

Le corps des séries de Puiseux généralisées

par

BRUNO DESCHAMPS (Saint-Etienne)

1. Corps des séries de Puiseux. Si K désigne un corps commutatif, le corps $K(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K est un corps valué, par la valuation usuelle associée aux polynômes (valuation associée au premier X). On sait qu'alors $K(X)$ n'est pas un corps complet et que son complété est le corps $K((X))$ des séries de Laurent. $K((X))$ est alors muni d'une valuation discrète ν qui étend la valuation de $K(X)$. On définit $\nu(\sum_{k \geq k_0} a_k X^k) = k_0$ (pour $a_{k_0} \neq 0$).

Pour tout entier $n \neq 0$, on pose $K_n = K((X_n))$ (corps de séries de Laurent en la variable X_n). Pour tout couple d'entiers (n, m) tel que n divise m (disons $m = an$), on définit l'application $\varphi_{n,m} : K_n \rightarrow K_m$ de la manière suivante : à une série $\sum_{k \geq k_0} a_k X_n^k$ on associe la série $\sum_{k \geq k_0} a_k X_m^{ak}$. Les applications $\varphi_{n,m}$ sont clairement des homomorphismes de corps et la donnée des K_n et des $\varphi_{n,m}$ forme visiblement un système inductif.

Pour $n = 1$, on note plus simplement $K((X_1)) = K((X))$. Il apparaît alors que le corps K_n est un corps de rupture du polynôme $P(T) = T^n - X$ sur $K((X))$, de même si $m = an$, alors K_m est un corps de rupture du polynôme $P(T) = T^a - X$ sur K_n . Ceci justifie alors la notation $X_n = X^{1/n}$ que nous emploierons désormais. Les corps K_n sont donc des extensions finies de $K((X))$. On définit alors :

DÉFINITION. On appelle *corps des séries de Puiseux* à coefficients dans K le corps noté $\text{Puis}(K)$ obtenu en prenant la limite inductive du système de corps et d'homomorphismes $(K_n, \varphi_{n,m})$.

Ainsi, le corps $\text{Puis}(K)$ est une extension algébrique de $K((X))$. Par ailleurs, $\text{Puis}(K)$ possède une unique valuation qui prolonge celle de $K((X))$ (puisque $K((X))$ est complet à valuation discrète). Nous continuerons à noter cette valuation ν . Si $\sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n}$ désigne une série de Puiseux ($a_{k_0} \neq 0$), on a alors $\nu(\sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n}) = k_0/n$. Le corps résiduel de $\text{Puis}(K)$

est alors K . Notons que ν n'est plus discrète. Dans cet article, pour tout corps k , on notera \bar{k} la clôture algébrique k . L'intérêt premier de l'étude de $\text{Puis}(K)$ vient du théorème suivant (voir [Ser]) :

THÉORÈME. *Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, alors*

$$\overline{K((X))} = \text{Puis}(K).$$

Une ombre persiste tout de même au tableau :

PROPOSITION 1. *$\text{Puis}(K)$ n'est jamais un corps complet pour ν .*

Preuve. En effet, la suite $S_n(X) = \sum_{k=1}^n X^{k+1/k}$ de séries de Puiseux est visiblement de Cauchy. Supposons que $(S_n)_n$ converge dans $\text{Puis}(K)$, disons vers $S = \sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n_0}$. Considérons un nombre premier p ne divisant pas n_0 ; alors $\nu(S - S_n) \leq (p^2 + 1)/p$ pour tout $n \geq p$, ce qui rend impossible le fait que $\lim_n \nu(S - S_n) = +\infty$. ■

On veut donc compléter $\text{Puis}(K)$. Pour cela, on va généraliser le corps des séries de Puiseux.

2. Corps des séries de Puiseux généralisées

2.1. Construction. On considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(\alpha_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} > \alpha_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty\}$$

des suites de rationnels strictement croissantes et tendant vers $+\infty$.

On considère aussi les deux ensembles suivants :

$$\mathcal{O} = \{P \subset \mathbb{Q} : P \text{ sans point d'accumulation, } \inf(P) \in \mathbb{R}, \sup(P) = +\infty\}$$

et

$$\mathcal{O}' = \{P \subset \mathbb{Q} : \#P = +\infty \text{ et } \forall A \in \mathbb{R}, \#(]-\infty, A[\cap P) < +\infty\}.$$

Soit alors $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (\alpha_n)_n \in \mathcal{A}, \quad \Delta((\alpha_n)_n) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Les deux lemmes qui suivent sont des conséquences immédiates du théorème de Bolzano-Weierstrass :

LEMME 1. $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ et Δ est une bijection de \mathcal{A} sur \mathcal{O} .

LEMME 2. L'ensemble \mathcal{O} est stable par réunions finies.

De même, pour la somme, on a :

LEMME 3. Soit $P_1, P_2 \in \mathcal{O}$, alors

$$P_1 + P_2 = \{x + y : x \in P_1, y \in P_2\} \in \mathcal{O}.$$

Sur \mathcal{A} , on définit une loi de composition interne $+$ de la manière suivante :

$$(\alpha_n)_n + (\beta_n)_n = \Delta^{-1}(\Delta((\alpha_n)_n) + \Delta((\beta_n)_n)).$$

De plus, on définit une relation binaire \leq de la manière suivante :

$$\forall (\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathcal{A}, \quad (\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n \Leftrightarrow \Delta((\alpha_n)_n) \subset \Delta((\beta_n)_n).$$

LEMME 4. *L'ensemble (\mathcal{A}, \leq) est un ensemble ordonné, réticulé supérieurement (donc en particulier filtrant à droite).*

Preuve. La relation \leq est clairement réflexive et transitive, le fait qu'elle soit antisymétrique provient de l'injectivité de Δ .

Soient $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux éléments de \mathcal{A} ; alors la suite

$$(\gamma_n)_n = \Delta^{-1}(\Delta((\alpha_n)_n) \cup \Delta((\beta_n)_n))$$

est clairement la borne supérieure dans \mathcal{A} de la partie $\{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n\}$. ■

Pour une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} = \{(u_{\alpha_n})_n \in K^{\mathbb{N}}\}.$$

C'est l'ensemble des suites d'éléments de K indicées par la suite $(\alpha_n)_n$. Dans la suite on notera un élément $(u_{\alpha_n})_n \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ de la manière suivante :

$$\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}.$$

Soient $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux éléments de \mathcal{A} tels que $(\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n$. On définit une application $\Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n} : \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} \rightarrow \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$ en posant

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n} \left(\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \right) = \sum_{m \geq 0} u_{\beta_m} X^{\beta_m}$$

avec

$$u_{\beta_m} = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq \beta_m, \\ u_{\alpha_n} & \text{si } \alpha_n = \beta_m. \end{cases}$$

(Cette application est bien définie car si pour un indice $m \in \mathbb{N}$ donné, il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n = \beta_m$ alors, à cause de la stricte croissance de $(\alpha_n)_n$, cet indice est unique pour cette propriété.)

LEMME 5. *Le système d'ensembles et d'applications*

$$\{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n}\}_{\mathcal{A}}$$

est un système inductif.

Preuve. On a établi que (\mathcal{A}, \leq) était un ensemble filtrant à droite. Il est clair que pour tout $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$, $\Phi_{(\alpha_n)_n, (\alpha_n)_n} = \text{id}_{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}}$.

Soit $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ trois éléments de \mathcal{A} tels que $(\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n \leq (\gamma_n)_n$. Posons

$$S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n},$$

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n}(S) = \sum_{m \geq 0} v_{\beta_m} X^{\beta_m} = S',$$

$$\Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S') = \sum_{k \geq 0} w_{\gamma_k} X^{\gamma_k},$$

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \sum_{k \geq 0} w'_{\gamma_k} X^{\gamma_k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; deux situations se présentent alors :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq \gamma_k$. Dans ces conditions, $w'_{\gamma_k} = 0$.

1.1) $\forall m \in \mathbb{N}, \beta_m \neq \gamma_k$. Alors $w_{\gamma_k} = 0$.

1.2) $\beta_{m_0} = \gamma_k$. Dans cette situation on a nécessairement $\alpha_n \neq \beta_{m_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $w_{\gamma_k} = v_{\beta_{m_0}} = 0$.

2) $\alpha_{n_0} = \gamma_k$. Dans ces conditions $w'_{\gamma_k} = u_{\alpha_{n_0}}$. Mais alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_{m_0} = \alpha_{n_0}$ et donc $v_{\beta_{m_0}} = u_{\alpha_{n_0}}$ et comme $\beta_{m_0} = \gamma_k$, on a $w_{\gamma_k} = u_{\alpha_{n_0}} = w'_{\gamma_k}$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $w_{\gamma_k} = w'_{\gamma_k}$, donc

$$\Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n} \circ \Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n} = \Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}.$$

Le système est bien inductif. ■

On pose alors $\Omega = \varinjlim (\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n})_{\mathcal{A}}$. Rappelons que Ω est l'ensemble quotient $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} / \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la relation d'équivalence suivante : $S \mathcal{R} S'$ (avec $S \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$) si et seulement s'il existe $(\gamma_n)_n \in \mathcal{A}$ majorant $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ tel que

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S').$$

LEMME 6. Soit $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $S' = \sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$ deux éléments de $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $S \mathcal{R} S'$.

(ii) $\forall r \in \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\beta_n)_n), u_r = v_r; \forall r \in \Delta((\alpha_n)_n) - \Delta((\beta_n)_n), u_r = 0$ et $\forall r \in \Delta((\beta_n)_n) - \Delta((\alpha_n)_n), v_r = 0$.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) : Soit $(\gamma_n)_n \in \mathcal{A}$ une suite telle que $\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S')$. Posons

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \sum_{n \geq 0} w_{\gamma_n} X^{\gamma_n} = \Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S').$$

Si $r \in \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\beta_n)_n)$, alors $u_r = w_r = v_r$. Si maintenant $r \in \Delta((\alpha_n)_n) - \Delta((\beta_n)_n)$, alors $u_r = w_r = 0$ car il n'existe pas d'indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_n = r$.

(ii) \Rightarrow (i) : Si (ii) est satisfait, il est alors clair que

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S')$$

pour $(\gamma_n)_n = \sup((\alpha_n)_n, (\beta_n)_n)$. ■

REMARQUE. On a alors les propriétés suivantes :

- Un élément de Ω a au maximum un représentant dans chaque $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$.
- Si $x \in \Omega$ a un représentant dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, alors x a un représentant dans $\mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$ pour tout $(\beta_n)_n \geq (\alpha_n)_n$.
- Si un élément x de Ω possède un représentant $\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ tel que la suite $(u_{\alpha_n})_n$ ne soit pas nulle à partir d'un certain rang, alors x possède un représentant (unique) $\sum_{n \geq 0} u_{\beta_n} X^{\beta_n}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\beta_n} \neq 0$ (on a alors $(\beta_n)_n \leq (\alpha_n)_n$) ce représentant s'appelle alors le "représentant canonique de x ".
- Si un élément $x \in \Omega$ possède un représentant canonique dans $\mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$, alors la suite $(\gamma_n)_n$ est un plus petit élément dans l'ensemble des suites $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ telles que x admette un représentant dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$.

Dans la suite, si $S \in \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on notera \bar{S} la classe de S dans Ω .

• Sur $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on définit une loi de composition interne $+$ de la manière suivante : si $S \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$, alors en posant

$$(\gamma_n)_n = \sup((\alpha_n)_n, (\beta_n)_n),$$

$$\Phi_{(\alpha_n)_n, (\gamma_n)_n}(S) = \sum_{n \geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}, \quad \Phi_{(\beta_n)_n, (\gamma_n)_n}(S') = \sum_{n \geq 0} v_{\gamma_n} X^{\gamma_n},$$

on définit

$$S + S' = \sum_{n \geq 0} (u_{\gamma_n} + v_{\gamma_n}) X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}.$$

• Sur $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on définit aussi une autre loi de composition interne : si $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' = \sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n} \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$, alors en posant $(\gamma_n)_n = (\alpha_n)_n + (\beta_n)_n$, on définit

$$S \cdot S' = \sum_{n \geq 0} W_{\gamma_n} X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$$

avec

$$W_{\gamma_n} = \sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma_n} u_{\alpha_i} v_{\beta_j}$$

(cette dernière somme étant visiblement finie).

LEMME 7. Si $S, S', T, T' \in \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ sont tels que $\bar{S} = \bar{S}'$ et $\bar{T} = \bar{T}'$, alors

$$\overline{S + T} = \overline{S' + T'} \quad \text{et} \quad \overline{S \cdot T} = \overline{S' \cdot T'}.$$

Preuve. A cause de l'évidente commutativité des lois $+$ et \cdot , la proposition énoncée dans ce lemme équivaut à $\overline{S + T} = \overline{S' + T}$ et $\overline{S \cdot T} = \overline{S' \cdot T}$.

Posons $S + T = \sum_{n \geq 0} (u_{\gamma_n} + v_{\gamma_n}) X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$ et $S' + T = \sum_{n \geq 0} (u'_{\delta_n} + v'_{\delta_n}) X^{\delta_n} \in \mathcal{A}_{(\delta_n)_n}$. On sait que les séries $\sum_{n \geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $\sum_{n \geq 0} u'_{\delta_n} X^{\delta_n}$ sont en relation ainsi que les séries $\sum_{n \geq 0} v_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $\sum_{n \geq 0} v'_{\delta_n} X^{\delta_n}$. Considérons

deux indices n_0 et n_1 tels que $\gamma_{n_0} = \delta_{n_1}$; alors $u_{\gamma_{n_0}} = u'_{\delta_{n_1}}$ et $v_{\gamma_{n_0}} = v'_{\delta_{n_1}}$, donc $u_{\gamma_{n_0}} + v_{\gamma_{n_0}} = u'_{\delta_{n_1}} + v'_{\delta_{n_1}}$.

Soit maintenant $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_{n_0} \neq \delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors $u_{\gamma_{n_0}} = 0$ et $v_{\gamma_{n_0}} = 0$, c'est-à-dire $u_{\gamma_{n_0}} + v_{\gamma_{n_0}} = 0$. Les séries $S + T$ et $S' + T$ sont bien en relation.

Soient $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $S' = \sum_{n \geq 0} u'_{\alpha'_n} X^{\alpha'_n}$ et $T = \sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$. Posons $S \cdot T = \sum_{n \geq 0} w_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ avec $w_{\gamma_n} = \sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma_n} u_{\alpha_i} v_{\beta_j}$ et $S' \cdot T = \sum_{n \geq 0} w'_{\gamma'_n} X^{\gamma'_n}$ avec $w'_{\gamma'_n} = \sum_{\alpha'_i + \beta_j = \gamma'_n} u'_{\alpha'_i} v_{\beta_j}$. Soit un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma'_n \neq \gamma_{n_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prenons des indices $i_0 \in \mathbb{N}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_{i_0} + \beta_{j_0} = \gamma_{n_0}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha'_i \neq \alpha_{i_0}$ car sinon il existerait $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma'_n = \alpha'_i + \beta_{j_0} = \alpha_{i_0} + \beta_{j_0} = \gamma_{n_0}$. Ainsi, $u_{\alpha_{i_0}} = 0$ et par suite $w_{\gamma_{n_0}} = \sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma_{n_0}} u_{\alpha_i} v_{\beta_j} = 0$.

Soient maintenant deux indices n_0 et n_1 tels que $\gamma_{n_0} = \gamma'_{n_1} = \omega$. Posons $R = \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\alpha'_n)_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} w_{\gamma_{n_0}} &= \sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma_{n_0}} u_{\alpha_i} v_{\beta_j} = \sum_{r + \beta_j = \omega, r \in R} u_r v_{\beta_j} \\ &= \sum_{r + \beta_j = \omega, r \in R} u'_r v_{\beta_j} = \sum_{\alpha'_i + \beta_j = \omega} u'_{\alpha'_i} v_{\beta_j} \\ &= \sum_{\alpha'_i + \beta_j = \gamma'_{n_1}} u'_{\alpha'_i} v_{\beta_j} = w'_{\gamma'_{n_1}}. \end{aligned}$$

Les séries $S \cdot T$ et $S' \cdot T$ sont bien équivalentes. ■

On vient donc d'établir que les lois $+$ et \cdot sont compatibles avec \mathcal{R} . Elles définissent donc des lois de compositions internes sur Ω . On a alors :

PROPOSITION-DÉFINITION. *L'ensemble $(\Omega, +, \cdot)$ est un corps commutatif que l'on appelle corps des séries de Puiseux généralisées. On le note $\widetilde{\text{Puis}}(K)$.*

Preuve. • $(\Omega, +)$ est un groupe abélien. Ce fait vient immédiatement de la structure de groupe abélien de $(K, +)$, le neutre étant par exemple représenté par la série $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$ où $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• *La loi \cdot est associative.* Soient R, S, T trois éléments de Ω . On choisit un $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ tel que $R = \sum_{n \geq 0} r_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $S = \sum_{n \geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $T = \sum_{n \geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$. Soit $(\gamma_n)_n = (\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n$. On a alors (après calcul)

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\alpha_p + \alpha_q + \alpha_h = \gamma_n} r_{\alpha_p} s_{\alpha_q} t_{\alpha_h} \right) X^{\gamma_n}.$$

• *La loi \cdot est commutative.* C'est évident.

• La série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n X^n$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = 0$ pour $n \geq 1$ représente visiblement un neutre de (Ω, \cdot) .

• *Inversibilité.* Soit $S \in \Omega$ non nul; on écrit $S = X^r \cdot T$ avec $T = \sum_{n \geq 0} t_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $\gamma_0 = 0$ et $t_{\gamma_0} \neq 0$.

Il existe une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ telle que $(\gamma_n)_n \leq (\alpha_n)_n$ et telle que $(\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n = (\alpha_n)_n$. En effet si l'on pose $P = \Delta((\gamma_n)_n)$ et pour tout $n > 0$, $nP = P + \dots + P$, alors la partie $Q = \bigcup_n nP$ est minorée par 0 et n'est pas majorée. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = E(\varepsilon/\gamma_1) + 1$. Si $n \geq N$ et si $x_1 + \dots + x_n$ désigne une somme de n éléments de P dont aucun n'est nul, alors $x_1 + \dots + x_n > \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $n \geq N$, $nP \cap]-\infty, \varepsilon[= NP \cap]-\infty, \varepsilon[$ et par suite $Q \cap]-\infty, \varepsilon[$ est fini (lemme 3). Donc $Q \in \mathcal{O}$ et $(\alpha_n)_n = \Delta^{-1}(Q)$ vérifie bien $(\gamma_n)_n \leq (\alpha_n)_n$ et $(\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n = (\alpha_n)_n$. Notons qu'alors $\alpha_0 = 0$.

Inverser S revient à inverser T . On choisit un représentant

$$T = \sum_{n \geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$$

de T dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ (on a $t_{\gamma_0} = t_{\alpha_0} \neq 0$) et l'on pose

$$V = \sum_{n \geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n},$$

où la suite $(s_{\alpha_n})_n$ est définie de la manière suivante :

$$s_{\alpha_0} = t_{\alpha_0}^{-1}; \quad \forall n > 0, \quad s_{\alpha_n} = -t_{\alpha_0}^{-1} \sum_{\alpha_i + \alpha_j = \alpha_n, j \neq n} t_{\alpha_i} s_{\alpha_j}.$$

On a alors

$$\left(\sum_{n \geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\alpha_i + \alpha_j = \alpha_n} t_{\alpha_i} s_{\alpha_j} \right) X^{\alpha_n}.$$

Cette dernière série vaut 1 par construction et donc T est inversible.

• *La loi \cdot est distributive par rapport à $+$.* C'est immédiat. ■

2.2. Propriétés

LEMME 8. L'application $\nu : \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie par

$$\nu \left(\sum_{n \geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n} \right) = \begin{cases} \inf \{ \gamma_i : u_{\gamma_i} \neq 0 \} & \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{\gamma_{n_0}} \neq 0, \\ \infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, u_{\gamma_n} = 0, \end{cases}$$

passé au quotient (i.e. si $S \mathcal{R} S'$ alors $\nu(S) = \nu(S')$).

Preuve. Soient $\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$. Le lemme 6 affirme alors que $\{r \in \mathbb{Q} : u_r \neq 0\} = \{r \in \mathbb{Q} : v_r \neq 0\} = E$. On a alors

$$\nu \left(\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \right) = \nu \left(\sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n} \right) = \min(E). \quad \blacksquare$$

Ainsi ν définit une application de $\widetilde{\text{Puis}}(K) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que nous continuerons à noter ν .

THÉORÈME 1. *Le corps $\widetilde{\text{Puis}}(K)$ est une extension du corps $\text{Puis}(K)$. L'application ν est une valuation réelle qui étend la valuation naturelle de $\text{Puis}(K)$.*

L'anneau de la valuation ν est l'anneau des "séries entières de Puiseux généralisées", constitué des séries de Puiseux généralisées admettant un représentant de la forme $\sum_{n \geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$, où $(\gamma_n)_n$ vérifie $\gamma_0 \geq 0$.

Le corps résiduel de $\widetilde{\text{Puis}}(K)$ pour ν est le corps K .

Preuve. Considérons le sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ constitué des suites $(\alpha_n)_n$ de la forme

$$\alpha_n = \frac{n - a}{n_0}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le sous-système d'ensembles et d'applications $\{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n}\}_{\mathcal{B}}$ est le même que celui qui nous a permis de définir, dans la partie 1, le corps $\text{Puis}(K)$. D'où, par passage au quotient, l'extension $\widetilde{\text{Puis}}(K)/\text{Puis}(K)$.

Il est clair que pour tout $S \in \widetilde{\text{Puis}}(K)$, $\nu(S) = \infty \Leftrightarrow S = 0$. Soient maintenant S et T dans $\widetilde{\text{Puis}}(K)$; si l'on choisit pour représentant de S et T des séries $\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n \geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$ telles que $u_{\alpha_0} \neq 0$ et $v_{\beta_0} \neq 0$, alors $\nu(ST) = \alpha_0 + \beta_0 = \nu(S) + \nu(T)$.

Si l'on choisit maintenant pour représentant de S et T des séries $\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n \geq 0} v_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, on a

$$\begin{aligned} \nu(S + T) &= \min(\alpha_n : u_{\alpha_n} + v_{\alpha_n} \neq 0) \\ &\geq \inf(\min(\alpha_n : u_{\alpha_n} \neq 0); \min(\alpha_n : v_{\alpha_n} \neq 0)) \\ &= \inf(\nu(S), \nu(T)), \end{aligned}$$

ce qui assure que ν est une valuation réelle sur $\widetilde{\text{Puis}}(K)$. Il est clair que la restriction de ν à $\text{Puis}(K)$ est bien la valuation usuelle.

Notons A_ν l'anneau de la valuation ν et M_ν l'idéal de la valuation. Les éléments de A_ν (resp. M_ν) admettent tous des représentants de la forme $\sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ tels que $\alpha_0 = 0$ (resp. $\alpha_0 = 0$ et $u_{\alpha_0} = 0$). Remarquons qu'alors K se plonge dans A_ν/M_ν et que si $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in A_\nu$ ($\alpha_0 = 0$), alors $S - x \in M_\nu$ avec $x = u_{\alpha_0} \in K$ et donc que $A_\nu/M_\nu = K$. ■

THÉORÈME 2. *Le corps valué $(\widetilde{\text{Puis}}(K), \nu)$ est complet; c'est le complété de $\text{Puis}(K)$ pour la valuation usuelle.*

Preuve. $\widetilde{\text{Puis}}(K)$ est complet pour ν . En effet, soit $(S_l)_l$ une suite de Cauchy dans $\text{Puis}(K)$. Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, on associe à S_l son représentant canonique $S_l = \sum_{n \geq 0} u_{l_n} X^{l_n}$. Soit $H \in \mathbb{Z}$; il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq h$, $\nu(S_l - S_h) \geq H$. Soit alors $n_H = \sup\{n \in \mathbb{N} : l_n \leq H \text{ et } h_n \leq H\}$; on a, pour tout $n = 0, \dots, n_H$, $l_n = h_n$ et $u_{l_n} = u_{h_n}$. Comme $\lim_{H \rightarrow +\infty} n_H = +\infty$, on obtient alors une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ et une suite

$(u_{\alpha_n})_n$ d'éléments de K telles que si $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, alors pour tout $l \geq h$, $\nu(S - S_l) \geq H$. Ainsi $(S_l)_l$ converge vers S .

Pour toute série $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, il existe une suite de séries de Puiseux $(S_n)_n$ qui converge vers S . En effet, il suffit de considérer pour n donné la série (finie) $S_n = \sum_{k=0}^n u_{\alpha_k} X^{\alpha_k}$. Il est clair que (avec les notations de la partie 1)

$$S_n \in K_{\text{p.p.c.m. des dénominateurs des } \alpha_k} \subset \text{Puis}(K).$$

La suite $(S_n)_n$ converge bien vers S , car $\nu(S - S_n) \geq \alpha_{n+1} \rightarrow +\infty$. ■

Rappelons (voir [Ami]) que si (C, ν) est un corps valué algébriquement clos, alors son complété (\widetilde{C}, ν) est algébriquement clos. Par ailleurs, si (K, ν) est un corps local alors il existe une unique valuation sur \overline{K} qui prolonge ν . On en déduit donc que si (K, ν) est un corps valué et que ν est discrète, alors le plus petit corps complet et algébriquement clos (ce que nous appellerons "la fermeture" de K) est le corps $(\widetilde{\overline{K}}, \nu)$ où ν est une valuation définie sans équivoque d'après ce qui précède.

Appliquons ces quelques remarques au corps $\overline{K}(X)$ où \overline{K} désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On a alors $\widetilde{\overline{K}(X)} = \overline{K}(\overline{(X)})$ et (cf. [Ser]), $\overline{K}(\overline{(X)}) = \text{Puis}(\overline{K})$. D'après l'étude menée précédemment, on en déduit que la fermeture de $\overline{K}(X)$ est le corps $\text{Puis}(\overline{K})$.

REMARQUE. Cette construction est analogue à celle des corps \mathbb{C}_p (l'analogie identifiant le corps $K(X)$ au corps \mathbb{Q}). Bien évidemment, cette analogie, en termes arithmétiques, est moins saisissante que celle entre $\mathbb{F}_p(T)$ et \mathbb{Q} .

Quand K n'est pas algébriquement clos (mais reste de caractéristique 0), on ne peut pas conclure immédiatement car, dans ce cas, $\overline{K}(\overline{(X)})$ n'est pas un corps de séries de Puiseux (voir [Des] et le théorème suivant). On a pourtant :

THÉORÈME 3. *Si K désigne un corps de caractéristique nulle, la fermeture de $K(\overline{(X)})$ est égale à $\text{Puis}(\overline{K})$.*

Preuve. On commence par établir le résultat suivant :

LEMME 9. *Soit K un corps de caractéristique 0. La clôture algébrique de $K(\overline{(X)})$ est le corps $\bigcup_{L/K \text{ finie}} \text{Puis}(L)$.*

Preuve. Le corps $\text{Puis}(\overline{K})$ est algébriquement clos et contient $K(\overline{(X)})$. Soit alors $S = \sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n_0}$ une série de Puiseux algébrique sur $K(\overline{(X)})$. Supposons que le corps $L = K(a_k)_k$ soit de dimension infinie sur K . Soit I l'ensemble des K -isomorphismes de L . Comme K est de caractéristique nulle, L/K est séparable et par suite $\#I = +\infty$. Soit $\sigma \in I$; σ se relève en un $K(\overline{(X)})$ -automorphisme de $\text{Puis}(\overline{K})$ par action sur les coefficients des séries

de Puiseux. Mais alors, si σ, τ sont deux éléments distincts de I remontés à $\text{Puis}(\overline{K})$, on a $\sigma(S) \neq \tau(S)$ car la famille $(a_k)_k$ engendre L sur K . Ainsi S possède une infinité de conjugués, ce qui est absurde.

Réciproquement, si L/K est finie, alors $\text{Puis}(L)/\text{Puis}(K)$ est finie ; on a d'ailleurs $[\text{Puis}(L) : \text{Puis}(K)] = [L : K]$. Comme $\text{Puis}(K)/K((X))$ est une extension algébrique, on en déduit que $\text{Puis}(L)/K((X))$ en est une aussi. ■

Revenons à la preuve du théorème 3. On sait que $\widetilde{\text{Puis}}(\overline{K})$ est un corps complet et algébriquement clos. Pour prouver le théorème, il suffit alors de montrer que $\widetilde{\text{Puis}}(\overline{K})$ est contenu dans le complété du corps $\bigcup_{L/K \text{ finie}} \text{Puis}(L)$.

Soit $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in \widetilde{\text{Puis}}(\overline{K})$; la suite $S_n = \sum_{k=0}^n u_{\alpha_k} X^{\alpha_k}$ vérifie bien $\lim_n S_n = S$ et, par ailleurs, $S_n \in \text{Puis}(L)$ avec

$$L = K(u_{\alpha_0}, \dots, u_{\alpha_n})$$

qui est un corps de dimension fini sur K . Ceci achève la preuve. ■

En paraphrasant N. Koblitz (cf. [Kob]) qui parlait des corps \mathbb{C}_p , nous concluerons en disant que $\widetilde{\text{Puis}}(\overline{K})$ est *un merveilleux royaume où vit l'analyse de $K((X))$* .

Références

- [Ami] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Presses Univ. France, 1975.
- [Des] B. Deschamps, *Clôture totalement réelle des corps de nombres ordonnables*, Manuscripta Math. 100 (1999), 277–289.
- [Kob] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*, Springer, 1996.
- [Ser] J. P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1968.

Equipe de théorie des nombres
 Faculté des sciences et techniques
 Université Jean Monnet
 23 rue du docteur Paul Michelon
 42023 Saint-Etienne, Cedex 2, France
 E-mail: Bruno.Deschamps@univ-st-etienne.fr

Reçu le 6.12.1999
 et révisé le 29.5.2000

(3721)