Automorphisant et structure des corps de fractions tordus par un endomorphisme

Bruno DESCHAMPS

LMNO - Le Mans Université

Résumé.— L'objet principal de cet article est de montrer qu'un corps de fractions tordu par un endomorphisme $K(t,\alpha)$ est toujours égal à un corps de fractions tordu par un automorphisme. Pour ce faire, nous construisons un objet universel, l'*automorphisant*, qui relève, pour un anneau A donné et un endomorphisme injectif α de A, le couple (A,α) en un couple $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ où $\widehat{\alpha}$ est un automorphisme.

Abstract.— The main purpose of this article is to show that a field of fractions skewed by an endomorphism $K(t,\alpha)$ is always equal to a field of fractions skewed by an automorphism. To do this, we construct an universal object, the *automorphizer*, which lifts, for a given ring A and an injective endomorphism α of A, the pair (A,α) into a pair $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ where $\widehat{\alpha}$ is an automorphism.

1.— Introduction.

Étant donné un anneau A, un endomorphisme $\alpha\in\mathrm{End}(A)$ et une α-dérivation $\delta\in\mathrm{Der}_\alpha(A)$ (i.e. une application $\delta : A\longrightarrow A$ qui est additive et qui vérifie $\delta(ab)=\delta(a)b+\alpha(a)\delta(b)$ pour tous $a,b\in A$) on note $A[t,\alpha,\delta]$ l'anneau des polynômes tordu par α et δ et à coefficients dans A, c'est-à-dire, le A-module libre à gauche de base $\{1,t,t^2,\cdots\}$ muni du produit défini, par linéarité, par les relations $t^n.t^m=t^{n+m}$ et, pour tout $a\in A$, $ta=\alpha(a)t+\delta(a)$. Si $\delta=0$, on note plus volontiers $A[t,\alpha]$ cet anneau. Lorsque $A=K$ est un corps, l'anneau $K[t,\alpha,\delta]$ est un anneau de Ore à gauche et possède donc un unique corps de fractions que l'on note $K(t,\alpha,\delta)$. Grâce à la propriété de Ore, on peut alors écrire tout élément de $K(t,\alpha,\delta)$ sous la forme $p^{-1}q$ avec $p,q\in K[t,\alpha,\delta]$, mais pas forcément sous la forme qp^{-1}. Pour que ce soit le cas, il faut que $K[t,\alpha,\delta]$ soit de Ore à droite et l'on montre que cela se produit exactement lorsque α est un automorphisme. Cela laisse présager que l'arithmétique de $K(t,\alpha,\delta)$ est plus compliqué lorsque α n'est pas un automorphisme et c'est effectivement le cas, comme le montre l'exemple suivant : dans [Des,Th.2], il est montré le résultat de permanence des degrés suivant

Proposition 1.— *Si H/K désigne une extension de corps de degré à droite $[H:K]_d=n$ fini et si $\alpha\in\mathrm{Aut}(H)$ est un automorphisme tel que $\alpha_{|K}\in\mathrm{Aut}(K)$ alors l'extension $H(t,\alpha)/K(t,\alpha)$ est aussi de degré à droite égal à n.*

mais cette propriété n'est plus vraie lorsque α n'est plus supposé bijectif. Par exemple, si l'on considère le corps de fraction $k(x)$ à coefficients dans un corps commutatif k, alors l'extension $k(x)/k(x^2)$ est de degré 2. Mais, si l'on considère le k-endomorphisme α de $k(x)$ défini par $\alpha : x\longmapsto x^2$ alors l'extension $k(x)(t,\alpha)/k(x^2)(t,\alpha)$ est de degré 1 car, dans $k(x)(t,\alpha)$, on a $txt^{-1}=x^2$ et l'automorphisme intérieur $I(t)$ a donc pour image $k(x^2)(t,\alpha)$.

Par ailleurs, et comme le montre l'exemple précédent, la description $K(t,\alpha,\delta)$ n'est pas biunivoque quand K,t,α et δ varient. Il existe des classes remarquables de corps de fractions tordus, par exemple :

Proposition 2.— [Coh,Th.2.1.3] Si C désigne le centre de K, alors

1/ Si $\alpha_{|C}\neq\mathrm{Id}_{|C}$ alors $K(t,\alpha,\delta)=K(t',\alpha)$ où $t'=ct-tc$ pour n'importe quel élément $c\in C$ tel que $\alpha(c)\neq c$.

2/ Si $\alpha_{|C}=\mathrm{Id}_{|C}$ et si $\delta_{|C}\neq 0$, alors α est un automorphisme intérieur et, pour n'importe quel élément $c\in C$ tel que $\delta(c)\neq 0$, on a $\alpha=I(\delta(c))$ et $K(t,\alpha,\delta)=K(t',\mathrm{Id},\delta')$ où $t'=\delta(c)^{-1}t$ et $\delta'=\delta(c)^{-1}.\delta$.

[0]Classification AMS 2020 : 12E15, 12E30, 16B99.

Un des deux objectifs de cet article est d'ajouter une nouvelle classe à cette liste, en montrant qu'en toute généralité on a $K(t,\alpha) = \widehat{K}(t,\widehat{\alpha})$ où $\widehat{K}$ est une extension de K incluse dans $K(t,\alpha)$ et $\widehat{\alpha}$ est un automorphisme de $\widehat{K}$ qui relève l'endomorphisme α (théorème 21). Dans la situation plus générale d'un corps de fractions tordu $K(t,\alpha,\delta)$ avec $\delta \neq 0$, nous montrons au théorème 24, que si α et δ commutent alors on peut plonger $K(t,\alpha,\delta)$ dans un corps de fractions tordu $\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$ où $\widehat{K}$ est une extension de K et où $\widehat{\alpha}$ est un automorphisme et $\widehat{\delta}$ une $\widehat{\alpha}$-dérivation qui relèvent respectivement α et δ.

Le théorème 21 nous dit donc que pour un corps $K(t,\alpha)$, en augmentant adéquatement le corps des constantes K, on peut se ramener à un corps de fractions tordu par un automorphisme. L'étude de l'arithmétique de $K(t,\alpha)$ se ramène ainsi au cas où α est un automorphisme mais au prix de bien comprendre le corps des constantes augmenté $\widehat{K}$. Pour ce faire, et c'est l'autre objectif de l'article, nous expliquons au § 2 comment relever, en toute généralité, un endomorphisme injectif d'anneau en un automorphisme. Nous montrons (théorème 12) que pour la donnée d'un anneau A et d'un endomorphisme injectif α de A on peut associer un anneau $\widehat{A}$ contenant A et un automorphisme $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{A}$ tel que $\widehat{\alpha}_{|A} = \alpha$ et tels que $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ soit un objet universel pour cette propriété. Nous appelons le couple $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ l'*automorphisant* de (A,α). Plusieurs propriétés relatives à l'automorphisant sont étudiées, notamment la description de son centre.

La lecture de cet article ne nécessite pas de connaissance particulière, à part peut-être quelques notions sur les anneaux de polynômes tordus et leur structure sous-jacente d'anneau de Ore. Pour le lecteur non familiarisé, non renvoyons, par exemple, à [Coh] pour une présentation de ces objets.

2.— Relèvement d'endomorphisme.

Un *anneau fléché* est la donnée d'un couple (A,α) où A désigne un anneau et $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ est un endomorphisme de A. Un *morphisme d'anneaux fléchés* entre deux anneaux fléchés (A,α) et (B,β) est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow B$ tel que $\varphi \circ \alpha = \beta \circ \varphi$, autrement dit, un morphisme tel que le diagramme

$$\alpha \circlearrowright A \xrightarrow{\varphi} B \circlearrowleft \beta$$

commute. On note alors $\varphi : (A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$. L'objet de ce § est de regarder comment on peut plonger un anneau fléché (A,α) donné dans un anneau fléché universel $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ où $\widehat{\alpha}$ est un automorphisme i.e. plonger A dans un anneau où α se relève en un automorphisme et qui factorise tout plongement ayant cette propriété. Bien sûr, une condition nécessaire évidente pour que cela puisse être fait est que α soit injectif. Nous commençons par considérer le cas général d'un endomorphisme non nécessairement injectif et introduisons un autre objet universel dans lequel α dévient injectif. Dans tout ce §, on considère un anneau fléché (A,α).

2.1.— Nilespace et monomorphisant.

2.1.1. *Définition, propriétés et notations.* On considère

$$\mathcal{N}(\alpha) = \bigcup_{n\geqslant 1} \ker(\alpha^n) = \{a \in A / \ \exists n \geqslant 1,\ \alpha^n(a) = 0\}$$

le *nilespace* de (A,α). C'est visiblement un idéal bilatère de A laissé stable par α et, en tant qu'ensemble, il a la propriété suivante :

Lemme 3.— *L'ensemble $\mathcal{N}_\alpha(A)$ est la plus petite partie X de A contenant 0 telle que*

$$\forall a \in A,\ \alpha(a) \in X \Longmapsto a \in X$$

Preuve : La partie $X = \mathcal{N}_\alpha(A)$ a visiblement la propriété du lemme. Si maintenant X désigne une partie ayant cette propriété alors, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $a \in A$, on a

$$\alpha^{n+1}(a)\,(= \alpha(\alpha^n(a))) \in X \Longrightarrow \alpha^n(a) \in X \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \alpha(a) \in X \Longrightarrow a \in X$$

et ainsi, puisque $0 \in X$, on a $\ker(\alpha^{n+1}) \subset X$.

$\square$

Si I désigne un idéal bilatère, stable par α, alors l'endomorphisme α induit un endomorphisme $\overline{\alpha}_I$ de A/I, par passage au quotient :

$$\begin{array}{rccc} \overline{\alpha}_I : & A/I & \longrightarrow & A/I \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\alpha(a)} \end{array}$$

($\overline{a}$ désigne l'image de $a \in A$ dans A/I) et l'on peut considérer l'anneau fléché quotient $(A/I, \overline{\alpha}_I)$. On voit alors immédiatement, par définition de $\overline{\alpha}_I$, que la projection canonique $A \longmapsto A/I$ est, en fait, un épimorphisme d'anneaux fléchés $(A, \alpha) \longrightarrow (A/I, \overline{\alpha}_I)$.

On note $\mathcal{I}_\alpha(A)$ l'ensemble des idéaux bilatères de A, stables par α. Le lemme 3 a pour conséquence le

Corollaire 4.— *Pour tout $I \in \mathcal{I}_\alpha(A)$, les propriétés suivantes*

i) $\overline{\alpha}_I$ est injectif,

ii) pour tout $a \in A$, $\alpha(a) \in I \Longrightarrow a \in I$,

sont équivalentes. En conséquence de quoi, $\mathcal{N}_\alpha(A)$ est le plus petit élément de l'ensemble des idéaux $I \in \mathcal{I}_\alpha(A)$ vérifiant ces propriétés.

