués $t^h\widehat{p_A}t^{-h}$ et $t^g\widehat{p_B}t^{-g}$ restent dans l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$. On a donc trouvé $u, v \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$, non nuls, tels que $au = bv$. Ainsi, $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est un anneau de Ore à droite. La même stratégie montre qu'il est aussi de Ore à gauche.

Le plus petit sous-corps de $H(t,\alpha,\delta)$ qui contient $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ contient nécessairement H et $t = (t^{-1})^{-1}$. Il est donc égal à $H(t,\alpha,\delta)$ tout entier et $H(t,\alpha,\delta)$ est donc bien un corps de fractions de $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$. Il est unique à isomorphisme près, puisque nous venons de montrer que $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est un anneau de Ore.

□

Lorsque δ est localement nilpotente on a donc $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}] = H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]_0$, mais lorsque δ n'est pas localement nilpotente, l'ensemble $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]_0$ est *a priori* juste un sous-groupe additif de $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ et la somme infinie $az = \sum_{n\geq 1} z^n \alpha \circ \delta^{n-1}(a)$ n'a pas de sens dans $H_{\alpha,\delta}[z]$. Elle peut cependant en prendre un dans un certain anneau de séries : on introduit, à cet effet, l'anneau $H_{\alpha,\delta}[[z]]$ des séries entières formelles (à coefficients à droite) muni du produit induit par la relation $az = \sum_{n\geq 1} z^n \alpha \circ \delta^{n-1}(a)$. Le produit a bien un sens, car la valuation de az^n vaut n. On démontre (voir [Coh, Theorem 2.3.1.]) que $H_{\alpha,\delta}[[z]]$ est un anneau de Ore et qu'il possède un corps de fractions composé des séries formelles à coefficients à droite

$$H_{\alpha,\delta}((z)) = \left\{ z^{-n}a_{-n} + \cdots + a_0 + za_1 + z^2a_2 + \cdots \right\}$$

(avec $az^{-1} = z^{-1}\alpha^{-1}(a) - \delta \circ \alpha^{-1}(a)$). Une fois ce corps décrit, on dispose alors d'un plongement naturel de l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ dans $H_{\alpha,\delta}((z))$ (par la correspondance $a \longmapsto a$ pour $a \in H$ et $t^{-1} \longmapsto z$). D'après le Lemme 1, si δ est localement nilpotente alors l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est de Ore, et donc le plongement se relève d'une unique manière à son corps de fractions $H(t,\alpha,\delta)$[5]. On a ainsi montré la

Proposition 2.– *Si δ est localement nilpotente, alors il existe un unique plongement $\Phi : H(t,\alpha,\delta) \longrightarrow H_{\alpha,\delta}((z))$ qui vérifie $\Phi(a) = a$ pour tout $a \in H$ et $\Phi(t^{-1}) = z$.*

Remarque : La Proposition 2 est en fait vraie sans l'hypothèse de locale nilpotence faite sur δ. En effet, puisque $az^{-1} = z^{-1}\alpha^{-1}(a) - \delta \circ \alpha^{-1}(a)$, on voit que la correspondance $a \longmapsto a$ et $t \longmapsto z^{-1}$, plonge l'anneau $H[t,\alpha,\delta]$ dans $H_{\alpha,\delta}((z))$ et comme $H[t,\alpha,\delta]$ est un anneau de Ore en toute généralité, ce plongement se prolonge au corps $H(t,\alpha,\delta)$ tout entier. Nous nous sommes restreint au cas où δ était localement nilpotente car, dans la suite de cet article, la dérivation δ sera nécessairement nilpotente et ce fait nous permettra d'exploiter la propriété de Ore pour l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$.

En vue de démontrer le Théorème Principal, on va maintenant supposer qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que t^m soit central dans $H(t,\alpha,\delta)$. C'est une hypothèse qui a des conséquences très fortes sur α et δ. En

[5]C'est bien la qualité d'anneau de Ore qui permet ce relèvement. Dans le cas général, on peut trouver des anneaux ayant plusieurs corps de fractions non isomorphes.

effet, dire que $t^m \in Z(H(t,\alpha,\delta))$ équivaut à dire que $t^m a = a t^m$ pour tout $a \in H$. Or, si l'on applique m fois, à $a \in H$, le produit à gauche par t on voit que

$$t^m a = f_m(a)t^m + f_{m-1}(a)t^{m-1}(a) + \cdots + f_0(a)$$

où les f_i sont des fonctions de H dans H obtenues par sommes de compositions des fonctions α et δ. Si l'expression de ces sommes de compositions est un peu pénible à écrire, on voit tout de même, par récurrence sur m, que $f_m(a) = \alpha^m(a)$ et $f_0(a) = \delta^m(a)$. Ainsi, si t^m est central alors nécessairement $o(\alpha)|m$ et $\delta^m \equiv 0$. En particulier, α est d'ordre fini et δ est nilpotente, ce qui nous place dans le cadre d'application de la Proposition 2.

Il est clair que le corps $C_0 = C^{<\alpha>}_{\text{cste}(\delta)}$ est contenu dans le centre de $H(t,\alpha,\delta)$, puisque par définitions ses éléments commutent avec t et tous les éléments de H. Il en est ainsi de même pour le corps de fractions $C_0(t^m)$. Pareillement, l'élément z^m et le corps C_0 sont contenus dans le corps de séries $H_{\alpha,\delta}((z))$, ce qui implique que le corps (commutatif) de séries $C_0((z^m))$ est inclus dans le centre de $H_{\alpha,\delta}((z))$. Puisque $C_0((z^m))$ contient $C_0(z^m) = C_0(t^m)$, on peut considérer l'extension des scalaires $H(t,\alpha,\delta)\otimes_{C_0(z^m)} C_0((z^m))$. Maintenant, le corps $C_0((z^m))$ est central dans $H_{\alpha,\delta}((z))$ et c'est donc une algèbre incluse dans le commutant de $\Phi(H(t,\alpha,\delta))$ dans $H_{\alpha,\delta}((z))$. Ainsi, par propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres, le plongement Φ définit un unique morphisme de $C_0(z^m)$-algèbres

$$\Theta : H(t,\alpha,\delta) \otimes_{C_0(z^m)} C_0((z^m)) \longrightarrow H_{\alpha,\delta}((z))$$

vérifiant $\Theta(x \otimes s) = \Phi(x)s$. Le point capital de ce paragraphe est la

Proposition 3.– *Le morphisme Θ est injectif. En particulier, l'algèbre $H(t,\alpha,\delta) \otimes_{C_0(z^m)} C_0((z^m))$ est intègre.*

Preuve : Comme nous l'avons remarqué plus haut, la nilpotence de δ implique que l'anneau $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ est égal à $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]_0$. On peut donc décrire les éléments de $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$ comme des polynômes en la variable z à coefficients à droite. Nous reprenons ici la trame de la preuve de [Beh, Proposition 2.1.2].

Fixons une C_0-base $(e_j)_{j\in J}$ de H et prenons $h_1, \cdots, h_s \in H(t,\alpha,\delta)$ non nuls et $u_1, \cdots, u_s \in C_0((z^m))$ non nuls tels que $x = \sum_{m=1}^{s} h_i \otimes u_i \in \ker(\Theta)$. Puisque $H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]_0$ est un anneau de Ore de corps des fractions $H(t,\alpha,\delta)$ (Lemme 1), tout élément de $H(t,\alpha,\delta)$ s'écrit sous la forme pq^{-1} avec $p, q \in H_{\alpha,\delta}[t^{-1}]$. En appliquant s fois la possible écriture $pq^{-1} = q'^{-1}p'$, on voit qu'il existe un élément non nul $u \in H_{\alpha,\delta}[z]$ tel que $uh_i \in H_{\alpha,\delta}[z]$ pour tout $i = 1, \cdots, s$. Puisque $\varphi(u) = \Theta(u \otimes 1) \neq 0$ et que $\Theta(\sum_{m=1}^{s} uh_i \otimes u_i) = \Theta(u \otimes 1)\Theta(x)$, on voit que pour montrer que $x = 0$ on peut supposer que $h_i = h_i(z) \in H_{\alpha,\delta}[z]$ pour tout $i = 1, \cdots, s$. Le même type de manipulation montre que l'on peut aussi supposer que $u_i \in C_0[[z^m]]$ pour tout $i = 1, \cdots, s$.

En utilisant la centralité de $C_0(z^m)$, on peut écrire chacun des h_i sous la forme d'une somme finie

$$h_i(z) = \sum_{n=0}^{n_i} z^{nm} \sum_{k=0}^{m-1} z^k a_{n,k} = \sum_{n=0}^{n_i} z^{nm} \sum_{k=0}^{m-1} z^k \sum_{j\in J_i} e_j \lambda_{n,k,j} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j\in J_i} z^k e_j P_{k,j,i}(z^m)$$

avec $J_i \subset J$ fini choisi uniformément pour n et k variant, $a_k \in H$, $\lambda_{n,k,j} \in C_0$ et $P_{k,j,i}(z^m) \in C_0[z^m]$. On a alors

$$h_i \otimes u_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j\in J_i} z^k e_j P_{k,j}(z^m) \otimes u_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j\in J_i} z^k e_j \otimes P_{k,j,i}(z^m)u_i$$

et comme $P_{k,j,i}(z^m)u_i \in C_0[[z^m]]$, en sommant pour $i = 1, \cdots, s$, on trouve finalement qu'il existe une partie $J_0 = \bigcup_i J_i \subset J$ finie et des séries

$$u_{k,j} = \sum_{i=1}^{s} P_{k,j,i}(z^m)u_i \in C_0[[z^m]]$$

(en ayant pris soin de poser $P_{k,j,i}(z^m) = 0$ si $j \notin J_i$) tels que

$$x = \sum_{i=1}^{s} h_i \otimes u_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j\in J_0} z^k e_j \otimes u_{k,j}$$

En posant formellement $u_{k,j} = \sum_{h\geq 0} z^{hm}\alpha_{j,k,h}$ et en utilisant la centralité, on trouve alors

$$\Theta(x) = \sum_{j\in J_0}\sum_{k=0}^{m-1} z^k e_j \sum_{h\geq 0} z^{hm}\alpha_{j,k,h} = \sum_{h\geq 0}\sum_{k=0}^{m-1} z^{hm+k}\sum_{j\in J_0} e_j\alpha_{j,k,h}$$

On en déduit que, pour tout $j \in J_0$, tout $k = 0, \cdots m-1$ et tout $h \geq 0$, $\alpha_{j,k,h} = 0$. Ainsi, toutes les séries $u_{k,j}$ sont nulles et donc $x = 0$.

□

3.– Application au Problème Inverse de Galois sur $H(t,\alpha,\delta)$. La stratégie galoisienne de l'extension des scalaires, présentée dans [DL], est la suivante : si K désigne un corps, k un sous-corps de $Z(K)$ et L/k une extension galoisienne de groupe G telle que $K\otimes_k L$ soit un corps, alors $K\otimes_k L$ est une extension galoisienne de K de groupe G. Dans la pratique on considère $K = H(t,\alpha,\delta)$ un corps de fractions tordu et un corps commutatif k et tel que $k(t^n)$ soit inclus dans $Z(K)$, pour un certain entier $n \geq 1$. On cherche alors un moyen de contrôler le fait que $H(t,\alpha,\delta)\otimes_{k(t^n)} L$ reste un corps quand $L/k(t^n)$ désigne une certaine extension galoisienne finie. La première approche, celle de [DL], a consisté à prendre $\alpha = \mathrm{Id}$, $\delta = 0$, $n = 1$ et à supposer que H était de dimension finie sur son centre. Dans ces conditions, si le corps L se plonge dans $k((t))$, on peut alors contrôler la norme réduite par extension des scalaires à L et assurer que $H(t,\mathrm{Id},0)\otimes_{k(t)} L$ reste bien un corps. L'approche de [Beh] étend astucieusement la stratégie de l'extension des scalaires au cas où $\alpha \neq \mathrm{Id}$ est d'ordre n et H est de dimension quelconque sur son centre : l'idée pour assurer que $H(t,\alpha,0)\otimes_{k(t^n)} L$ reste un corps, consiste à plonger cette algèbre dans le corps de séries tordu $H((t,\alpha))$ et à remarquer que, puisque $H(t,\alpha,0)\otimes_{k(t^n)} L$ est alors un anneau intègre et qu'en tant que $H(t,\alpha,0)$-espace vectoriel à gauche il est de dimension finie, alors $H(t,\alpha,0)\otimes_{k(t^n)} L$ est nécessairement un corps. C'est cette stratégie de Behajaina que nous allons appliquer, mais en considérant $H_{\alpha,\delta}((z))$ à la place de $H((t,\alpha))$. Tout comme dans [DL] et [Beh], il est ici essentiel que L se plonge dans $k((t^n))$. Ceci amène à considérer, dans le cas commutatif, une problématique inverse de Galois qui généralise le traditionnel Problème Inverse de Galois Régulier :

Problème Inverse de Galois Sérié sur k : *Pour tout groupe fini G, existe-t-il une extension galoisienne finie $L/k(t)$ de groupe G qui se plonge dans le corps des séries de Laurent $k((t))$?*

Ce problème se traduit de manière géométrique sous la forme : "*pour tout groupe fini G, existe-t-il un G-revêtement $X \longrightarrow \mathbb{P}_1$, défini sur k, tel que X possède un point k-rationnel non ramifié ?*". Nous avons rappelé dans l'introduction ce résultat fameux de Pop qui affirme que le Problème Inverse de Galois Régulier[6] admet une réponse positive dès que k contient un corps ample. Des travaux ultérieurs de Colliot-Thélène et de Moret-Bailly (voir [Col, Theorem 1] et [Mor, Théorème 1.1]) montrent qu'en fait, si k contient un corps ample, c'est alors le Problème Inverse de Galois Sérié qui admet une réponse positive sur k. Résumons en toute généralité les choses en la

Proposition 4.– (Méthode Behajaina) *Soient K un corps et k un corps commutatif tel que $k(x)$ soit inclus dans le centre de K. Si l'algèbre $K\otimes_{k(x)} k((x))$ se plonge dans un corps M, alors le Problème Inverse de la théorie de Galois admet une réponse positive sur le corps K dès que le Problème Inverse de Galois Sérié admet une réponse positive sur le corps k (ce qui est le cas, par exemple, lorsque k contient un corps ample).*

Preuve : Si G désigne un groupe fini, on se donne une extension galoisienne $L/k(x)$ de groupe G telle que $L \subset k((x))$. L'algèbre tensorisée $K\otimes_{k(x)} k((x))$ est un anneau intègre puisque, par hypothèse, elle se plonge dans le corps M. Il en est donc de même de $K\otimes_{k(x)} L$. La dimension de $K\otimes_{k(x)} L$ en tant que K-espace vectoriel à gauche vaut $[L : k(x)]$ et est donc finie. Le Lemme 2.1.3. de [Beh] assure alors que $K\otimes_{k(x)} L$ est un corps. Par propriété générale de l'extension des scalaires (voir [Beh, Lemme 2.1.1.] et [DL]), le corps $K\otimes_{k(x)} L$ est alors extension galoisienne de K de groupe G.

□

[6]La version géométrique du Problème de Galois Inverse Régulier est celle obtenue en retirant au problème sérié l'hypothèse d'existence d'un point rationnel non ramifié.

Preuve du Théorème Principal : Sous les hypothèses, grâce à la Proposition 3, on peut appliquer la Proposition 4 à $K = H(t,\alpha,\delta)$, $k(x) = C_0(t^m)$ et $M = H_{\alpha,\delta}((z))$ pour conclure.

□

Remarque : Comme on pourra le constater, le Théorème Principal est en fait un corollaire de l'énoncé plus général (mais moins fluide) où l'on remplace l'hypothèse "*k contient un corps ample*" par l'hypothèse moins forte "*le Problème Inverse de Galois Sérié admet une réponse positive sur k*".

Exemples d'application : Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les exemples intéressants d'application du Théorème Principal sont les corps de la forme $H(t,\mathrm{Id},\delta)$ avec δ non intérieure et $H(t,\alpha,\delta)$ avec α et δ non intérieurs. Nous donnons ici un exemple pour chacune de ces deux situations.

a) On prend un corps commutatif C de caractéristique $p \neq 0$ et l'on considère le corps commutatif $H = C((u))(x)$, l'automorphisme $\alpha = \mathrm{Id}$ et la dérivation naturelle δ en la variable x (qui est bien une α-dérivation). Il s'agit d'une dérivation nilpotente d'indice p. En effet, on a $\delta^p(x^n) = n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p}$ et, parmi les p entiers consécutifs $n,(n-1),\cdots,(n-p+1)$ un est congru à 0 modulo p. On a donc $\delta^p(x^n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$ et, par suite, δ est d'indice de nilpotence p sur l'anneau de polynômes $C((u))[x]$. Si $a \in C((u))[x]$, la formule de Leibniz donne alors

$$0 = \delta^p(1) = \delta^p(aa^{-1}) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta^k(a)\delta^{p-k}(a^{-1}) = \delta^p(a) + \delta^p(a^{-1}) = \delta^p(a^{-1})$$

(où C_p^k désigne le traditionnel coefficient binomial) et enfin, une nouvelle application de la formule de Leibniz à la fraction ab^{-1}, montre que $\delta^p(ab^{-1}) = 0$. Une récurrence sur l'entier m montre, par ailleurs, que dans le corps $H(t,\mathrm{Id},\delta)$ on a

$$t^m a = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \delta^{m-k}(a)t^k$$

pour tout $a \in H$, si bien que pour le choix $m = p$, on a $t^p a = at^p$. Ainsi, t^p est central dans $H(t,\mathrm{Id},\delta)$. Il ne reste plus qu'à constater que le corps $C((u))$ est inclus dans C_0 et qu'étant complet, il s'agit d'un corps ample (voir [Jar, example 5.6.2]). Le Théorème Principal s'applique alors et assure que le Problème Inverse de la théorie de Galois admet une réponse positive sur le corps $H(t,\mathrm{Id},\delta)$. Cet exemple sort bien du cadre d'application de [Beh], puisque H étant un corps commutatif et l'automorphisme α étant l'identité, la dérivation δ ne peut être intérieure (sinon elle serait nulle).

b) Pour donner un exemple d'application où, ni α, ni δ, ne sont intérieurs, commençons par établir le résultat générique suivant :

Lemme 5.– *Soient $n \geq 2$ un entier, H un corps de caractéristique ne divisant pas n, α un automorphisme de H et ξ_n une racine primitive n-ième de l'unité (dans la clôture algébrique de $Z(H)$). Si les hypothèses*

(H_0) $\xi_n \in Z(H)^{<\alpha>}$,

(H_1) $o(\alpha) = n$,

(H_2) il existe $\lambda \in H^*$ tel que $\alpha(\lambda) = \xi_n\lambda$ et $\lambda^n \in Z(H)$,

sont vérifiées alors,

A/ Si l'on considère la α-dérivation intérieure $\delta : a \longmapsto \lambda a - \alpha(a)\lambda$, alors on a :

(P_1) $\alpha \circ \delta = \xi_n.\delta \circ \alpha$,

(P_2) δ est non nulle et nilpotente d'indice n.

B/ Si l'on considère le corps $\widetilde{H} = H(t,\alpha,\delta)$, alors on a :

1/ Il existe un unique automorphisme $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{H})$ tel que $\widetilde{\alpha}(t) = \xi_n t$ et $\widetilde{\alpha}(a) = \alpha(a)$, pour tout $a \in H$ ($\widetilde{\alpha}$ prolonge α à $\widetilde{H}$).

2/ Si l'on pose $\widetilde{\lambda} = t$ alors, le corps $\widetilde{H}$, l'automorphisme $\widetilde{\alpha}$ et l'élément $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{H}^*$ satisfont aux hypothèses $(H_{0,1,2})$ et la $\widetilde{\alpha}$-dérivation intérieure $\widetilde{\delta} : x \longmapsto \widetilde{\lambda}x - \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{H}$ prolonge la α-dérivation δ.

3/ On a les implications suivantes :

a) $\alpha \in \mathrm{Int}(H) \Longrightarrow$ *il existe* $\widetilde{c} \in Z(\widetilde{H})$ *tel que* $\widetilde{\alpha}(\widetilde{c}) = \xi_n \widetilde{c} \Longrightarrow \widetilde{\alpha} \notin \mathrm{Int}(\widetilde{H})$.

b) Il existe $c \in Z(H)$ *tel que* $\alpha(c) = \xi_n c \Longrightarrow \widetilde{\alpha} \in \mathrm{Int}(\widetilde{H})$.

Preuve : *A/* (P_1) Pour tout $a \in H$, on a $\alpha \circ \delta(a) = \alpha(\lambda)\alpha(a) - \alpha^2(a)\alpha(\lambda) = \xi_n \lambda \alpha(a) + \alpha^2(a)\xi_n \lambda = \xi_n \delta \circ \alpha(a)$.

(P_2) Dans un premier temps, une récurrence sur l'entier $m \geq 0$ permet de montrer que, pour tout $x \in H$, on a

$$\delta^m(x) = \sum_{i=0}^{m} r_i(m)\lambda^{m-i}\alpha^i(x)\lambda^i$$

où $r_0(m), \cdots, r_m(m)$ sont des éléments de $Z(K)$ invariants par α, qui ne dépendent que de $m \geq 0$ et qui vérifient :

$$\begin{array}{rcl} r_0(m+1) & = & r_0(m) = 1 \\ r_{m+1}(m+1) & = & -\xi_n^m r_m(m) = (-1)^{m+1}\xi_n^{\frac{m(m+1)}{2}} \\ r_i(m+1) & = & r_i(m) - \xi_n^m r_{i-1}(m) \text{ pour tout } i = 1, \cdots, m \end{array}$$

On en déduit alors, par récurrence double sur $m = 0, \cdots, n$ et $i = 1, \cdots, m-1$, que l'on a

$$r_i(m) = (-1)^i \xi_n^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{(\xi_n^m - 1)(\xi_n^{m-1} - 1)\cdots(\xi_n^{m+1-i} - 1)}{(\xi_n - 1)(\xi_n^2 - 1)\cdots(\xi_n^i - 1)}$$

Il s'ensuit, pour le choix $m = n$, que $r_1(n) = \cdots = r_{n-1}(n) = 0$ et donc que

$$\delta^n(x) = r_0(n)\lambda^n x + r_n(n)\alpha^n(x)\lambda^n = \lambda^n x(1 + (-1)^n \xi_n^{\frac{n(n-1)}{2}}) = 0$$

Ainsi, δ est bien nilpotente d'indice n. La α-dérivation δ ne peut être nulle compte-tenu du fait que $\delta(\lambda) = \lambda^2 - \alpha(\lambda)\lambda = (1 - \xi_n)\lambda^2 \neq 0$.

B.1/ Pour tout $a \in H$, on a

$$(\xi_n t)\alpha(a) = \alpha^2(a)\xi_n t + \xi_n \delta \circ \alpha(a) = \alpha(\alpha(a))(\xi_n t) + \alpha(\delta(a))$$

et ainsi, par propriété universelle de l'anneau $H[t, \alpha, \delta]$ (voir [GW, Proposition 2.4.]), il existe un unique endomorphisme $\widetilde{\alpha} : H[t, \alpha, \delta] \longrightarrow H[t, \alpha, \delta]$ vérifiant $\widetilde{\alpha}(a) = \alpha(a)$, pour $a \in H$, et $\widetilde{\alpha}(t) = \xi_n t$. Le même argument montre que la correspondance $a \longmapsto \alpha^{-1}(a)$ et $t \longmapsto \xi_n^{-1} t$ définit un endomorphisme de $H[t, \alpha, \delta]$ qui, étant visiblement réciproque à $\widetilde{\alpha}$, assure que $\widetilde{\alpha}$ est bien un automorphisme. Maintenant, $H[t, \alpha, \delta]$ est un anneau de Ore, et $\widetilde{\alpha}$ se prolonge donc de manière unique en un automorphisme de $H(t, \alpha, \delta)$. Il est alors clair que la restriction de $\widetilde{\alpha}$ à H vaut α.

B.2/ On a $t\xi_n = \alpha(\xi_n)t + \delta(\xi_n) = \xi_n t + \lambda\xi_n - \xi_n\lambda = \xi_n t$ et donc $\xi_n \in Z(\widetilde{H})$. Par ailleurs, $\widetilde{\alpha}(\xi_n) = \alpha(\xi_n) = \xi_n$ et donc (H_0) est bien vérifiée.

On a $o(\alpha) = n$ et $\widetilde{\alpha}^n(t) = \xi_n^n t = t$ et donc $o(\widetilde{\alpha}) \leq n$, mais comme $\widetilde{\alpha}^k(t) = \xi_n^k t \neq t$ pour $1 \leq k < n$, on a $o(\widetilde{\alpha}) = n$ et l'hypothèse (H_1) est donc aussi vérifiée.

Pour tout $a \in H$, on a $\widetilde{\delta}(a) = ta - \widetilde{\alpha}(a)t = \alpha(a)t + \delta(a) - \alpha(a)t = \delta(a)$, ce qui montre bien que $\widetilde{\delta}$ prolonge δ. Par ailleurs, on a $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\lambda}) = \widetilde{\alpha}(t) = \xi_n t = \xi_n \widetilde{\lambda}$. Pour finir de vérifier (H_2), on montre d'abord par récurrence sur $m \geq 2$ en utilisant la propriété (P_1) que, pour tout $a \in H$, on a

$$t^m a = \delta^m(a) + \sum_{i=1}^{m-1} s_i(m)\delta^{m-i} \circ \alpha^i(a)t^i + \alpha^m(a)t^m$$

où $s_1(m), \cdots, s_{m-1}(m)$ sont des éléments de $Z(K)$ qui ne dépendent que de m et qui vérifient :

$$\begin{array}{rcl} s_1(m) & = & s_1(m-1) + \xi_n^{m-1} = 1 + \xi_n + \cdots + \xi_n^{m-1} = \dfrac{\xi_n^m - 1}{\xi_n - 1} \\ s_i(m) & = & s_i(m-1) + \xi_n^{m-i} s_{i-1}(m-1) \text{ pour tout } i = 2, \cdots, m-1 \end{array}$$

On en déduit alors, par récurrence double sur $m = 2, \cdots, n$ et $i = 1, \cdots, m-1$, que l'on a

$$s_i(m) = \frac{(\xi_n^m - 1)(\xi_n^{m-1} - 1)\cdots(\xi_n^{m-i+1} - 1)}{(\xi_n - 1)(\xi_n^2 - 1)\cdots(\xi_n^i - 1)}$$

Il s'ensuit, pour le choix $m = n$, que $s_1(n) = \cdots = s_{n-1}(n) = 0$ et donc que

$$t^n a = \delta^n(a) + \alpha^n(a)t^n = at^n$$

ce qui assure finalement que $\widetilde{\lambda}^n = t^n \in Z(\widetilde{H})$.

B.3/ a) Soit $\omega_0 \in H$ tel que, pour tout $a \in H$, $\alpha(a) = \omega_0 a \omega_0^{-1}$. On a

$$\begin{array}{rcl} t\omega_0^{-1}(t-\lambda) & = & \alpha(\omega_0^{-1})t^2 + (\delta(\omega_0^{-1}) - \alpha(\omega_0^{-1}\lambda))t - \delta(\omega_0^{-1}\lambda) \\ & = & \omega_0^{-1}t^2 + (\lambda\omega_0^{-1} - \omega_0^{-1}\lambda - \xi_n\omega_0^{-1}\lambda)t - (\lambda\omega_0^{-1}\lambda - \xi_n\omega_0^{-1}\lambda^2) \\ & = & \omega_0^{-1}t^2 + \omega_0^{-1}(\omega_0\lambda\omega_0^{-1} - \lambda - \xi_n\lambda)t - \omega_0^{-1}(\omega\lambda\omega_0^{-1}\lambda - \xi_n\lambda^2) = \omega_0^{-1}t^2 - \omega_0^{-1}\lambda t \\ & = & \omega_0^{-1}(t-\lambda)t \end{array}$$

(i.e. t est invariant par la conjugaison par $\omega_0^{-1}(t-\lambda)$) et, pour tout $a \in H$,

$$\omega_0^{-1}(t-\lambda)a = \omega_0^{-1}(\alpha(a)t + \delta(a) - \lambda a) = \omega_0^{-1}(\alpha(a)t + \lambda a - \alpha(a)\lambda - \lambda a) = \omega_0^{-1}\alpha(a)(t-\lambda) = a\omega_0^{-1}(t-\lambda)$$

(i.e. a est invariant par la conjugaison par $\omega_0^{-1}(t-\lambda)$) si bien que $\widetilde{c} = \omega_0^{-1}(t-\lambda) \in Z(\widetilde{H})$. On a alors

$$\widetilde{\alpha}(\widetilde{c}) = \alpha(\omega_0^{-1})(\widetilde{\alpha}(t) - \alpha(\lambda)) = \omega_0^{-1}(\xi_n t - \xi_n\lambda) = \xi_n\widetilde{c}$$

et donc $\widetilde{\alpha}$ ne fixe pas $Z(\widetilde{H})$, ce qui implique finalement que $\widetilde{\alpha} \notin \mathrm{Int}(\widetilde{H})$.

b) Pour tout $a \in H$, on a

$$(t-\lambda)a = ta - \lambda a = \alpha(a)t + \delta(a) - \lambda a = \alpha(a)t - \alpha(a)\lambda = \alpha(a)(t-\lambda)$$

(i.e. la conjugaison par $(t-\lambda)$ induit α sur H) et l'on a aussi

$$(t-(1-\xi_n)\lambda)(t-\lambda) = t^2 - ((1-\xi_n)\lambda + \alpha(\lambda))t - \delta(\lambda) + (1-\xi_n)\lambda^2 = (t-\lambda)t$$

(i.e. la conjugaison par $(t-\lambda)$ envoie t sur $(t-(1-\xi_n)\lambda)$). Si l'on pose $\omega = c^{-1}(t-\lambda)$ alors on a

$$\forall a \in H,\ \ \omega a\omega^{-1} = c^{-1}(t-\lambda)a(t-\lambda)^{-1}c = c^{-1}\alpha(a)c = \alpha(a) = \widetilde{\alpha}(a)$$

$$\omega t\omega^{-1} = c^{-1}(t-(1-\xi_n)\lambda)c = c^{-1}tc - (1-\xi_n)\lambda = \xi_n t + c^{-1}\delta(c) - (1-\xi_n)\lambda = \xi_n t = \widetilde{\alpha}(t)$$

ce qui montre que $\widetilde{\alpha}$ est égal à l'automorphisme intérieur associé à ω.

□

Une fois ce lemme établi, on construit une suite croissante de corps de la manière suivante : on prend un entier $n \geq 2$ et un corps commutatif C de caractéristique ne divisant pas n et contenant une racine primitive n-ième de l'unité ξ_n. On considère le corps commutatif $H_0 = C((u))(y)$ et le $C((u))$-automorphisme α_0 de H_0 défini par la correspondance $y \longmapsto \xi_n y$. Si l'on pose $\lambda_0 = y$ alors toutes ces données vérifient les hypothèses $(H_{0,1,2})$ du Lemme 5. On pose alors $\delta_0(x) = \lambda_0 x - \alpha_0(x)\lambda_0$ et l'on considère le corps $H_1 = H_0(t_0, \alpha_0, \delta_0)$. Avec les notations du Lemme 5, on pose $\alpha_1 = \widetilde{\alpha_0}$, $\lambda_1 = t_0$ et $\delta_1 = \widetilde{\delta_0}$ et l'on considère le corps $H_2 = H_1(t_1, \alpha_1, \delta_1)$. On construit ainsi, par récurrence sur $m \geq 0$, la suite croissante

$$H_1 = H_0(t_0, \alpha_0, \delta_0) \subset H_2 = H_1(t_1, \alpha_1, \delta_1) \subset \cdots \subset H_{m+1} = H_m(t_m, \alpha_m, \delta_m) \subset \cdots$$

où, toujours avec les notations du Lemme 5, on pose $\alpha_{m+1} = \widetilde{\alpha_m}$, $\lambda_{m+1} = t_m$ et $\delta_{m+1} = \widetilde{\delta_m}$. On peut alors considérer la réunion, $\Omega = \bigcup_m H_m(t_m, \alpha_m, \delta_m)$ qui, étant une réunion croissante de corps, reste un corps. Puisque, pour tout $m \geq 0$, α_{m+1} (resp. δ_{m+1}) relève α_m (resp. δ_m), la suite $(\alpha_m)_m$ (resp. $(\delta_m)_m$) définit un automorphisme α (resp. une α-dérivation δ) vérifiant $\alpha_{|H_m} = \alpha_m$ (resp. $\delta_{|H_m} = \delta_m$). Comme pour tout $m \geq 0$, α_m (resp. δ_m) est d'ordre n (resp. est nilpotente d'indice n) et que $\alpha_m \circ \delta_m = \xi_n \delta_m \circ \alpha_m$, on voit que

• $o(\alpha) = n$,

• δ est nilpotente d'indice n,

• $\alpha \circ \delta = \xi_n.\delta \circ \alpha$.

En reprenant alors la preuve du B.2/ du Lemme 5 (qui n'utilise en fait que ces trois propriétés), on en déduit que l'élément t^n est central dans le corps $\Omega(t, \alpha, \delta)$. Maintenant, comme $\alpha_{0|C((u))} = \mathrm{Id}$ et $\delta_{0|C((u))} = 0$, on voit que, d'une part, $C((u))^{<\alpha>}_{\mathrm{cste}(\delta)} = C((u))$ et, d'autre part, les éléments de $C((u))$ commutent avec toutes les indéterminées t_m ce qui assure, par récurrence, que $C((u))$ est central dans chaque H_m et donc dans Ω. Ainsi, on a $C((u)) \subset Z(\Omega)^{<\alpha>}_{\mathrm{cste}(\delta)}$. Le corps $C((u))$ est ample, car complet, et l'on peut finalement appliquer le Théorème Principal : le Problème Inverse de la théorie de Galois possède une réponse positive sur le corps $\Omega(t, \alpha, \delta)$.

L'intérêt de ce nouvel exemple réside dans le fait que, ni α, ni δ, ne sont intérieurs. En effet, les propriétés du B.3/ du Lemme 5 montrent, par récurrence, que $\alpha_{2m} \notin \mathrm{Int}(H_{2m})$ et $\alpha_{2m+1} \in \mathrm{Int}(H_{2m+1})$. Ainsi, si α était l'automorphisme intérieur associé à l'élément $\omega \in \Omega^*$, alors on aurait $\omega \in H_{2m}$ pour un certain entier $m \geq 0$ et α_{2m} serait alors intérieur. De même, bien que toutes les δ_m soient intérieures, si δ était intérieure il existerait $m \geq 0$ et $\lambda \in H_m$ tels que $\delta(x) = \lambda x - \alpha(x)\lambda$, pour tout $x \in \Omega$, et dans H_{m+1} on aurait alors :

$$(1 - \xi_n)t_m^2 = t_m.t_m - \alpha_m(t_m).t_m = \delta_{m+1}(t_m) = \delta(t_m) = \lambda t_m - \alpha(t_m)\lambda = \lambda t_m - \xi_n t_m \lambda = (\lambda - \xi_n \alpha(\lambda))t_m - \xi_n \delta(\lambda)$$

ce qui serait aussi absurde, puisque $(\lambda - \xi_n \alpha(\lambda)), \xi_n \delta(\lambda) \in H_m$ et $(1 - \xi_n) \neq 0$ et qu'il y aurait donc un problème de degré en t_m dans l'égalité.

Bibliographie

[Beh] Angelot Behajaina, *Théorie inverse de Galois sur les corps des fractions rationnelles tordus*, J. Pure Appl. Algebra, 225(4) (2021), à paraître.

[BDH] Angelot Behajaina, Bruno Deschamps et François Legrand, *Problèmes de plongement finis sur les corps non commutatifs*, Israel J. Math. (2021), à paraître.

[Coh] Paul Moritz Cohn, *Skew fields. Theory of general division rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57. Cambridge University Press, Cambridge, (1995). xvi + 500 pp

[Col] Jean-Louis Colliot-Thélène, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math.(2), 151(1), 359-373 (2000)

[Des] Bruno Deschamps, *Des extensions plus petites que leurs groupes de Galois*, Comm. Algebra, 46(10), 4555-4560 (2018)

[DL] Bruno Deschamps et François Legrand, *Le problème inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale*, J. Pure Appl. Algebra, 224(5) (2020), à paraître.

[GW] Kenneth Goodearl and Robert Breckenridge Warfield, *An introduction to noncommutative Noetherian rings. Second edition*, London Mathematical Society Student Texts, 61. Cambridge University Press, Cambridge, (2004). xxiv+344 pp

[Jac] Nathan Jacobson, *Structure of rings*, American mathematical society colloquium publications (1956)

[Jar] Moshe Jarden, *Algebraic patching*, Springer Monographs in Mathematics (2011).

[Mor] Laurent Moret-Bailly, *Construction de revêtements de courbes pointées*, J. Algebra, 240(2), 505-534 (2001)

[Ore] Oystein Ore, *Theory of non-commutative polynomials*, Ann. of Math.(2), 34(3), 480-508 (1933).

[Pop] Florian Pop, *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math., 144, 1-35 (1996).

[Sch] Issaï Schur, *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke*, Ber. Math. Ges Sitzungsber 3. 2-8 (1904)

Bruno Deschamps
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139
Université de Caen - Normandie
BP 5186, 14032 Caen Cedex - France

Département de Mathématiques
Le Mans Université
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr