

A propos d'un théorème de Frobenius

Bruno Deschamps

Résumé

In this article, we describe all noncommutative fields of finite dimension over a given algebraically closed field. As an application, we give an example of field of finite dimension over \mathbb{R} which is not isomorphic to \mathbb{R} , \mathbb{C} or \mathbb{H} . This result completes the Frobenius's theorem on the subject.

Dans cet article, nous décrivons les corps gauches de dimension finie sur un corps algébriquement clos donné. En application, nous donnons un exemple de corps de dimension finie sur \mathbb{R} qui n'est pas isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} . Ceci vient compléter le théorème de Frobenius sur le sujet.

1 Introduction

En 1878, Frobenius publie le théorème suivant:

Théorème 1.1 *Soit K un corps de dimension finie sur \mathbb{R} et contenant \mathbb{R} dans son centre (une \mathbb{R} -algèbre de dimension finie). Le corps K est isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} (corps des quaternions d'Hamilton).*

On pourra trouver dans [2] une preuve élémentaire (i.e. ne faisant pas intervenir d'arguments cohomologiques) de ce théorème. Aujourd'hui, ce résultat s'interprète de manière cohomologique. Les corps gauches de dimension finie sur \mathbb{R} , contenant \mathbb{R} dans leur centre, correspondent aux éléments des groupes de Brauer des extensions finies de \mathbb{R} , c'est-à-dire aux éléments de $Br(\mathbb{R})$ et de $Br(\mathbb{C})$. Le corps \mathbb{C} étant algébriquement clos, est cohomologiquement trivial. on a donc $Br(\mathbb{C}) = 1$, cet élément correspondant au corps \mathbb{C} . Pour ce qui est de $Br(\mathbb{R})$, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, ses éléments correspondant aux corps \mathbb{R} et \mathbb{H} .

Ce théorème de Frobenius pourrait laisser penser que l'on a réglé le problème de la détermination des corps de dimension finie sur \mathbb{C} en affirmant qu'il n'y a qu'un seul corps de dimension finie au dessus de \mathbb{C} : le corps des quaternions d'Hamilton \mathbb{H} . Pourtant il n'en est rien, car l'hypothèse de centralité est fondamentale dans ce théorème. L'objet de cet article est de montrer le résultat suivant:

Théorème principal *Soit \overline{K} un corps commutatif et algébriquement clos. Soit F un surcorps de \overline{K} non commutatif tel que la dimension (droite ou gauche) de F sur \overline{K} soit finie. Il existe un sous-corps réel clos r de \overline{K} tel que M soit isomorphe au corps \mathbb{H}_r des quaternions à coefficients dans r .*

et d'étendre ce résultat au cas des corps réels clos (par exemple au cas de \mathbb{R}), ce qui permet de donner une parfaite description (corollaire 2.4) des corps gauches de dimension finie sur ces corps. Dans le cas de \mathbb{R} , nous donnons (corollaire 2.3) un exemple de corps gauche de dimension finie sur \mathbb{R} qui n'est pas isomorphe à \mathbb{H} .

On rappelle qu'un corps est dit réel clos s'il est ordonné et s'il ne possède aucune extension algébrique ordonnable stricte. Quand on parle de sous-corps réel clos r de \overline{K} , on entend par là un sous-corps réel clos tel que \overline{K}/r soit finie. La théorie d'Artin-Schreier montre que ces sous-corps correspondent exactement aux corps r tel que $[\overline{K} : r] = 2$ (pour toutes les références concernant la théorie d'Artin-Schreier, mentionnées dans cette article, nous renvoyons le lecteur à [3]). On rappelle aussi que le corps des quaternions à coefficients dans r est le r -espace vectoriel de dimension 4, muni d'une base $\{1, i, j, k\}$ et du produit défini par la table

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

(On a alors $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$).

2 Preuve du théorème principal et conséquences

Nous allons commencer par établir le lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.1 *Soit K un corps, $F = Z(K)$ son centre et D un sous-corps commutatif de K . Si $\dim_D K < +\infty$ (dimension droite ou gauche), alors $\dim_F K < +\infty$.*

PREUVE: Pour montrer le lemme, on peut supposer que D est un sous-corps commutatif maximal, ce qui assure alors que $F \subset D$ (puisque $F.D$ est alors un sous-corps commutatif de K contenant D). On considère K comme D -espace vectoriel gauche (la démonstration s'adaptant au cas de la structure droite d'elle-même). Considérons le D -espace vectoriel (gauche) $K \otimes_F D$, la loi de composition externe étant définie par

$$\alpha.(k \otimes d) = k \otimes \alpha d$$

pour tout $\alpha \in D$ et $k \otimes d \in K \otimes_F D$. Il est clair que $\dim_F K = \dim_D K \otimes_F D$, puisque, pour toute F -base $(e_i)_i$ de K , la famille $(e_i \otimes 1)_i$ constitue une D -base de $K \otimes_F D$. Les F -algèbres K et D sont simples et comme $F = Z(K)$, on sait que la F -algèbre $K \otimes_F D$ est simple (voir, par exemple, le théorème II.3. de [1]). Soit maintenant $E(K)$ le D -espace vectoriel (gauche) des D -endomorphismes de K . Posons

$$\begin{aligned} K_d &= \{T_k / k \in K, T_k : x \mapsto xk\} \\ D_g &= \{L_a / a \in D, L_a : x \mapsto ax\} \end{aligned}$$

Clairement, tous les éléments de K_d et D_g sont dans $E(K)$. Considérons alors l'application $\Theta : K \otimes_F D \rightarrow E(K)$ définie par :

$$\Theta \left(\sum k_i \otimes a_i \right) = \sum T_{a_i} L_{k_i}$$

Puisque tout élément de K_d commute avec tout élément de D_g , l'application Θ est visiblement un morphisme non nul de F -algèbres. Comme $K \otimes_F D$ est simple, Θ est donc injectif. Par ailleurs, Θ est aussi un morphisme de D -espace vectoriel. On en déduit donc que $\dim_D K \otimes_F D \leq \dim_D E(K) = (\dim_D K)^2$ et, par suite, que $\dim_F K$ est finie. \square

Preuve du théorème principal : Soit $K = \overline{K}$ un corps commutatif algébriquement clos et L/K une extension de dimension finie avec L non commutatif. D'après le lemme précédent, si F désigne le centre de L , $\dim_F L < +\infty$. Comme K est algébriquement clos, c'est un sous-corps commutatif maximal de L et donc $F \subset K$. Comme $[K : F] < +\infty$, la théorie d'Artin-Schreier

assure alors que $F = K$ ou que F est un sous-corps réel clos de K . Le cas $F = K$ est à exclure car le groupe de Brauer d'un corps algébriquement clos étant nul, il n'existe aucun corps gauche de centre un corps algébriquement clos et de dimension finie sur son centre. Le corps F est donc un sous-corps réel clos de K et le groupe de Brauer de F , vaut $Br(F) = \mathbb{Z}/2$. En effet, la théorie d'Artin-Schreier assure que $\bar{F} = F(\sqrt{-1})$ et que K/F est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/2$. La suite exacte

$$1 \longrightarrow H^2(K/F) \longrightarrow Br(F) \longrightarrow Br(K)$$

montre (compte-tenu du fait qu'ici $Br(K) = 1$) que $Br(F) = H^2(K/F)$. Par ailleurs, $H^2(K/F) \simeq \frac{F^*}{F^{*2} + F^{*2}}$ (Voir [4]). Les corps réels clos étant pythagoriciens (i.e. $F^2 = F^2 + F^2$) et vérifiant $K = F^2 \cup -F^2$, on a alors

$$Br(F) \simeq \frac{F^*}{F^{*2}} \simeq \mathbb{Z}/2$$

Le corps L correspond donc à l'élément non trivial de $Br(F) = \mathbb{Z}/2$ qui, lui, correspond au corps \mathbb{H}_F . Réciproquement pour tout sous-corps réel clos r de K , \mathbb{H}_r est bien un corps gauche de dimension finie sur K . Ceci achève la preuve du théorème.

Corollaire 2.1 *Si K est un corps commutatif de caractéristique $p > 0$, alors \bar{K} ne possède aucun surcorps non trivial.*

PREUVE: C'est une application immédiate du théorème principal en remarquant qu'un corps réel clos est nécessairement de caractéristique 0. \square

Corollaire 2.2 *Si K est un corps de caractéristique 0 alors il y a une bijection entre les classes d'isomorphismes de surcorps non triviaux de \bar{K} et les classes d'isomorphismes de sous-corps réels clos de \bar{K} . En particulier, il n'y a qu'un seul surcorps gauche (à isomorphisme près) non trivial de $\bar{\mathbb{Q}}$.*

PREUVE: On sait que les surcorps non triviaux de \bar{K} sont les \mathbb{H}_r avec r corps réels clos de \bar{K} . Si r et r' sont deux corps réels clos isomorphes, alors par construction, \mathbb{H}_r et $\mathbb{H}_{r'}$ sont isomorphes. Réciproquement, si \mathbb{H}_r et $\mathbb{H}_{r'}$ sont isomorphes alors tout isomorphisme entre ces deux corps induit un isomorphisme entre leurs centres respectifs, donc r et r' sont isomorphes.

Pour le cas $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}}$, il faut donc montrer qu'il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme de corps réels clos. Un théorème de la théorie d'Artin-Schreier assure que si R_1 et R_2 sont deux corps réels clos, extensions algébriques ordonnées d'un même corps ordonné (K, \leq) (i.e. les ordres sur R_1 et R_2 étendent \leq) alors il existe un K -isomorphisme (unique) de R_1 sur R_2 . On remarque alors que comme \mathbb{Q} ne possède qu'un seul ordre compatible, tout sous-corps réel clos de $\overline{\mathbb{Q}}$ est une extension algébrique ordonnée de \mathbb{Q} pour cet ordre. Tout les corps réels clos de $\overline{\mathbb{Q}}$ sont donc isomorphes. \square

Remarque: Dans le cas de $\overline{\mathbb{Q}}$, il y a donc une seule classe d'isomorphisme de corps réel clos. Ce n'est pas le cas de \mathbb{C} , comme le montre la construction suivante :

Considérons un corps (K, \leq) ordonné, $K[X]$ son anneau de polynômes et $K(X)$ son corps de fractions rationnelles. Pour $P \in K[X]$, on note $\omega(P)$ le coefficient dominant de P (on convient que $\omega(0) = 0$). Soient R_1 et R_2 deux éléments de $K(X)$ que l'on écrit $R_1 = P_1/Q_1$ et $R_2 = P_2/Q_2$ avec $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in K[X]$ et Q_1, Q_2 unitaires. On pose :

$$R_1 \leq_o R_2 \iff \omega(P_2Q_1 - P_1Q_2) \geq 0$$

On vérifie, sans mal, que \leq_o est un ordre total qui confère à $K(X)$ la structure de corps ordonné. Considérons maintenant $\mathbb{Q}(X_i)_{i \in I}$ une extension transcendante pure maximale de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} (notons qu'alors $\#I = 2^{\aleph_0}$). Fixons un $i_0 \in I$ quelconque et considérons le corps $K = \mathbb{Q}(X_i)_{i \neq i_0}$ qui étant inclus dans \mathbb{R} reçoit de ce dernier un ordre compatible que nous noterons \leq . Munissons alors $L = \mathbb{Q}(X_i)_{i \in I} = K(X_{i_0})$ de l'ordre \leq_o décrit précédemment. L est un corps ordonné dont \mathbb{C} est la clôture algébrique, par hypothèse de maximalité de l'extension transcendante pure. Considérons alors R une extension algébrique ordonnée maximale de L dans \mathbb{C} . Le corps R est alors réel clos, la théorie d'Artin-Schreier affirme alors que R possède un unique ordre compatible. Le corps R n'est alors pas isomorphe à \mathbb{R} . En effet, s'il existait un isomorphisme σ de R sur \mathbb{R} , comme ces deux corps admettent chacun un unique ordre compatible, σ transférerait l'ordre de R sur celui de \mathbb{R} . Or dans R , il existe un élément (par exemple X_{i_0}) qui est plus grand que tout rationnel, ce qui n'est le cas d'aucun élément de \mathbb{R} , d'où l'impossibilité. En fait, \mathbb{R} est un corps archimédien alors que R ne l'est pas.

Corollaire 2.3 *Il existe des corps H de dimension finie sur \mathbb{R} qui ne sont isomorphes ni à \mathbb{R} , ni à \mathbb{C} , ni à \mathbb{H} .*

PREUVE: C'est une conséquence immédiate de la remarque précédente. \square

Corollaire 2.4 *Soit R un corps réel clos et H un corps non commutatif de dimension finie sur R . Alors H est isomorphe à un corps de quaternions à coefficients dans un corps réel clos R' de \overline{R} . En particulier, les extensions de R sont de degré 1, 2 ou 4.*

PREUVE: Soit F le centre de H . Si $F \subset R$, alors R/F est finie donc $F = R$ et par suite $H \simeq \mathbb{H}_R$. Si ce n'est pas le cas, alors $K = R.F$ est un sous-corps commutatif de H qui contient R sans lui être égal. C'est donc une extension algébrique stricte de R ce qui montre, puisque R est réel clos, que $K = \overline{K} = \overline{R} = R(\sqrt{-1})$. Le théorème principal assure alors qu'il existe R' sous-corps réel clos de \overline{R} tel que $H \simeq \mathbb{H}_{R'}$. \square

Références

- [1] A. Blanchard. *Les corps non commutatifs*. P.U.F., Paris, 1972.
- [2] B. Deschamps. *Problèmes d'arithmétique des corps et de théorie Galois*. Hermann, Paris, 1998.
- [3] P. Ribenboim. *L'arithmétique des corps*. Hermann, Paris, 1970.
- [4] J.P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968.

BRUNO DESCHAMPS
 FACULTÉ DES SCIENCES ET TECH-
 NIQUES, UNIVERSITÉ JEAN MONNET
 L.A.R.AL
 23 RUE DU DOCTEUR PAUL MICHELON
 42023 SAINT-ETIENNE CEDEX 2
 FRANCE
 Bruno.Deschamps@univ-st-etienne.fr