Preuve : Dire que $\overline{\alpha}_I : A/I \longrightarrow A/I$ est injectif équivaut à ce que, pour tout $a \in A$, $\overline{\alpha}_I(\overline{a}) \left(= \overline{\alpha(a)}\right) = \overline{0} \Longrightarrow \overline{a} = \overline{0}$, c'est-à-dire, pour tout $a \in A$, $\alpha(a) \in I \Longrightarrow a \in I$. Le lemme 3 prouve alors la minimalité de $\mathcal{N}_\alpha(A)$.

$\square$

Ainsi, $\breve{A} = A/\mathcal{N}_\alpha(A)$ est le plus grand quotient de A pour lequel l'endomorphisme $\breve{\alpha} = \overline{\alpha}_{\mathcal{N}_\alpha(A)}$, naturellement induit sur $\breve{A}$ par α, est injectif. L'anneau fléché $(\breve{A}, \breve{\alpha})$ s'appelle le *monomorphisant* de (A, α).

2.2.2. *Fonctorialité.* On se donne un morphisme d'anneaux fléchés $\theta : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$. Puisque $\theta \circ \alpha = \beta \circ \theta$, on voit que $\theta\left(\mathcal{N}_\alpha(A)\right) \subset \mathcal{N}_\beta(B)$, et les théorèmes de factorisation montrent que l'on dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\breve{\pi}_A"'] & B \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\breve{\pi}_B"] \\
\breve{A} = A/\mathcal{N}_\alpha(A) \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\breve{\theta}"'] & B/\theta\left(\mathcal{N}_\alpha(A)\right) \arrow[d] \\
 & B/\mathcal{N}_\beta(B) = \breve{B}
\end{tikzcd}$$

qui permet de définir un morphisme naturel $\breve{\theta} : \breve{A} \longrightarrow \breve{B}$. Ce morphisme est en fait un morphisme d'anneaux fléchés $\breve{\theta} : (\breve{A}, \breve{\alpha}) \longrightarrow (\breve{B}, \breve{\beta})$ puisque, pour tout $a \in A$,

$$(\breve{\theta} \circ \breve{\alpha})(\breve{\pi}_A(a)) = \breve{\theta} \circ \breve{\pi}_A \circ \alpha(a) = \breve{\pi}_B \circ \theta \circ \alpha(a) = \breve{\pi}_B \circ \beta \circ \theta(a) = \breve{\beta} \circ \breve{\pi}_B \circ \theta(a) = (\breve{\beta} \circ \breve{\theta})(\breve{\pi}_A(a))$$

Comme $\breve{\pi}_B \circ \theta = \breve{\theta} \circ \breve{\pi}_A$, on voit que si θ est surjectif alors $\breve{\theta}$ l'est aussi. De même, si l'on suppose θ injectif, alors $\theta(A) \cap \mathcal{N}_\beta(B) = \theta\left(\mathcal{N}_\alpha(A)\right)$, car si $\theta(a) \in \mathcal{N}_\beta(B)$ alors $\theta \circ \alpha^n(a) = \beta^n \circ \theta(a) = 0$ pour un certain entier $n \geqslant 0$ et donc $\alpha^n(a) = 0$, i.e. $a \in \mathcal{N}_\alpha(A)$. Pour tout $a \in A$, on a alors

$$\breve{\pi}_A(a) \in \ker(\breve{\theta}) \Longleftrightarrow \breve{\pi}_B \circ \theta(a) = \breve{\theta} \circ \breve{\pi}_A(a) = 0 \Longleftrightarrow \theta(a) \in \mathcal{N}_\beta(B) \Longleftrightarrow a \in \mathcal{N}_\alpha(A) \Longleftrightarrow \breve{\pi}_A(a) = 0$$

ce qui prouve que $\breve{\theta}$ est aussi injectif. On a donc

$$\theta \text{ injectif (resp. surjectif)} \Longrightarrow \breve{\theta} \text{ injectif (resp. surjectif)}$$

mais on prendra garde à la réciproque : par exemple, si $\mathcal{N}_\beta(B) = B$, alors $\breve{\theta}$ est surjectif sans que θ le soit nécessairement (e.g. $\theta = 0$ et $\beta = 0$).

2.2.3. *Propriété universelle.* Le monomorphisant est un objet universel dans le sens suivant :

Proposition 5.— (Propriété universelle du monomorphisant) *Soit $(\breve{A}, \breve{\alpha})$ le monomorphisant d'un anneau fléché (A, α). Pour tout anneau fléché (B, β), où $\beta \in \mathrm{End}(B)$ est un <u>mono</u>morphisme, et tout morphisme d'anneaux fléchés $\varphi : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$, il existe un unique morphisme d'anneaux fléchés $\breve{\varphi}_B : (\breve{A}, \breve{\alpha}) \longrightarrow (B, \beta)$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[loop right, "\beta"] \\
\breve{A} \arrow[loop left, "\breve{\alpha}"] \arrow[ur, "\breve{\varphi}_B"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Preuve : Existence. Si $x \in \ker(\varphi)$, alors $\varphi(\alpha(x)) = \beta(\varphi(x)) = 0$ et ainsi $\alpha(x) \in \ker(\varphi)$. On a donc $\ker(\varphi) \in \mathcal{I}_\alpha(A)$. Par ailleurs, la relation $\varphi(\alpha(x)) = \beta(\varphi(x))$ assure aussi que la restriction de β à $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un endomorphisme. L'isomorphisme canonique $\theta : A/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$ fait visiblement commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[loop right, "\beta"] \\
A/\ker(\varphi) \arrow[loop left, "\overline{\alpha}_{\ker(\varphi)}"] \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

si bien que $\overline{\alpha}_{\ker(\varphi)} = \theta^{-1} \circ \beta \circ \theta$ est injectif (puisque β l'est) et donc $\mathcal{N}_\alpha(A) \subset \ker(\varphi)$ (corollaire 4). L'épimorphisme canonique $\pi : \breve{A} = A/\mathcal{N}_\alpha(A) \longrightarrow A/\ker(\varphi)$ fournit alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[loop right, "\beta"] \\
\breve{A} \arrow[loop left, "\breve{\alpha}"] \arrow[ur, dotted, "\breve{\varphi}_B"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
A/\ker(\varphi) \arrow[loop left, "\overline{\alpha}_{\ker(\varphi)}"] \arrow[uur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

à partir duquel $\breve{\varphi}_B = \theta \circ \pi$ peut être construit.

Unicité. Elle découle immédiatement du fait que $\breve{A}$ est un quotient de A.

□

2.2.— Anneaux automorphisants.

2.2.1. *Définition, propriétés et notations.* On considère un anneau fléché (A, α) et, pour $n \geqslant 0$, on pose

$A_n = A$. Pour tout $k \geqslant 0$, on considère le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{n,n+k}: & A_n & \longrightarrow & A_{n+k} \\ & a & \longmapsto & \alpha^k(a) \end{array}$$

Le système $(A_n, \varphi_{n,m})_n$ est visiblement inductif et l'on note sa limite directe

$$\widehat{A} = \varinjlim_n A_n = \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie, pour $a_n \in A_n$ et $a_m \in A_n$ par

$$a_n \sim a_m \Longleftrightarrow \exists p \geqslant n, m, \ \varphi_{n,p}(a_n) = \varphi_{m,p}(a_m)$$

En tant que limite inductive d'anneaux, $\widehat{A}$ a naturellement une structure d'anneau et les flèches naturelles

$$\pi_A^n : A_n \longrightarrow \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n \longrightarrow \widehat{A}$$

sont des morphismes d'anneaux. Afin d'éviter d'alourdir les notations, pour un élément $a_n \in A_n$, on pourra parfois noter $\widehat{a_n}$ à la place de $\pi_A^n(a_n)$. De même, on notera plus volontiers dans les diagrammes α^k à la place de $\varphi_{n,n+k}$. Pour autant, puisque α peut être vu comme endomorphisme de chaque A_n, il faut alors faire attention au fait que, dans la notation $A_n \xrightarrow{\alpha^k} A_{n+k}$, α^k ne désigne pas l'endomorphisme de A_n. On remarque toutefois que, vu comme endomorphisme de A_{n+k}, on a $\alpha^k(A_{n+k}) = \varphi_{n,n+k}(A_n)$.

Regarder α comme endomorphisme de chaque anneau A_n est compatible avec la relation $\sim$: si $a_n \sim a_m$ alors $\varphi_{n,p+1}(a_n) = \varphi_{m,p+1}(a_m)$, pour un certain $p \geqslant n, m$, et donc dans A, on a $\alpha^{p+1-n}(a_n) = \alpha^{p+1-m}(a_m)$. Ainsi, on a $\alpha^{p-n}(\alpha(a_n)) = \alpha^{p-m}(\alpha(a_m))$, c'est-à-dire $\varphi_{n,p}(\alpha(a_n)) = \varphi_{m,p}(\alpha(a_m))$ et, finalement, on a bien $\alpha(a_n) \sim \alpha(a_m)$. Cette compatibilité avec $\sim$ permet de définir un endomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\alpha}: & \widehat{A} & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & \underset{(a_n \in A_n)}{\widehat{a_n}} & \longmapsto & \underset{(\alpha(a_n) \in A_n)}{\widehat{\alpha(a_n)}} \end{array}$$

L'anneau fléché $(\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ s'appelle l'*automorphisant* de (A, α) et l'on voit alors immédiatement que $\pi_A^n : A_n \longrightarrow \widehat{A}$ est un morphisme d'anneaux fléchés. Comme le laisse imaginer la terminologie, on a

Proposition 6.— *On a* $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\widehat{A})$.

Preuve : Pour $a_n \in A_n$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{a_n} \in \ker(\widehat{\alpha}) & \Longleftrightarrow \widehat{\alpha(a_n)} = 0 \Longleftrightarrow \exists k \geqslant 0, \ \varphi_{n,n+k}(\alpha(a_n)) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \alpha^{k+1}(a_n) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_{n,n+k+1}(a_n) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \widehat{a_n} = 0 \end{aligned}$$

et donc $\ker(\widehat{\alpha}) = \{0\}$: $\widehat{\alpha}$ est injectif.

Soit $y \in \widehat{A}$ et $a_n \in A_n$ tel que $y = \widehat{a_n}$. Si l'on considère l'élément $x_{n+1} = a_n \in A_{n+1} = A$, on voit alors que $\varphi_{n,n+1}(a_n) = \alpha(x_{n+1})$ et l'on a donc

$$y = \widehat{a_n} = \widehat{\varphi_{n,n+1}(a_n)} = \widehat{\alpha(x_{n+1})} = \widehat{\alpha}(\widehat{x_{n+1}})$$

c'est-à-dire $y = \widehat{\alpha}(x)$ avec $x = \widehat{x_{n+1}} \in \widehat{A}$: $\widehat{\alpha}$ est surjectif.

□

L'automorphisme $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{A}$ renverse le sens des flèches donné par α :

Lemme 7.— *Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 0$, $\widehat{\alpha}^k$ induit un isomorphisme*

$$\pi_A^{n+k}(A_{n+k}) \xrightarrow{\widehat{\alpha}^k} \pi_A^n(A_n)$$

Preuve : On a $\widehat{\alpha}^k \circ \pi_A^{n+k}(A_{n+k}) = \pi_A^{n+k} \circ \alpha^k(A_{n+k}) = \pi_A^{n+k} \circ \varphi_{n,n+k}(A_n) = \pi_A^n(A_n)$ et, compte tenu du fait que $\widehat{\alpha}$ est injectif (proposition 6), la restriction de $\widehat{\alpha}^k$ à $\pi_A^{n+k}(A_{n+k})$ est donc bien un isomorphisme à valeurs dans $\pi_A^n(A_n)$.

□

Lorsque α est injectif, le morphisme π_A^n est alors un plongement $(A_n, \alpha) \hookrightarrow (\widehat{A}, \widehat{\alpha})$, car si $a \in A_n$ est tel que $\widehat{a} = \widehat{0}$, alors il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\varphi_{n,n+k}(a) = \alpha^k(a) = 0$ et donc $a = 0$.

Pour le choix de $n = 0$, le morphisme $\pi_A = \pi_A^0 : (A_0, \alpha) \longrightarrow (\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ (resp. le plongement $(A_0, \alpha) \hookrightarrow (\widehat{A}, \widehat{\alpha})$, lorsque α est supposé injectif) s'appelle le *morphisme canonique* (resp. le *plongement canonique*) de A vers $\widehat{A}$.

2.2.2. *Fonctorialité.* On se donne un morphisme d'anneaux fléchés $\varphi : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ et l'on considère les automorphisants $\widehat{A} = \varinjlim_n A_n$ et $\widehat{B} = \varinjlim_n B_n$. Pour tout $n \geqslant 0$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] & B_{n+1} \arrow[loop right, "\beta"] \\
A_n \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] & B_n \arrow[loop right, "\beta"] \arrow[u, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

est visiblement commutatif, de sorte qu'en composant avec les morphismes naturels $\pi_B^n : B_n \longrightarrow \widehat{B}$ on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_B^{n+1}\circ\varphi"] & \\
& \widehat{B} \arrow[loop right, "\widehat{\beta}"] \\
A_n \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "\pi_B^n\circ\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Par propriété universelle de la limite inductive, il existe donc un unique morphisme $\Omega_\varphi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& & \widehat{A} \arrow[loop left, "\widehat{\alpha}"] \arrow[dddd, bend right, "\Omega_\varphi"] & & \\
\cdots \arrow[r, "\alpha"] & A_n \arrow[ur] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"] & & A_{n+1} \arrow[ul] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"] & \cdots \\
& & & & \\
\cdots \arrow[r, "\beta"] & B_n \arrow[dr] \arrow[rr, "\beta"] & & B_{n+1} \arrow[dl] \arrow[r, "\beta"] & \cdots \\
& & \widehat{B} \arrow[loop left, "\widehat{\beta}"] & &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Le morphisme d'anneaux fléchés $\Omega_\varphi : (\widehat{A}, \widehat{\alpha}) \longrightarrow (\widehat{B}, \widehat{\beta})$ s'appelle le *morphisme canonique induit par φ*. Il est défini de la manière suivante : si $\widehat{a_n} \in \widehat{A}$ avec $a_n \in A_n$, alors $\Omega_\varphi(\widehat{a_n}) = \widehat{\varphi(a_n)}$., et est caractérisé, par unicité de la flèche faisant commuter le diagramme ci-dessus, de la manière suivante :

Proposition 8.— *Étant donné un morphisme d'anneaux fléchés $\varphi : A \longrightarrow B$, le morphisme canonique $\Omega_\varphi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ induit par φ est l'unique morphisme d'anneaux fléchés $(\widehat{A},\widehat{\alpha}) \longrightarrow (\widehat{B},\widehat{\beta})$ vérifiant que, pour tout $n \geqslant 0$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_A^n"] & B_n \arrow[d, "\pi_B^n"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\Omega_\varphi"] & \widehat{B} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2.2.3. *Passage au quotient.* On se donne un idéal $I \in \mathscr{I}_\alpha(A)$ et l'on considère l'automorphisant $(\widehat{A/I},\widehat{\alpha_I})$ de l'anneau fléché $(A/I,\alpha_I)$. On note $\Omega_I : (\widehat{A},\widehat{\alpha}) \longrightarrow (\widehat{A/I},\widehat{\alpha_I})$ le morphisme canonique induit par la projection canonique $A \longrightarrow A/I$.

Puisque $A \longrightarrow A/I$ est surjectif, il en est de même des flèches $A_n \longrightarrow A_n/I$ (où $\widehat{A} = \varinjlim A_n$ et $\widehat{A/I} = \varinjlim A_n/I$) et le morphisme Ω_I est donc lui aussi surjectif. Ainsi Ω_I est un épimorphisme d'anneaux fléchés. Regardons à présent à quelle condition il est injectif :

Proposition 9.— *Étant donné un idéal $I \in \mathscr{I}_\alpha(A)$, les propriétés suivantes*

i) l'épimorphisme Ω_I est injectif,

ii) $I \subset \mathscr{N}_\alpha(A)$,

sont équivalentes. En conséquence de quoi, le monomorphisant $(\check{A},\check{\alpha})$ de (A,α) est le plus petit quotient A/I de A tel que l'épimorphisme canonique induit Ω_I soit un isomorphisme.

Preuve : $ii) \Longrightarrow i)$ Prenons $\widehat{a_n} \in \ker(\Omega_I)$, c'est-à-dire $a_n \in A_n$ tel que $\widehat{\overline{a_n}} = 0$. Il existe donc $m \geqslant n$ tel que $\overline{\alpha^{m-n}(a_n)} = \alpha_I^{m-n}(\overline{a_n}) = 0$ et ainsi, $\alpha^{m-n}(a_n) \in I \subset \mathscr{N}_\alpha(A)$. Il existe donc $k \geqslant 0$ tel que $\alpha^{m-n+k}(a_n) = 0$, ce qui prouve que $\widehat{a_n} = 0$.

$\neg ii) \Longrightarrow \neg i)$ Considérons $a \in I - \mathscr{N}_\alpha(A) \in A_0$. On a $\widehat{a} \neq \widehat{0}$ sinon il existerait $n \geqslant 0$ tel que $\alpha^n(a) = \varphi_{0,n}(a) = 0$, ce qui est justement exclu. Puisque $\overline{a} = \overline{0}$, on a donc $\Omega_I(\widehat{a}) = \widehat{\overline{a}} = \widehat{\overline{0}}$ et donc $\widehat{a} \in \ker(\Omega_I)$.

□

On obtient finalement la caractérisation suivante du monomorphisant :

Corollaire 10.— *Le nilespace $\mathscr{N}_\alpha(A)$ de (A,α) est l'unique idéal $I \in \mathscr{I}_\alpha(A)$ tel que les morphismes $\overline{\alpha}_I : A \longrightarrow A/I$ et $\Omega_I : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A/I}$ soient simultanément injectifs.*

Preuve : C'est la conjonction du corollaire 4 et de la proposition 9.

□

On retiendra, en particulier, le fait que les anneau fléchés $(\widehat{\check{A}},\widehat{\check{\alpha}})$ et $(\widehat{A},\widehat{\alpha})$ sont canoniquement isomorphes, avec comme avantage que $\check{\alpha}$ est injectif. Pour finir, on remarquera que, bien que l'objet dual $(\check{\widehat{A}},\check{\widehat{\alpha}})$ ait un sens, cet objet est sans intérêt puisque, $\widehat{\alpha}$ étant injectif (proposition 6), on a $(\check{\widehat{A}},\check{\widehat{\alpha}}) = (\widehat{A},\widehat{\alpha})$.

2.2.4. *Plongement.* On se donne maintenant un plongement d'anneaux fléchés $\varphi : (A,\alpha) \hookrightarrow (B,\beta)$. Sans hypothèse sur α et β, il n'y a pas *a priori* de raison pour que le morphisme canonique induit Ω_φ par φ soit lui aussi injectif. Un cas, toutefois, est favorable à cela :

Proposition 11.— *Soit $\varphi : (A,\alpha) \hookrightarrow (B,\beta)$ un plongement d'anneaux fléchés. Si l'endomorphisme β est injectif, alors le morphisme canonique induit $\Omega_\varphi : (\widehat{A},\widehat{\alpha}) \longrightarrow (\widehat{B},\widehat{\beta})$ est lui aussi un plongement d'anneaux fléchés.*

Preuve : Si $\widehat{a_n} \in \ker(\Omega_\varphi)$ avec $a_n \in A_n$, alors comme $\Omega_\varphi(\widehat{a_n}) = \Omega_\varphi \circ \pi_A^n(a_n) = \pi_B^n \circ \varphi(a_n) = 0$ (avec les notations de la proposition 8) et que π_B^n est injectif (précisément à cause de l'injectivité de β), on en déduit que $a_n = 0$.

Remarque : l'injectivité de β implique celle de α, puisque $\varphi \circ \alpha = \beta \circ \varphi$.

□

On en déduit que si H/K désigne une extension de corps et que $\alpha \in \mathrm{End}(H)$ est un endomorphisme tel que $\alpha_{|K} \in \mathrm{End}(K)$ alors on dispose d'une extension naturelle $\widehat{H}/\widehat{K}$: si $\varphi : K \longrightarrow H$ est le plongement définissant H/K, alors $\widehat{H}/\widehat{K}$ est l'extension définie par le plongement $\Omega_\varphi : \widehat{K} \longrightarrow \widehat{H}$.

2.2.5. *Propriété universelle.* L'automorphisant vérifie la propriété universelle suivante :

Théorème 12.— (Propriété universelle de l'automorphisant) *Soient* (A, α) *un anneau fléché et* $(\breve{A}, \breve{\alpha})$, $(\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ *respectivement, le monomorphisant et l'automorphisant de* (A, α). *Le plongement canonique* $\Pi_{\widehat{A}} : (\breve{A}, \breve{\alpha}) \hookrightarrow (\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ *vérifie la propriété suivante :*

Pour tout anneau fléché (B, β) *avec* $\beta \in \mathrm{Aut}(B)$ *et tout plongement* $\Pi_B : (\breve{A}, \breve{\alpha}) \hookrightarrow (B, \beta)$, *il existe un unique plongement* $\Pi : (\widehat{A}, \widehat{\alpha}) \hookrightarrow (B, \beta)$ *tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\breve{A} \arrow[loop left, "\breve{\alpha}"] \arrow[r, "\Pi_{\widehat{A}}"] \arrow[dr, "\Pi_B"'] & \widehat{A} \arrow[loop right, "\widehat{\alpha}"] \arrow[d, "\Pi"] \\
 & B \arrow[loop right, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Preuve : Le corollaire 10 permet, sans perte de généralité, de supposer que α est injectif et donc que $\breve{A} = A$ et $\breve{\alpha} = \alpha$. On pose $\widetilde{A} = \Pi_B(A) \subset B$, de sorte que $\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}}$ est un isomorphisme de $\widetilde{A}$ sur A. Puisque $\beta \circ \Pi_B = \Pi_B \circ \alpha$, la restriction $\beta_{|\widetilde{A}}$ est un monomorphisme de $\widetilde{A}$ et l'on a $\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta_{|\widetilde{A}} = \alpha \circ \left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $\widetilde{A_n} = \beta^{-n}(\widetilde{A}) = \beta^{-n} \circ \Pi_B(A)$ (et donc $\widetilde{A_0} = \widetilde{A}$), de sorte que $\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^n_{|\widetilde{A_n}}$ est un isomorphisme de $\widetilde{A_n}$ sur A. Toujours parce que $\beta \circ \Pi_B = \Pi_B \circ \alpha$, on voit que la restriction $\beta_{|\widetilde{A_n}}$ est un monomorphisme de $\widetilde{A_n}$ et que $\left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^n_{|\widetilde{A_n}}\right) \circ \beta_{|\widetilde{A_n}} = \alpha \circ \left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^n_{|\widetilde{A_n}}\right)$.

Par ailleurs, comme β^{-1} est un isomorphisme de $\widetilde{A_n}$ sur $\widetilde{A_{n+1}}$, on constate que l'application

$$\widetilde{A_n} \xrightarrow{\beta^{-1} \circ \beta_{|\widetilde{A_n}}} \widetilde{A_{n+1}}$$

n'est rien d'autre que le morphisme d'inclusion et que l'on a donc $\left(\beta_{|\widetilde{A_{n+1}}}\right)_{|\widetilde{A_n}} = \beta_{|\widetilde{A_n}}$. On déduit alors de toutes ces constatations que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{A_0} \arrow[r, "\beta^{-1}\circ\beta_{|\widetilde{A_0}}", "\subset"'] \arrow[d, "\simeq"', "\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}}\circ\beta^0_{|\widetilde{A_0}}"] & \widetilde{A_1} \arrow[r, "\beta^{-1}\circ\beta_{|\widetilde{A_1}}", "\subset"'] \arrow[d, "\simeq"', "\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}}\circ\beta^1_{|\widetilde{A_1}}"] & \cdots\cdots \arrow[r, "\beta^{-1}\circ\beta_{|\widetilde{A_{n-1}}}", "\subset"'] & \widetilde{A_n} \arrow[r, "\beta^{-1}\circ\beta_{|\widetilde{A_n}}", "\subset"'] \arrow[d, "\simeq"', "\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}}\circ\beta^n_{|\widetilde{A_n}}"] & \cdots \\
A \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha"] & \cdots\cdots \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

est commutatif car, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\alpha \circ \left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^n_{|\widetilde{A_n}}\right) &= \left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^n_{|\widetilde{A_n}}\right) \circ \beta_{|\widetilde{A_n}} = \left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^{n+1}_{|\widetilde{A_n}}\right) \circ \mathrm{Id}_{|\widetilde{A_n}} \\ &= \left(\left(\Pi_B^{-1}\right)_{|\widetilde{A}} \circ \beta^{n+1}_{|\widetilde{A_{n+1}}}\right) \circ \left(\beta^{-1} \circ \beta_{|\widetilde{A_n}}\right)\end{aligned}$$

Par propriété universelle, découle alors l'existence d'un isomorphisme

$$\Pi : \widehat{A} = \varinjlim_n A \longrightarrow \varinjlim_n \widetilde{A_n} = \bigcup_{n\geqslant 0} \widetilde{A_n} \subset B$$

faisant commuter les diagrammes. La propriété $\Pi \circ \widehat{\alpha} = \beta \circ \Pi$ découle alors de la commutativité des diagrammes, comme précédemment dans ce texte.

Reste à établir l'unicité de Π. Considérons un élément $x \in \widehat{A} = \varinjlim_n A_n$, disons $x = \widehat{a_n}$ avec $a_n \in A_n$ pour un certain $n \geqslant 0$, et posons $y = \widehat{\alpha}^n(x)$. Le lemme 7 assure qu'il existe $a_0 \in A_0 = A$ tel que $y = \widehat{a_0}$ et comme on a, par hypothèse, $\Pi \circ \widehat{\alpha}^n(x) = \beta^{-n} \circ \Pi(x)$ on en déduit que

$$\Pi(x) = \beta^n \circ (\Pi \circ \widehat{\alpha}^n(x)) = \beta^n \circ \Pi(y) = \beta^n \circ \Pi \circ \Pi_{\widehat{A}}(a_0) = \beta^n \circ \Pi_B(a_0)$$

Cette égalité ayant lieu indépendamment du choix de a_0, l'unicité de Π en découle.

□

Lorsque α est injectif, l'anneau $\widehat{A}$ est donc, en terme de plongement, le plus petit anneau contenant A et possédant un automorphisme relevant α.

2.3.— Quelques propriétés de l'automorphisant.

Dans ce § on considère des anneaux fléchés (A, α) pour lesquels l'endomorphisme α est injectif.

2.3.1. *Étude du centre.*

Lemme-Définition 13.— *Soient $f : E \longrightarrow E$ une application et $\Omega \subset E$. Parmi toutes les parties $\Omega_0 \subset \Omega$ stables par f (i.e. $f_{|\Omega_0} : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_0$), il en existe une plus grande. On l'appelle le* stabilisé *de Ω par f et on la note* $\mathrm{Stab}_f(\Omega)$. *Cet ensemble est décrit de la manière suivante :*

$$\mathrm{Stab}_f(\Omega) = \{x \in E / \ \forall n \geqslant 0,\ f^n(x) \in \Omega\} = \bigcap_{n\geqslant 0} (f^n)^{-1}(\Omega)$$

Preuve : L'ensemble $\mathrm{Stab}_f(\Omega)$ est visiblement une partie de Ω stable par f. Si $\Omega_0 \subset \Omega$ est stable par f, alors pour tout $x_0 \in \Omega_0$ et tout $n \geqslant 0$, on a $f^n(x_0) \in \Omega_0$, ce qui justifie que $\Omega_0 \subset \mathrm{Stab}_f(\Omega)$

□

Il est remarquable que, quand E a une structure de groupe, d'anneau ou de corps et que f est un morphisme pour cette structure, alors si Ω est une sous-structure il en est de même de $\mathrm{Stab}_f(\Omega)$.

Proposition 14.— *Soient (A, α) un anneau fléché avec α injectif. Le centre $Z(\widehat{A})$ de l'automorphisant de (A, α) est canoniquement isomorphe à l'automorphisant du stabilisé* $(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A)), \alpha)$ *de $Z(A)$ par α et l'on peut donc écrire*

$$Z(\widehat{A}) = \widehat{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))}$$

Preuve : On considère le système inductif qui définit $\widehat{A}$

$$A_0 \xrightarrow{\varphi_{0,1}=\alpha} A_1 \xrightarrow{\varphi_{1,2}=\alpha} \cdots\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1,n}=\alpha} A_n \xrightarrow{\varphi_{n,n+1}=\alpha} \cdots$$

où $A_n = A$ pour tout $n \geqslant 0$. On prend un élément $\widehat{x} \in \widehat{A}$ de représentant $x \in A_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{x} \in Z(\widehat{A}) \quad & \Longleftrightarrow \forall \widehat{y} \in \widehat{A},\ \widehat{x}.\widehat{y} = \widehat{y}.\widehat{x} \Longleftrightarrow \forall k \geqslant 0, \forall y \in A_{n+k},\ \varphi_{n,n+k}(x)y = y\varphi_{n,n+k}(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall k \geqslant 0, \forall y \in A,\ \alpha^k(x)y = y\alpha^k(x) \Longleftrightarrow \forall k \geqslant 0,\ \alpha^k(x) \in Z(A) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n))
\end{aligned}$$

et ainsi, $Z(\widehat{A}) = \bigcup_n \pi_A^n(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n)))$. Le plongement canonique $\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A)) \subset A$ et l'endomorphisme α étant tous deux injectifs, le morphisme induit $\Omega_\subset : \widehat{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))} \longrightarrow \widehat{A}$ est un plongement (proposition 11). Comme $\Omega_\subset \circ \pi^n_{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))}(\mathrm{Stab}_\alpha((A_n)) = \pi_A^n(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n)))$, on en déduit finalement que

$$\begin{aligned}
\Omega_\subset\left(\widehat{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))}\right) & = \Omega_\subset\left(\bigcup_n \pi^n_{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))}(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n)))\right) \\
& = \bigcup_n \Omega_\subset \circ \pi^n_{\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A))}(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n))) \\
& = \bigcup_n \pi_A^n(\mathrm{Stab}_\alpha(Z(A_n))) = Z(\widehat{A})
\end{aligned}$$

□

Remarque 15.— Lorsque $Z(A)$ est stable par α, on a donc $Z(\widehat{A}) = \widehat{Z(A)}$. La question de la stabilité de $Z(A)$ est délicate. Bien sûr, lorsque α est un automorphisme de A, sa restriction à $Z(A)$ est aussi un automorphisme mais, sans le caractère surjectif, des pathologies peuvent apparaitre comme le montre l'exemple générique suivant : on considère un groupe G et l'algèbre de groupe $k[G]$ sur un corps commutatif k, c'est-à-dire le k-espace vectoriel de base les éléments de G, muni du produit de convolution

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g.g\right).\left(\sum_{h\in G} \mu_h.h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h.gh$$

(qui est bien défini même si G est infini, puisque les familles $(\lambda_g)_g$ et $(\mu_h)_h$ sont presque partout nulles). Si α désigne un endomorphisme du groupe G, alors on peut étendre α en un endomorphisme de la k-algèbre $k[G]$, par la formule

$$\alpha\left(\sum_{g\in G} \lambda_g.g\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g.\alpha(g)$$

On constate immédiatement que, si α est injectif sur G, il l'est aussi sur $k[G]$. Un petit calcul classique montre que le centre $Z(k[G])$ de $k[G]$ est la sous-k-algèbre de base $\{e_C\}_{C\in\mathscr{C}}$ où $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaisons finies de G et, pour tout $C \in \mathscr{C}$, $e_C = \sum_{g\in C} g$. Les classes de conjugaisons étant d'intersection vide deux à deux, on voit que, si $g \in G$ est dans le centre de $k[G]$, alors $C_g = \{g\}$, c'est-à-dire que $g \in Z(G)$ (i.e. $G \cap Z(k[G]) = Z(G)$). Il s'ensuit que, si $\alpha(Z(G)) \not\subset Z(G)$ alors $\alpha(Z(k[G])) \not\subset Z(k[G])$.

Tout revient donc à construire un endomorphisme injectif d'un groupe G qui ne laisse pas stable le centre $Z(G)$. Pour cela, on se donne un plongement de groupes finis $\pi : G_0 \longrightarrow \Gamma$ avec $Z(G_0) \neq 1$ et $Z(\Gamma) = 1$ (par exemple, un groupe abélien G_0 d'ordre $m \geqslant 3$, le groupe symétrique $\Gamma = S_m$ et π le plongement canonique). On considère alors le groupe produit $G = G_0 \times \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n \times \cdots$ où $\Gamma_n = \Gamma$, pour tout $n \geqslant 1$. A un élément $x = (g_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots) \in G$, on associe l'élément $\alpha(x) = (e, \pi(g_0), \gamma_1, \cdots) \in G$ (décalage vers la droite). L'application α, ainsi définie, est alors un endomorphisme injectif de G. Si l'on prend un élément non trivial $g_0 \in Z(G_0)$ alors l'élément $g = (g_0, e, \cdots) \in G$ est clairement central dans G, mais comme $\pi(g_0)$ est non trivial et que $Z(\Gamma) = 1$, on en déduit que $\alpha(g) = (e, \pi(g_0), e, \cdots) \notin Z(G)$.

Même dans le cas d'un corps K, on peut construire un endomorphisme α de K tel que $\alpha(Z(K)) \not\subset Z(K)$. L'exemple que nous allons proposer est un peu long et nécessite quelques résultats préliminaires. Nous avons donc choisi de le présenter dans un appendice en fin de texte, appendice où sont établies plusieurs propriétés générales utiles à la théorie et qu'il nous a semblé intéressant de rédiger à part.

Remarque 16.— Pour ce qui est du monomorphisant et de l'automorphisant, nous nous sommes intéressé au cas des anneaux, mais le lecteur se convaincra assez facilement que les notions et énoncés présentés depuis le début du § 2 restent les mêmes lorsque l'on considère pour A un groupe et pour α un endomorphisme de groupe. Le nilespace $\mathcal{N}_\alpha(A)$ est alors un sous-groupe distingué de A et l'on considère pour $\mathcal{I}_\alpha(A)$, l'ensemble des sous-groupes distingués de A qui sont stables par α.

2.3.2. *Cas des corps.* Lorsque A est un corps, tout endomorphisme de A étant injectif, on peut travailler directement sur A et oublier le passage au monomorphisant. De manière évidente, si (H,α) est un anneau fléché et que H est un corps, alors l'automorphisant $\widehat{H}$ de H est lui-même un corps et le morphisme canonique $\pi_H = \pi_H^0 : H \longrightarrow \widehat{H}$ est un plongement. On dispose donc d'une extension canonique $\widehat{H}/H$.

Proposition 17.— *Soit k une corps commutatif et $\alpha \in \mathrm{End}(k)$. L'extension $\widehat{k}/k$ est algébrique si et seulement si l'extension $k/\alpha(k)$ l'est. Dans cette situation, si α n'est pas surjectif, l'extension $\widehat{k}/k$ est de degré infini.*

Preuve : Considérons le système inductif associé à $\widehat{k}$

$$k_0 \xrightarrow{\alpha} k_1 \xrightarrow{\alpha} \cdots\cdots \xrightarrow{\alpha} k_n \xrightarrow{\alpha} \cdots$$

où $k_n = k$. Le caractère injectif de α identifie les k_n en une suite croissante de sous-corps $k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots$ dont la réunion vaut $\widehat{k}$. Chaque extension k_{n+1}/k_n est isomorphe à $k/\alpha(k)$ par application de l'automorphisme $\widehat{\alpha}^{-(n+1)}$ de $\widehat{k}$. L'équivalence des propriétés découle alors de la transitivité de l'algébricité.

Si α n'est pas surjectif, alors $[k : \alpha(k)] = \aleph$ pour un certain cardinal $\aleph > 1$. La transitivité des degrés assure alors que $[k_n : k] = n.\aleph$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc que $[\widehat{k} : k] \geqslant \aleph_0$.

□

Remarque 18.— L'aspect galoisien de l'extension $\widehat{k}/k$ est plus délicat à prédire. Si l'on généralise l'exemple donné dans l'introduction en considérant de $k = k_0(t)$ muni de l'endomorphisme $\alpha : t \longrightarrow t^n$ pour un entier n premier à la caractéristique de k_0, alors l'extension $k/\alpha(k) = k_0(t)/k_0(t^n)$ est galoisienne si et seulement si $\mu_n \subset k_0$ et dans ces conditions son groupe de Galois vaut $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'automorphisant de (k,α) s'identifie au corps $\widehat{k} = k_0(t^{1/n^\infty}) = \bigcup_{k\geqslant 0} k_0(t^{1/n^k})$. Pour que $\widehat{k}/k$ soit galoisienne, il faut et il suffit alors que $\mu_{n^\infty} \subset k_0$ (et dans ces conditions $\mathrm{Gal}(\widehat{k}/k) = "\mathbb{Z}_n" := \prod_{p|n} \mathbb{Z}_p$). On voit donc que la question du caractère galoisien de $\widehat{k}/k$ dépend intimement de l'arithmétique de k.

Proposition 19.— *On considère une extension de corps H/K et un endomorphisme $\alpha \in \mathrm{End}(H)$ tel que $\alpha_{|K} \in \mathrm{End}(K)$ et l'extension $\widehat{H}/\widehat{K}$ obtenu par le plongement canonique Ω induit par H/K. Les dimensions gauche et droite de ces extensions vérifient respectivement $[\widehat{H} : \widehat{K}]_{g,d} \leqslant [H : K]_{g,d}$.*

Preuve : On considère une famille K-liée à gauche $\{x_i\}_I$ d'élément de H et l'on regarde son image $\{\widehat{x_i}\}_I$ *via* le plongement canonique $\pi_H : H \longrightarrow \widehat{H}$ (qui est bien un plongement cas H est un corps). En particulier, la famille $\{\widehat{x_i}\}_I$ est de cardinal $\sharp I$ et cette famille est $\widehat{K}$-liée à gauche, car si

$$\lambda_1.x_{i_1} + \cdots + \lambda_n.x_{i_n} = 0$$

désigne une équation de K-dépendance linéaire à gauche non triviale, on a

$$\pi_H(\lambda_1.x_{i_1} + \cdots + \lambda_n.x_{i_n}) = \Omega \circ \pi_K(\lambda_1).\pi_H(x_{i_1}) + \cdots + \Omega \circ \pi_K(\lambda_n).\pi_H(x_{i_n}) = 0$$

et comme $\Omega \circ \pi_K$ est un plongement, cette dernière égalité constitue une équation de dépendance $\widehat{K}$-

linéaire à gauche. Le théorème de la base incomplète[1] montre alors que $[\widehat{H}:\widehat{K}]_g \leqslant \sharp I$ mais comme $[H:K]_g = \min(\sharp I)$ où $\sharp I$ parcourt l'ensemble des cardinaux de familles K-liées à gauche de H, on en déduit finalement l'inégalité annoncée. La preuve pour la dimension droite s'effectue de la même manière.

$\square$

Exemple 20.— On reprend l'exemple de la remarque 18 en considérant un corps commutatif k, deux entiers $n,p \geqslant 1$, $H = k(t)$, $K = k(t^n)$ et $\alpha : t \longmapsto t^p$. On a $\widehat{H} = k(t^{1/p^\infty}) = \bigcup_{k\geqslant 0} k(t^{1/p^k})$ et $\widehat{K} = k(t^{n/p^\infty}) = \bigcup_{k\geqslant 0} k(t^{n/p^k})$. On a alors $[H:K] = n$ et $[\widehat{H}:\widehat{K}] = n/\mathrm{pgcd}(n,p)$ et l'on voit que l'inégalité de la proposition 19 ne peut être précisée plus, en toute généralité.

3.— Application aux corps de fractions tordus.

Lorsque $A = K$ est un corps et $\alpha \in \mathrm{End}(K)$ est un endomorphisme de corps, il existe un moyen de décrire l'automorphisant $(\widehat{K},\widehat{\alpha})$ de (K,α), particulièrement élégant et définitivement pertinent au regard de ce qui va suivre, en considérant le corps de fractions tordu $K(t,\alpha)$: pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère le sous-corps $K_n = t^{-n}Kt^n$ de $K(t,\sigma)$. Puisque, par définition, pour tout $x \in K$, on a $t^{-n}xt^n = t^{-(n+1)}.(txt^{-1})t^{n+1} = t^{-(n+1)}\alpha(x)t^{n+1}$, on voit que l'application

$$\begin{array}{ccc} K_n & \longrightarrow & K_{n+1} \\ y & \longmapsto & I(t^{-(n+1)})\circ\alpha\circ I(t^n)(y) \end{array}$$

n'est rien d'autre que l'injection canonique $K_n \subset K_{n+1}$. Ainsi, la suite de corps $(K_n)_n$ est croissante pour l'inclusion et le diagramme

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, shift left, "Id"] & K_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, shift left, "I(t)"] & \cdots\cdots \arrow[r, "\subset"] & K_n \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, shift left, "I(t^n)"] & \cdots \\ K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, shift left, "Id"] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, shift left, "I(t^{-1})"] & \cdots\cdots \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, shift left, "I(t^{-n})"] & \cdots \end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme précédemment, par propriété universelle, on en déduit que l'automorphisant de (K,α) s'identifie à l'anneau fléché $(\widehat{K},\widehat{\alpha})$ avec $\widehat{K} = \bigcup_{n\geqslant 0} t^{-n}Kt^n \subset K(t,\alpha)$ et $\widehat{\alpha} = I(t)_{|\widehat{K}} \in \mathrm{Aut}(\widehat{K})$.

Théorème 21.— *Tout corps de fractions tordu par un endomorphisme est égal à un corps de fractions tordu par un automorphisme, en la même variable. Plus précisément, avec les notations précédentes,*

$$K(t,\alpha) = \widehat{K}(t,\widehat{\alpha})$$

Preuve : Il est clair que $K(t,\alpha) = K(\widehat{K}\cup\{t\})$. Considérons, dans $K(t,\alpha)$, une dépendance $\widehat{K}$-linéaire de $1,t,\cdots,t^n$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n = 0$$

Par définition du corps $\widehat{K}$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\lambda_0,\cdots,\lambda_n \in t^{-k}Kt^k$ et donc, en conjuguant par t^k on obtient

$$(\underbrace{t^k\lambda_0 t^{-k}}_{\in K}) + (\underbrace{t^k\lambda_1 t^{-k}}_{\in K})t + \cdots + (\underbrace{t^k\lambda_n t^{-k}}_{\in K})t^n = 0$$

et finalement $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Puisque $tx = \widehat{\alpha}(x)t$ pour tout $x \in \widehat{K}$, on voit que le sous-anneau de $K(t,\alpha)$ engendré par $\widehat{K}$ et t est égal à l'anneau de polynômes tordu en la variable t : $\widehat{K}[t,\widehat{\alpha}]$. Ainsi,

$$K[t,\alpha] \subset \widehat{K}[t,\widehat{\alpha}] \subset K(t,\alpha) \Longrightarrow K(t,\alpha) = \mathrm{Frac}\,(K[t,\alpha]) \subset \mathrm{Frac}\left(\widehat{K}[t,\widehat{\alpha}]\right) = \widehat{K}(t,\widehat{\alpha}) \subset K(t,\alpha)$$

[1] En algèbre linéaire, la théorie de la dimension des K-espaces vectoriels est la même, que le corps K considéré soit commutatif ou gauche.

□

Exemple 22.— Si l'on reprend l'exemple, donné dans la remarque 18, du corps $K = k(x)$ et du k-endomorphisme $\alpha : x \longmapsto x^m$, on voit que dans $K(t,\alpha)$, le sous-corps $K_n = t^{-n}Kt^n$ s'identifie au corps $k(x^{1/m^n})$ et que l'on a

$$k(x)(t,\alpha) = k(x^{1/m^\infty})(t,\widehat{\alpha})$$

où $\widehat{\alpha}(x^k) = x^{mk}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}[1/m]$.

Remarquons que le théorème 21 permet de préciser la question abordée dans la proposition 19 sur la dimension d'une extension d'automorphisants :

Corollaire 23.— *Si H/K désigne une extension de corps et $\alpha \in \mathrm{End}(H)$ est un endomorphisme tel que $\alpha_{|K} \in \mathrm{End}(K)$ alors on $[\widehat{H} : \widehat{K}]_d = [H(t,\alpha) : K(t,\alpha)]_d$.*

Preuve : D'après le théorème 21, on a $H(t,\alpha) = \widehat{H}(t,\widehat{\alpha})$ et $K(t,\alpha) = \widehat{K}(t,\widehat{\alpha})$. Comme $\widehat{\alpha}$ est un automorphisme, on peut alors appliquer la proposition 1, issue de [Des], pour conclure.

□

On considère maintenant un corps K, un endomorphisme $\alpha \in \mathrm{End}(K)$, une α-dérivation δ de K, le corps de fractions tordu $K(t,\alpha,\delta)$ et $(\widehat{K},\widehat{\alpha})$ l'automorphisant de (K,α). Si l'on suppose que $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$, alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[r, "\alpha"] & K_1 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[r, "\alpha"] & \cdots\cdots \arrow[r, "\alpha"] & K_n \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[r, "\alpha"] & \cdots \end{tikzcd}$$

est commutatif ($K_n = K$ pour tout $n \geqslant 0$). On peut donc définir une application $\widehat{\delta} : \widehat{K} \longrightarrow \widehat{K}$, en posant, pour $a_n \in K_n$,

$$\widehat{\delta}(\widehat{a_n}) = \widehat{\delta(a_n)}$$

On constate alors que $\widehat{\delta}$ est une $\widehat{\alpha}$-dérivation de $\widehat{K}$: si l'on prend $x, y \in \widehat{K}$, disons $x = \widehat{x_n}$ et $y = \widehat{y_n}$ avec $x_n, y_n \in K_n$ pour un certain $n \geqslant 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(xy) &= \widehat{\delta}(\pi_K^n(x_n)\pi_K^n(x_n)) = \widehat{\delta}(\pi_K^n(x_n y_n)) = \pi_K^n(\delta(x_n y_n)) = \pi_K^n(\delta(x_n)y_n + \alpha(x_n)\delta(y_n)) \\ &= \pi_K^n(\delta(x_n))\pi_K^n(y)_n + \pi_K^n(\alpha(x_n))\pi_K^n(\delta(y_n)) = \widehat{\delta}(\widehat{x_n})\widehat{y_n} + \widehat{\alpha}(\widehat{x_n})\widehat{\delta}(\widehat{y_n}) \\ &= \widehat{\delta}(x)y + \widehat{\alpha}(x)\widehat{\delta}(y) \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\delta}$ relève l'image de α et δ par le plongement canonique $\pi_K : K \longrightarrow \widehat{K}$ (i.e. $\pi_K \circ \alpha = \widehat{\alpha} \circ \pi_K$ et $\pi_K \circ \delta = \widehat{\delta} \circ \pi_K$), on en déduit un plongement $p : K(t,\alpha,\delta) \longrightarrow \widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$: p se définit d'abord sur l'anneau $K[t,\alpha,\delta]$ en posant $p(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = \pi_K(a_0) + \pi_K(a_1)t + \cdots + \pi_K(a_n)t^n$ et, comme $K[t,\alpha,\delta]$ est un anneau de Ore, p se relève (de manière unique) à $K(t,\alpha,\delta)$ tout entier. Finalement, on a le

Théorème 24.— *Pour tout corps de fractions tordu $K(t,\alpha,\delta)$ tel que $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$, il existe une extension $\widehat{K}/K$, un automorphisme $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\widehat{K})$ prolongeant α et une $\widehat{\alpha}$-dérivation $\widehat{\delta}$ de $\widehat{K}$ prolongeant δ, de sorte que le corps $K(t,\alpha,\delta)$ se plonge dans le corps de fractions tordu $\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$.*

Il existe un autre moyen de considérer le corps $\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$: la condition $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$ a pour conséquence que l'on peut relever l'endomorphisme α en un endomorphisme $\widetilde{\alpha}$ de $K(t,\alpha,\delta)$, en posant $\widetilde{\alpha}(t) = t$. En effet, pour tout $a \in K$, on a alors

$$\widetilde{\alpha}(t.a) = \widetilde{\alpha}(\alpha(a)t + \delta(a)) = \widetilde{\alpha} \circ \alpha(a)\widetilde{\alpha}(t) + \widetilde{\alpha} \circ \delta(a) = \alpha^2(a)t + \delta \circ \alpha(a) = t\alpha(a) = \widetilde{\alpha}(t).\widetilde{\alpha}(a)$$

et donc, par linéarité, on dispose d'un endomorphisme de l'anneau $K[t,\alpha,\delta]$ qui, par la propriété de Ore, s'étend de manière unique en un endomorphisme de son corps de fractions $K(t,\alpha,\delta)$. Une fois relevé α en $\widetilde{\alpha}$, on peut alors identifier $\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$ à l'automorphisant $\widehat{K(t,\alpha,\delta)}$ de $(K(t,\alpha,\delta),\widetilde{\alpha})$. Pour voir ceci, il faut d'abord constater que les plongements $p_n : K_n(t,\alpha,\delta) \longrightarrow \widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$ (donnés par p), vérifient que $p_{n+1} \circ \widetilde{\alpha} = p_n$. À nouveau, ceci se voit en commençant par vérifier cette relation sur les anneaux $K_n[t,\alpha,\delta]$, grâce à la relation $\pi_K^n \circ \alpha = \widehat{\alpha} \circ \pi_K^n$, puis sur $K_n(t,\alpha,\delta)$ tout entier, en utilisant le fait que ces anneaux sont de Ore. On dispose ainsi d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{K(t,\alpha,\delta)} \arrow[dd, "\Theta"] & & \\
\cdots \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] & K_n(t,\alpha,\delta) \arrow[ur, "\pi^n_{K(t,\alpha,\delta)}"] \arrow[rr, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dr, "p_n"'] & & K_{n+1}(t,\alpha,\delta) \arrow[ul, "\pi^{n+1}_{K(t,\alpha,\delta)}"'] \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dl, "p_{n+1}"] & \cdots \\
 & & \widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta}) & &
\end{tikzcd}$$

dont on déduit, par propriété universelle de la limite inductive, l'existence d'un monomorphisme Θ : $\widehat{K(t,\alpha,\delta)} \longrightarrow \widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta})$. Ensuite, puisque $\widehat{K} = \bigcup_n \pi_K^n(K_n)$, on voit, par le même argument de passage par les anneaux $K_n[t,\alpha,\delta]$, que $\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta}) = \bigcup_n \pi^n_{K(t,\alpha,\delta)}(K_n(t,\alpha,\delta))$ et donc que Θ est surjectif. Ainsi, on peut écrire

$$\widehat{K}(t,\widehat{\alpha},\widehat{\delta}) = \widehat{K(t,\alpha,\delta)}$$

mais ce ci n'est possible qu'avec l'hypothèse de commutation $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$. Sans cette hypothèse, l'objet $\widehat{K(t,\alpha,\delta)}$ n'a pas de sens puisque l'existence d'un relevé $\widetilde{\alpha}$ de α à $K(t,\alpha,\delta)$ est précisément équivalente à cette hypothèse. Pour ce qui est de $\widehat{\alpha}$, il est bien défini en toute circonstance, le problème vient de l'existence de $\widehat{\delta}$: pour qu'il existe une $\widehat{\alpha}$-dérivation de $\widehat{K}$ relevant δ, on voit que la condition $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$ est nécessaire.

— Appendice —

Corps de fractions tordus en cascade. On considère un corps K et un automorphisme $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}(K)$. On pose $H_0 = K(t_0,\sigma_0)$, $R_0 = K[t_0,\sigma_0]$ et l'on définit les suites $(H_n)_n$ et $(R_n)_n$ par la relation de récurrence

$$H_{n+1} = H_n(t_{n+1},\sigma_{n+1}),\ R_{n+1} = R_n[t_{n+1},\sigma_{n+1}]$$

où $\sigma_{n+1} \in \mathrm{Aut}(H_n)$ est un automorphisme qui laisse stable R_n. On considère alors le K-anneau $R = \bigcup_{n\geqslant 0} R_n$, que l'on notera génériquement $K[t_0,t_1,\cdots;\sigma_0,\sigma_1,\cdots]$, et le corps $H = \bigcup_{n\geqslant 0} H_n$, que l'on notera $K(t_0,t_1,\cdots;\sigma_0,\sigma_1,\cdots)$.

Théorème 25.— *Pour $n \geqslant 0$, on a :*

a) L'anneau R_n est le sous-K-anneau de H_n engendré par $t_0,\cdots,t_n$.

b) Tout élément du corps H_n peut s'écrire sous la forme pq^{-1} (resp. $q^{-1}p$) avec $p,q \in R_n$.

c) L'anneau R_n est de Ore à droite et à gauche et son corps de fractions est égal à H_n.

En conséquence de quoi, l'anneau R est le sous-K-anneau de H engendré par les t_n. C'est un anneau de Ore à droite et à gauche et son corps de fractions est égal à H.

Preuve : a) Soit A un sous-K-anneau de H_n contenant $t_0, \cdots, t_n$. Il contient $K[t_0] = K[t_0, \sigma_0] = R_0$, donc il contient $K[t_0, \sigma_0][t_1] = K[t_0, \sigma_0][t_1, \sigma_1] = R_1$ et, par induction, il contient finalement $K[t_0, \sigma_0] \cdots [t_n, \sigma_n] = R_n$.

b) Pour $n = 0$, c'est clair : l'anneau $R_0 = K[t_0, \sigma_0]$ est de Ore à gauche et à droite puisque σ_0 est un automorphisme et H_0 étant, par définition le corps de fractions de R_0 tout élément de H_0 peut s'écrire sous la forme pq^{-1} (resp. $q^{-1}p$) avec $p, q \in R_0$.

Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geqslant 0$ et examinons les choses au rang $n+1$. On considère un polynôme $p(t_{n+1}) = a_0 + a_1 t_{n+1} + \cdots + a_k t_{n+1}^k \in H_n[t_{n+1}, \sigma_{n+1}]$. Par hypothèse de récurrence, on a $a_0 = \tilde{a}_0^{-1} \hat{a}_0$ avec $\tilde{a}_0, \hat{a}_0 \in R_n$. On a donc

$$p(t_{n+1}) = \tilde{a}_0^{-1}(\hat{a}_0 + \tilde{a}_0 a_1 t_{n+1} + \cdots + \tilde{a}_0 a_k t_{n+1}^k)$$

On peut écrire $\tilde{a}_0^{-1} a_1 = \tilde{a}_1^{-1} \hat{a}_1$ avec $\tilde{a}_1, \hat{a}_1 \in R_n$ et ainsi

$$p(t_{n+1}) = \tilde{a}_0^{-1} \tilde{a}_1^{-1}(\tilde{a}_1 \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t_{n+1} + \cdots + \tilde{a}_1 \tilde{a}_0 a_k t_{n+1}^k)$$

En répétant le procédé, on voit que

$$p(t_{n+1}) = \tilde{a}_0^{-1} \tilde{a}_1^{-1} \cdots \tilde{a}_k^{-1}(\tilde{a}_k \cdots \tilde{a}_1 \hat{a}_0 + \tilde{a}_k \cdots \tilde{a}_2 \hat{a}_1 t_{n+1} + \cdots + \hat{a}_k t_{n+1}^k)$$

(on a chassé les dénominateurs à gauche) et donc $p = \tilde{p}^{-1} \hat{p}$ avec $\tilde{p} \in R_n$ et $\hat{p} \in R_{n+1}$. On peut aussi écrire $p = \hat{p} \tilde{p}^{-1}$ avec les même conditions, en remarquant que, puisque σ_{n+1} est un automorphisme, tout élément $p \in H_n[t_{n+1}, \sigma_{n+1}]$ peut s'écrire sous la forme

$$p(t_{n+1}) = a_0 + t_{n+1} a_1 + \cdots + t_{n+1}^k a_k$$

et l'on peut alors, par le même procédé que précédemment, chasser à droite les dénominateurs.

Considérons maintenant un élément $f \in H_{n+1} = H_n(t_{n+1}, \sigma_{n+1})$. Puisque H_n est un corps et que σ_{n+1} est un automorphisme, l'anneau de polynômes tordu $H_n[t_{n+1}, \sigma_{n+1}]$ est de Ore à droite et à gauche si bien que l'on peut écrire $f = pq^{-1}$ (resp. $f = q^{-1}p$) avec $p, q \in H_n[t_{n+1}, \sigma_{n+1}]$. D'après ce qui précède, on peut écrire $p = \hat{p}\tilde{p}^{-1}$ (resp. $p = \tilde{p}^{-1}\hat{p}$) et $q = \hat{q}\tilde{q}^{-1}$ (resp. $q = \tilde{q}^{-1}\hat{q}$) avec $\hat{p}, \hat{q} \in R_{n+1}$ et $\tilde{p}, \tilde{q} \in R_n$. On a alors

$$f = pq^{-1} = (\hat{p}\tilde{p}^{-1})(\hat{q}\tilde{q}^{-1})^{-1} = \hat{p}(\tilde{p}^{-1}\tilde{q})\hat{q}^{-1} \text{ (resp. } f = q^{-1}p = \hat{q}^{-1}(\tilde{q}\tilde{p}^{-1})\hat{p})$$

mais puisque $\tilde{p}^{-1}\tilde{q} \in H_n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour écrire $\tilde{p}^{-1}\tilde{q} = \bar{q}\bar{p}^{-1}$ (resp. $\tilde{q}\tilde{p}^{-1} = \bar{p}^{-1}\bar{q}$) avec $\bar{q}, \bar{p} \in R_n$. Ceci montre, pour finir, que $f = (\hat{p}\bar{q})(\hat{q}\bar{p})^{-1}$ (resp. $f = (\bar{p}\hat{q})^{-1}(\bar{q}\hat{p})$), ce qui achève la récurrence.

c) Soient $a, b \in R_n$ non nuls. D'après ce qui précède, il existe $c, d \in R_n$ tel que $ab^{-1} = c^{-1}d$ (resp. $b^{-1}a = dc^{-1}$)). On a donc $ca = db$ (resp. $ac = bd$) ce qui prouve que $R_n a \cap R_n b \neq \{0\}$ (resp. $aR_n \cap bR_n \neq \{0\}$).

Si $a, b \in R$ non nuls, alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $a, b \in R_n$ et l'on a alors, d'après le a), $\{0\} \neq R_n a \cap R_n b \subset Ra \cap Rb$ (resp. $\{0\} \neq aR_n \cap bR_n \subset aR \cap bR$).

□

Le centre du corps H se calcule en appliquant le

Lemme 26.— *Soit $H_0 \subset H_1 \subset \cdots$ une suite croissante de corps quelconque. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $k_n = Z(H_n)$. Le corps $H = \bigcup_n H_n$ a pour centre $k = \bigcup_n \bigcap_{m \geqslant n} k_m$.*

Preuve : Pour tout $n \geqslant 0$, on a $H = \bigcup_{m \geqslant n} H_m$ et donc $\bigcap_{m \geqslant n} k_m \subset k$. Réciproquement, si $x \in H$ avec $x \in H_n$, on a $x \in k_m$ pour tout $m \geqslant n$.

□

et en évaluant, par récurrence, les centres $Z(H_n)$. Pour ce faire, on utilise le

Lemme 27.— *Si K désigne un corps et $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ est un automorphisme d'ordre extérieur*[2] $\omega_{\text{ext}}(\sigma) = n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*, alors*

$$Z(K(t,\sigma)) = \begin{cases} Z(K)^\sigma(c_\sigma^{-1}t^n) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \sigma^n = I(c_\sigma^{-1}) \text{ (avec } c_\sigma \in Z(K)^\sigma) \\ Z(K)^\sigma & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

qui découle des propriétés établies au chapitre 2 de [Coh]. En particulier si $o(\sigma) = \omega_{\text{ext}}(\sigma) = n$, alors $Z(K(t,\sigma)) = Z(K)^\sigma(t^n)$ avec la convention $t^\infty = 1$.

Corps de fractions en cascade à indéterminées commutant. Un cas particulier de corps de fractions tordu en cascade est celui où les indéterminées commutent : on se donne une suite $(\sigma_n)_n$ d'éléments de $\mathrm{Aut}(K)$ et l'on suppose que $\sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_n$. Chaque σ_m se relève de manière unique à $H_0 = K(t_0,\sigma_0)$ en posant $\sigma_m(t_0) = t_0$, car pour tout $a \in K$, on a

$$\sigma_m(t_0a) = t_0\sigma_m(a) = \sigma_0 \circ \sigma_m(a)t_0 = \sigma_m \circ \sigma_0(a)t_0 = \sigma_m(a)t_0 = \sigma_m \circ \sigma_0(a)\sigma_m(t_0) = \sigma_m(\sigma_0(a)t_0)$$

Il est alors clair que chaque σ_m laisse stable R_0 et l'on peut, en particulier, considérer $H_1 = H_0(t_1,\sigma_1)$ et $R_1 = R_0[t_1,\sigma_1]$. Par récurrence, puisque les σ_n commutent entre eux, on peut relever chaque σ_m au corps H_n et considérer $H_{n+1} = H_n(t_{n+1},\sigma_{n+1})$ et $R_{n+1} = R_n[t_{n+1},\sigma_{n+1}]$ pour appliquer la construction précédente. On constate que les σ_m se relèvent, *in fine*, en des automorphismes de H et de R et que $t_it_j = t_jt_i$ pour tout $i,j \geqslant 0$. On en déduit que

$$R_n = K[t_{s(0)},\sigma_{s(0)}][t_{s(1)},\sigma_{s(1)}]\cdots[t_{s(n)},\sigma_{s(n)}]$$

$$H_n = K(t_{s(0)},\sigma_{s(0)})(t_{s(1)},\sigma_{s(1)})\cdots(t_{s(n)},\sigma_{s(n)})$$

pour n'importe quelle permutation $s \in S_n$. En tant que K-espace vectoriel à gauche, R a pour base les monômes $\prod_n t_k^{i_k}$ où $(i_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une suite presque partout nulle. Le produit est alors défini par les relations

- $\prod_n t_k^{i_k}.\prod_n t_k^{j_k} = \prod_n t_k^{i_k+j_k}$
- $\forall a \in K,\ \left(\prod_n t_k^{i_k}\right).a = (\sigma_0^{i_0} \circ \sigma_1^{i_1} \circ \cdots)(a).\prod_n t_k^{i_k}$

Pour ce qui est du centre, on va avoir, par le lemme 26, une expression sous la forme

$$k_m = Z(H_m) = Z(K)^{<\sigma_0,\cdots,\sigma_m>}(c_0t_0^{i_0}, c_1(t_0)t_1^{i_1},\cdots,c_m(t_0,\cdots,t_{m-1})t_m^{i_m})$$

avec $c_i \in H_{i-1}$ et $i_k = \omega_{\text{ext}}(\sigma_k)$ lorsque l'on considère σ_k comme automorphisme de H_{k-1}. Le lemme 27 montre alors que

$$Z(H) = Z(K)^{<\sigma_0,\sigma_1,\cdots>}(c_0t_0^{i_0}, c_1(t_0)t_1^{i_1},\cdots)$$

La difficulté pour calculer $Z(H)$ consiste à évaluer $\omega_{\text{ext}}(\sigma_k)$ sur H_{k-1} puisque, bien sûr, $\omega_{\text{ext}}(\sigma_k)$ varie en fonction du corps H_i sur lequel on regarde σ_k, et à calculer les c_i. La description du centre dépend, en fait, intimement de la nature du sous-groupe engendré par les σ_m sur K. Donnons un premier exemple où celle-ci est simple : on suppose que, pour tout $m \geqslant 0$, on ait

$$(*)\ <\sigma_m> \cap <\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{m-1}\} \cup I(K)>= 1$$

[2]L'ordre extérieur d'un automorphisme σ est l'ordre $\omega_{\text{ext}}(\sigma)$ de son image par l'épimorphisme $\mathrm{Aut}(K) \longrightarrow \mathrm{Ext}(K) = \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$. Lorsque $\omega_{\text{ext}}(\sigma)$ est fini, c'est ainsi le plus petit entier $n > 0$ tel que σ^n soit un automorphisme intérieur.

Avec cette condition, on a simplement

$$k_m = Z(H_m) = Z(K)^{<\sigma_0,\cdots,\sigma_m>}(t_0^{i_0},\cdots,t_m^{i_m})$$

où i_k désigne l'ordre de σ_k (avec la convention $t_k^\infty = 1$). En effet, pour $m = 0$ puisque $<\sigma_0> \cap I(K) = 1$, l'ordre extérieur $\omega_{\text{ext}}(\sigma_0)$ de σ_0 vaut précisément i_0 et le lemme 27 montre qu'alors $Z(K(t_0,\sigma_0) = Z(K)^{\sigma_0}(t_0^{i_0})$. Supposons la propriété vrai au rang $m \geqslant 0$, alors au rang $m+1$, il convient d'évaluer $\omega_{\text{ext}}(\sigma_{m+1})$ lorsque σ_{m+1} est vu comme élément de $\text{Aut}(H_m)$. Si $r \geqslant 0$ est tel que $\sigma_{m+1}^r \in \text{Int}(H_m)$, disons $\sigma_{m+1}^r = I(f_m)$ avec $f_m \in H_m^*$, alors en plongeant $H_m = H_{m-1}(t_m,\sigma_m)$ dans $H_{m-1}((t_m,\sigma_m))$ et en écrivant $f_m = \sum \lambda_j t_m^j$, on a que, pour tout $a \in H$, $\sigma_{m+1}^r(a).f_m = f_m.a$, c'est-à-dire que

$$\sum \sigma_{m+1}^r(a)\lambda_j t_m^j = \lambda_j \sigma_m^j(a) t_m^j$$

Il existe donc $f_{m-1} \in H_{m-1}$ et $j_m \in \mathbb{Z}$ tels que sur K, on ait $\sigma_{m+1}^r \circ \sigma_m^{j_m} = I(f_{m-1})$. En réitérant le procédé, on construit donc une suite $j_m, j_{m-1},\cdots,j_0$ d'entiers tels que, sur K, $\sigma_{m+1}^r \circ \sigma_m^{j_m}\cdots\sigma_0^{j_0} = I(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in K$. Il s'ensuit que $\sigma_{m+1}^r \in <\{\sigma_0,\cdots,\sigma_m\} \cup I(K)>$ et donc, d'après $(*)$, que $i_{m+1}|r$. Il s'ensuit que $\omega_{\text{ext}}(\sigma_{m+1}) = i_{m+1}$ et, par suite que,

$$k_{m+1} = Z(H_m)^{\sigma_{m+1}}(t_{m+1}^{i_{m+1}}) = Z(K)^{<\sigma_0,\cdots,\sigma_{m+1}>}(t_0^{i_0},\cdots,t_{m+1}^{i_{m+1}})$$

On peut alors appliquer le lemme 26 :

$$\bigcap_{m\geqslant n} k_m = \bigcap_{m\geqslant n} Z(K)^{<\sigma_0,\cdots,\sigma_m>}(t_0^{i_0},\cdots,t_m^{i_m}) = Z(K)^{<\sigma_0,\sigma_1,\cdots>}(t_0^{i_0},\cdots,t_n^{i_n})$$

et donc

$$Z(H) = \bigcup_{n\geqslant 0} Z(K)^{<\sigma_0,\sigma_1,\cdots>}(t_0^{i_0},\cdots,t_n^{i_n}) = Z(K)^{<\sigma_0,\sigma_1,\cdots>}(t_0^{i_0},t_1^{i_1},\cdots)$$

A l'exact opposé de la condition $(*)$, considérons le cas où, pour tout $n \geqslant 0$, $\sigma_n = \sigma$ avec $\omega_{\text{ext}}(\sigma) = o(\sigma) = r$. On a $Z(H_0) = Z(K(t_0,\sigma_0) = Z(K)^\sigma(t_0^r)$, mais comme $\sigma_1 = \sigma_0$, on a $\sigma_1 = I(t_0)$ sur H_0 et donc, par application du lemme 27, on trouve que $Z(H_1) = Z(K)^\sigma(t_0^r, t_0^{-1}t_1)$. Une récurrence immédiate montre que $Z(H_m) = Z(K)^\sigma(t_0^r, t_0^{-1}t_1,\cdots,t_0^{-1}t_m)$ et le lemme 26 prouve finalement que

$$Z(H) = Z(K)^\sigma(t_0^r, t_0^{-1}t_1, t_0^{-1}t_2,\cdots)$$

Un exemple d'endomorphisme de corps ne laissant pas stable le centre. On considère un corps commutatif k et le corps de fractions rationnelles $K = k(x_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ en une infinité de variables. Pour tout $n \geqslant 0$, on considère un k-automorphisme σ, non trivial et d'ordre fini, du corps des fractions rationnelles en une variable $k(x)$. On note $f \in k(x)$ un élément tel que $k(f) = k(x)^\sigma$ et $G = \text{Gal}(k(x)/k(f(x)))$ le groupe de Galois (fini) de l'extension.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on peut relever σ en un automorphisme $\sigma_n \in \text{Aut}(K)$ en le faisant agir juste sur la variable x_n, de sorte que le groupe de Galois $\text{Gal}(k(x_m)_{m\in\mathbb{Z}}/k(x_m, f(x_n))_{m\neq n})$ s'identifie canoniquement à G. Le sous-corps de K fixé par l'ensemble des σ_n est le corps $K^\Gamma = k(\cdots,x_{-1},f(x_0),f(x_1),\cdots)$. Puisque que chaque x_n est visiblement algébrique sur K^Γ, on constate que l'extension K/K^Γ est algébrique galoisienne de groupe de Galois $\Gamma = G^{\mathbb{N}}$.

On considère maintenant l'élément $\alpha \in \text{Aut}(K)$ défini par $\alpha(x_m) = x_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ (décalage des variables). Cet automorphisme n'engendre rien d'algébrique puisque visiblement $K^{<\alpha>} = k$, nonobstant le sous-groupe engendré par α et Γ se décrit simplement en constatant que,

- $\forall n, m \geqslant 0,\ \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_n$
- $\forall n \geqslant 0,\ \sigma_{n+1} = \alpha \circ \sigma_n \circ \alpha^{-1}$

si bien que, dans $\mathrm{Aut}(K)$, la conjugaison par α induit un endomorphisme de Γ qui eſt non surjeſtif (ce qui empêche de voir ce sous-groupe comme un produit semi-direct). Le dernier point à observer dans cette situation eſt que

$$K^\Gamma = k(\cdots, x_{-1}, f(x_0), f(x_1), \cdots) \subsetneq k(\cdots, x_{-1}, x_0, f(x_1), \cdots) = \alpha(K^\Gamma)$$

puisque, σ étant non trivial, on a visiblement $x_0 \notin K^\Gamma$. Ainsi, α fait ſtrictement "grossir" le sous-corps K^Γ.

On considère alors $H = K(t_0, t_1, \cdots; \sigma_0, \sigma_1, \cdots)$, le corps de fractions en cascade à indéterminées commutant. Comme les σ_n vérifient visiblement la propriété $(*)$ du § précédent, on a

$$Z(H) = k(\cdots, x_{-1}, f(x_0), f(x_1), \cdots)(t_0^r, t_1^r, \cdots)$$

où $r = o(\sigma)$. On peut étendre l'automorphisme α de K en un endomorphisme du K-anneau $R = K[t_0, t_1, \cdots; \sigma_0, \sigma_1, \cdots]$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $\alpha(t_n) = t_{n+1}$. Cette définition eſt licite car, par tout $a \in K$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\left(\prod_n t_k^{i_k}\right).a\right) &= \alpha\left((\sigma_0^{i_0} \circ \sigma_1^{i_1} \circ \cdots)(a).\prod_n t_k^{i_k}\right) = (\alpha \circ \sigma_0^{i_0} \circ \sigma_1^{i_1} \circ \cdots)(a) \prod_n t_{k+1}^{i_k} \\
&= ((\alpha \circ \sigma_0^{i_0} \circ \alpha^{-1}) \circ (\alpha \circ \sigma_1^{i_1} \circ \alpha^{-1}) \circ \cdots) \circ \alpha(a) \prod_n t_{k+1}^{i_k} = (\sigma_1^{i_0} \circ \sigma_2^{i_1} \circ \cdots) \circ \alpha(a) \prod_n t_{k+1}^{i_k} \\
&= \prod_n t_{k+1}^{i_k}.\alpha(a) = \alpha\left(\prod_n t_k^{i_k}\right).\alpha(a)
\end{aligned}$$

Puisque R eſt un anneau de Ore de corps de fractions H, α s'étend de manière unique en un endomorphisme de H. On conſtate qu'alors

$$\alpha(Z(H)) = k(\cdots, x_{-1}, x_0, f(x_1), \cdots)(t_1^r, t_2^r, \cdots) \not\subset Z(H)$$

puisque $x_0 \notin Z(H)$.

Bibliographie

[Coh] Paul Moritz Cohn, *Skew fields. Theory of general division rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57. Cambridge University Press, Cambridge, (1995). xvi + 500 pp

[Des] Bruno Deschamps, *Quelques considérations galoisiennes relatives à l'extension des conſtantes d'un corps de fractions tordu*, Expositiones Mathematicae, 43-3 (2025)

Bruno Deschamps
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139
Université de Caen - Normandie
BP 5186, 14032 Caen Cedex - France

Département de Mathématiques
Le Mans Université
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr