Indices dans $\mathrm{Br}(\mathbb{R}((x))((y)))$

1.— Introduction.

Etant donné un corps commutatif k de groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ et un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$, on appelle indice de α l'entier noté $d = \mathrm{Ind}(\alpha)$ et défini par les trois manières équivalentes suivantes :

i) $d = \sqrt{\min\{[\mathfrak{A} : k] / \ \mathfrak{A} \in \alpha\}}$,

ii) $d = \sqrt{[K : k]}$ où K est le corps gauche relatif à la classe d'algèbres simples centrales α,

iii) d est le degré minimal sur k (pour le relation de divisibilité) d'une extension neutralisante de α.

Il est célèbre que l'ordre d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$ est un diviseur de son indice. On a en fait un encadrement :

Proposition.— *Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$ un élément d'ordre n et d'indice d. Si on note $\mathrm{rad}(d)$ le radical de l'entier d (i.e. le produit des nombres premiers qui le divisent), on a alors*

$$\mathrm{rad}(d) | n | d$$

Preuve : Considérons une extension galoisienne neutralisante L/k de groupe G. On sait que $[L : k]$ est un multiple de d. Soit alors un nombre premier p qui divise d et G_p un p-Sylow de G. Notons L_p le corps des invariants de L par G_p. Le corps L_p n'est certainement pas une extension neutralisante de α car si c'était le cas, $[L_p : k]$ serait multiple de d, or, par définition, $[L_p : k]$ est premier à p. Considérons le morphisme naturel

$$\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Br}(L_p)$$

et notons $n^{'}$ l'ordre de $\theta(\alpha)$. On vient de voir que $n^{'} \neq 1$, mais maintenant comme L est neutralisante pour α elle l'est aussi pour $\theta(\alpha)$ et donc, comme $n^{'}$ est un diviseur de $\mathrm{Ind}(\theta(\alpha))$ et que cet entier est lui-même un diviseur de $[L : L_p]$, on en déduit que $n^{'} = p^h$ (pour un certain entier $h \geq 1$). Maintenant, comme θ est un morphisme, on a $n^{'} | n$ et, par suite, on a bien $p | n$.

Cet encadrement (fort pratique pour déterminer l'ordre d'un élément d'un groupe de Brauer quand son indice est radicalaire!) ouvre un certain nombre de questions relatives au rapport qui existe entre n et d. Par exemple :

Question 1.— Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que pour tout corps k et tout élément $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$ d'ordre n et d'indice d on ait $d | f(n)$ (ou même plus simplement $d \leq f(n)$)?

Question 2.— Etant donné un entier $d \geq 1$ et un entier $n \geq 1$ tels que $\mathrm{rad}(d)|n|d$, existe-t-il un corps k et un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$ d'ordre n et d'indice d?

Question 3.— Existe-t-il un corps k tel que, pour tout entier $d \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$ tels que $\mathrm{rad}(d)|n|d$, il existe un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$ d'ordre n et d'indice d? (question 2 uniforme).

2.— Un exemple où l'indice diffère de l'ordre.

Notations.

- k un corps commutatif de caractéristique nulle.
- N la norme d'une extension donnée.
- $(1+\mathfrak{M}_k)$ le groupe des unités principales de $k((T))$.

Lemme 1.— *Soit L/k une extension quadratique et $G = \{Id, c\}$ son groupe de Galois. Le groupe de cohomologie galoisienne $H^2(L/k)$ est biunivoquement décrit par la famille de 2-cocyles*

	Id	c
Id	1	1
c	1	ω

où les ω parcourent une classe de représentants du groupe quotient $\dfrac{k^*}{N(L^*)}$.

Preuve : Il s'agit là d'un calcul très classique que nous ne détaillons pas.

Lemme 2.— *Soit L/k une extension de degré n. Le groupe de la norme, $N(L((T))^*)$ de l'extension $L((T))/k((T))$ est isomorphe au produit*

$$N(L^*) \times n\mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_k)$$

En conséquence de quoi, le groupe quotient $\dfrac{k((T))^*}{N(L((T))^*)}$ s'identifie au produit $\dfrac{k^*}{N(L^*)} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Preuve : On peut écrire tout élément $S = a_i T^i + a_{i+1}T^{i+1} + \cdots \in L((T))^*$, de valuation $i \in \mathbb{Z}$, sous la forme unique

$$S = a_i T^i S_0$$

où $S_0 \in (1+\mathfrak{M}_L)$. On en déduit que $L((T))^*$ s'identifie au produit $L^* \times \mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_L)$. Le passage à la norme donne donc, facteur par facteur,

$$N(L^*) \times n\mathbb{Z} \times N(1+\mathfrak{M}_L)$$

Il faut donc montrer que $N(1+\mathfrak{M}_L) = (1+\mathfrak{M}_k)$. Mais comme $1^n = 1$, tout élément de $(1+\mathfrak{M}_k)$ admet une racine n-ème et donc, on a déjà $N(1+\mathfrak{M}_k) = (1+\mathfrak{M}_k)$.

La décomposition $L((T))^* \simeq L^* \times \mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_L)$ s'envoie facteur par facteur, par la norme, sur la décomposition $N(L((T))^*) \simeq N(L^*) \times n\mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_k)$ et donc par passage au quotient, on obtient

$$\frac{k((T))^*}{N(L((T))^*)} \simeq \frac{k^* \times \mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_k)}{N(L^*) \times n\mathbb{Z} \times (1+\mathfrak{M}_k)} \simeq \frac{k^*}{N(L^*)} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Une classe de représentants dans $k((T))^*$ du facteur $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ étant donc $\{1, T, \cdots, T^{n-1}\}$.

Lemme 3.— *Soit $S = a_0T^n + a_1T^{n+1} + \cdots \in k((T))$, on a l'équivalence*

$$S \in k((T))^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} n = v(S) \in 2\mathbb{Z} \\ a_0 \in k^2 \end{cases}$$

Preuve : Immédiat.

Lemme 4.— *Soit $\alpha \in k$, le groupe quotient $\dfrac{k((T))^*}{N(k((\sqrt{\alpha T}))^*)}$ s'identifie canoniquement au quotient $\dfrac{k^*}{k^{*2}}$.*

Preuve : Si $S = S_0 + S_1\sqrt{\alpha x}$ avec $S_0, S_1 \in k((x))$, on a $N(S) = S_0^2 - \alpha x S_1(x)$. On en déduit, grace au lemme précédent que pour une série $s \in k((x))$, on a

$$s \in N(k((\sqrt{\alpha x}))^* \Longleftrightarrow \begin{cases} v(s) \in 2\mathbb{Z} \text{ et } a_0 \in k^2 \\ \text{ou} \\ v(s) \notin 2\mathbb{Z} \text{ et } a_0 \in -\alpha k^2 \end{cases}$$

On en déduit que la restriction de la surjection $k((x))^* \longrightarrow \dfrac{k((x))^*}{N(k((\sqrt{\alpha x}))^*)}$ au sous-groupe k^* est surjective. En effet, si a_0 désigne le premier terme non nul d'une série $s \in k((x))^*$ alors si $v(s)$ est paire (resp. impaire) alors a_0 (resp. $-a_0/\alpha$) a même image que s par la surjection. Maintenant, comme $N(k((\sqrt{\alpha x}))^* \cap k^* = k^{*2}$, on déduit de la suite exacte

$$1 \longrightarrow N(k((\sqrt{\alpha x}))^*) \longrightarrow k((x))^* \longrightarrow \frac{k((x))^*}{N(k((\sqrt{\alpha x}))^*)} \longrightarrow 1$$

la suite exacte

$$1 \longrightarrow k^{*2} \longrightarrow k^* \longrightarrow \frac{k((x))^*}{N(k((\sqrt{\alpha x}))^*)} \longrightarrow 1$$

Lemme 5.— *Le groupe de Galois absolu de $\mathbb{R}((x))((y))$ est isomorphe au produit semi-direct $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \ltimes \left(\widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{Z}}\right)$. Il est librement engendré par trois involutions. En conséquence de quoi,*

1/ On a $\mathrm{Br}\,(\mathbb{R}((x))((y))) \simeq \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^4$.

2/ Le corps $\mathbb{R}((x))((y))$ possède exactement 7 extensions quadratiques qui sont les corps

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{C}((x))((y)) & \mathbb{R}((\sqrt{\pm x}))((y)) & & \mathbb{R}((x))((\sqrt{\pm y})) & \mathbb{R}((x))((\sqrt{\pm xy})) \\
& & \mathbb{R}((x))((y)) \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

corps que nous noterons dans la suite K_i pour $i = 1, \cdots, 7$.

Preuve : On trouvera dans [D] une preuve de la première partie de ce lemme ainsi que de la propriété 1/. Pour le 2/ il suffit de constater que Γ, le groupe de Galois absolu de $\mathbb{R}((x))((y))$, étant librement engendré par trois involutions c_0, c_1, c_2, les morphismes $\Gamma \longrightarrow \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ correspondent aux applications $\{c_0, c_1, c_2\} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ qui sont au nombre de 8. Il y en a 7 qui sont surjectives et qui fournissent les corps énoncés.

Les éléments non triviaux de $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$ sont donc tous d'ordre 2 (lemme 5). Si un élément de $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$ est d'indice 2 alors il possède un corps neutralisant de degré 2 sur $\mathbb{R}((x))((y))$ et ce corps est donc un des K_i.

Réciproquement, un élément de $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$, neutralisé par K_i pour un certain $i = 1, \cdots, 7$, est un élément de $H^2\Big(K_i/\mathbb{R}((x))((y))\Big)$. Nous allons dans la suite calculer explicitement des $H^2\Big(K_i/\mathbb{R}((x))((y))\Big)$ et montrer que

$$\bigcup_{i=1}^{7} H^2\Big(K_i/\mathbb{R}((x))((y))\Big) \neq \mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$$

ce qui prouvera que $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$ possède des éléments d'indice au moins 4.

Dans un soucis de lisibilité, nous noterons plus simplement dans les calculs qui vont suivre $H^2(K_i)$ à la place de $H^2\Big(K_i/\mathbb{R}((x))((y))\Big)$.

- **Calcul de** $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$.

On applique les lemmes 1 et 2 :

$$\begin{aligned} H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big) &\simeq \frac{\mathbb{R}((x))((y))^*}{N(\mathbb{C}((x))((y))^*)} \simeq \frac{\mathbb{R}((x))^*}{N(\mathbb{C}((x))^*)} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\ &\simeq \frac{\mathbb{R}^*}{N(\mathbb{C}^*)} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{R}^*}{\mathbb{R}^{*2}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\ &\simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Ce qui fournit 8 éléments de $\mathrm{Br}\left(\mathbb{R}((x))((y))\right)$.

- **Calcul de** $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$.

On applique les lemmes 1, 2 et 4 :

$$\begin{aligned} H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big) &\simeq \frac{\mathbb{R}((x))((y))^*}{N(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))^*)} \simeq \frac{\mathbb{R}((x))^*}{N(\mathbb{R}((\sqrt{x}))^*)} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\ &\simeq \frac{\mathbb{R}^*}{\mathbb{R}^{*2}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Ceci donne donc quatre éléments $D_1, \cdots, D_4$ de $\mathrm{Br}\left(\mathbb{R}((x))((y))\right)$ que nous allons examiner de plus près. Une classe de représentants de $\dfrac{\mathbb{R}((x))((y))^*}{N(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))^*)}$ est, par exemple, $\{\pm 1, \pm y\}$.

1) Pour l'élément -1, le corps C correspondant est un $\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$-espace vectoriel gauche de dimension 2 (de base formelle le groupe de Galois $G = \{Id, c\}$) et dont

le produit est donné par

$$(S.Id + T.c)(S^{'}.Id + T^{'}.c) = (SS^{'} - TT^{'c}).Id + (ST^{'} + TS^{'c}).c$$

Ceci assure en particulier que $c^2 = -1$ et donc que $\sqrt{-1} \in D$. On en déduit que le corps $\mathbb{C}((x))((y))$ est un sous-corps de D, qui est neutralisant pour des raisons de dimension. Ainsi, la classe du corps C correspondant à l'élément -1 figure déjà dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$.

2) Pour l'élément y, le le corps C correspondant est un $\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$-espace vectoriel gauche de dimension 2 (de base formelle le groupe de Galois $G = \{Id, c\}$) et dont le produit est donné par

$$(S.Id + T.c)(S^{'}.Id + T^{'}.c) = (SS^{'} + TT^{'c}y).Id + (ST^{'} + TS^{'c}).c$$

La classe de C figure dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$ si et seulement si il existe un élément dans C de carré égal à -1, c'est-à-dire si et seulement si il existe $S, T \in \mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$ tels que

$$\begin{cases} S^2 + TT^c y = -1 \\ ST + TS^c = 0 \end{cases}$$

Les valuations y-adiques de S^2 est paire et celle de $TT^c y$ est impaire, on en déduit donc que S est de valuation nulle et que sont terme constant a_0 vérifie $a_0^2 = -1$. Autrement dit, sous ces hypothèses, -1 serait un carré dans $\mathbb{R}((\sqrt{x}))$, ce qui est absurde.

3) Pour l'élément $-y$ on arrive, de même, à la conclusion que la classe associée ne figure pas dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$.

En résumé, sur les quatre éléments donnés par $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$, deux figurent déjà dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$ et deux autres sont nouveaux.

• **Calcul de** $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))\Big)$.

Le même raisonnement que précédemment montre que

$$H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))\Big) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

Une classe de représentants de $\dfrac{\mathbb{R}((x))((y))^*}{N(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))^*)}$ est toujours $\{\pm 1, \pm y\}$.

1) Pour l'élément -1, la classe du corps C correspondant est déjà représentée dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y)))$.

2) Pour l'élément y, le corps C correspondant est un $\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$-espace vectoriel gauche de dimension 2 (de base formelle le groupe de Galois $G = \{Id, c\}$) et dont le produit est donné par

$$(S.Id + T.c)(S^{'}.Id + T^{'}.c) = (SS^{'} + TT^{'c}y).Id + (ST^{'} + TS^{'c}).c$$

Pour les même raisons que dans le cas de $\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$, la classe de C ne figure pas dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$. Regardons maintenant si elle figure dans $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$. C'est le cas si et seulement si il existe un élément dans C de carré égal à x, c'est-à-dire si et seulement si il existe $S, T \in \mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$ tels que

$$\begin{cases} S^2 + TT^c y = x \\ ST + TS^c = 0 \end{cases}$$

En raisonnant à nouveau sur les valuations y-adiques de S^2 et de $TT^c y$, on voit que l'existence d'une solution à ce système impliquerait que x soit un carré dans $\mathbb{R}((\sqrt{-x}))$, ce qui impliquerait alors que -1 soit un carré dans $\mathbb{R}((\sqrt{-x}))$. Ceci étant absurde, on en déduit que la classe de C ne figure pas non plus dans $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$.

3) Pour l'élément $-y$, on montre exactement de la même facon que la classe du corps C correspondant ne figure ni dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big)$ ni dans $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$.

En résumé, sur les quatre éléments donnés par $H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$ seulement deux ne figurent pas dans $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big)$.

• **Calcul de** $H^2\Big(\mathbb{R}((x))((\sqrt{y}))\Big)$.

On applique les lemmes 1 et 2 :

$$H^2\Big(\mathbb{R}((x))((\sqrt{y}))\Big) \simeq \frac{\mathbb{R}((x))((y))^*}{N(\mathbb{R}((x))((\sqrt{y}))^*)} \simeq \frac{\mathbb{R}((x))^*}{\mathbb{R}((x))^{*2}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

Ceci donne donc quatre éléments $D_1, \cdots, D_4$ de $\mathrm{Br}\,(\mathbb{R}((x))((y)))$ que nous allons examiner de plus près. Une classe de représentants de $\dfrac{\mathbb{R}((x))^*}{\mathbb{R}((x))^{*2}}$ est, par exemple, $\{\pm 1, \pm x\}$. Pour $\omega \in \{\pm 1, \pm x\}$ fixé, le corps D_i correspondant est un $\mathbb{R}((x))((\sqrt{y}))$-espace vectoriel gauche de dimension 2 (de base formelle le groupe de Galois $G = \{Id, c\}$) et dont le produit est donné par

$$(S.Id + T.c)(S^{'}.Id + T^{'}.c) = (SS^{'} + \omega T\overline{T^{'}}).Id + (ST^{'} + T\overline{S^{'}}).c$$

On en déduit que $c^2 = \omega$ et donc que $\sqrt{\omega} \in D_i$. Maintenant, pour $\omega \neq 1$, on a $\sqrt{\omega} \notin \mathbb{R}((x))((y))$. Ainsi, le corps $\Omega = \mathbb{R}((x))((y))(\sqrt{\omega})$ est une extension commutative de degré 2 et puisque D_i est un corps de dimension 4, on en déduit qu'il s'agit d'une extension neutralisante de D_i. On a

ω	Ω
-1	$\mathbb{C}((x))((y))$
x	$\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))$
$-x$	$\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))$

et donc tous les D_i sont représentés dans la réunion $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))\Big)$.

• **Calcul de** $H^2\Big(\mathbb{R}((x))((\sqrt{-y}))\Big)$, $H^2\Big(\mathbb{R}((x))((\sqrt{\pm xy}))\Big)$.

Le même calcul que précédemment montre que chacun de ces H^2 contient quatre éléments et que chacun de ces éléments figurent déjà dans la réunion $H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))\Big)$.

———

On déduit de l'étude précédente que

$$\bigcup_{i=1}^{7} H^2\Big(K_i\Big) = H^2\Big(\mathbb{C}((x))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y))\Big) \cup H^2\Big(\mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y))\Big)$$

et que cette réunion compte exactement $8+2+2=12$ éléments. Il existe donc exactement quatre éléments de $\mathrm{Br}\,(\mathbb{R}((x))((y)))$ qui sont d'ordre 2 et d'indice $\neq 2$.

En fait, le indice des ces quatre éléments est exactement 4. Pour montrer ce dernier résultat, il suffit d'exhiber pour chacun d'eux un corps neutralisant de degré 4 sur $\mathbb{R}((x))((y)))$. Cette propriété est en fait obtenue uniformément pour le corps $\mathbb{C}((\sqrt{x}))((y)))$. En effet, on le treillis d'extensions

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}((\sqrt{x}))((y)) & \\
\mathbb{R}((\sqrt{x}))((y)) \arrow[ur] & \mathbb{C}((x))((y)) \arrow[u] & \mathbb{R}((\sqrt{-x}))((y)) \arrow[ul] \\
& \mathbb{R}((x))((y)) \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et donc le noyau N de l'application $\mathrm{Br}(\mathbb{R}((x))((y))) \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{C}(\sqrt{x}))((y)))$ contient les douze éléments d'indice 2 de $\mathrm{Br}(\mathbb{R}((x))((y)))$. Maintenant, l'ordre de N divise l'ordre de $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$ qui vaut 16 et donc $N=\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$. Ainsi, $\mathbb{C}((\sqrt{x}))((y)))$ neutralisent tous les éléments de $\mathrm{Br}\Big(\mathbb{R}((x))((y))\Big)$.

Bibliographie

[D] Bruno Deschamps, *Clôture totalement réelle des corps de nombres ordonnables*, Manuscripta Mathematica 100, 291-304 (1999).