Calcul Intégral

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Cours de Licence 2 — Maths/Phy-Chi/E2I — 2015/2016

Bruno Deschamps

Version 1.0

« Pour chaque problème complexe, il existe une solution simple, directe… et fausse ».

Table des matières

1 Intégrale de Riemann

1.1 Introduction

On cherche à donner un sens à la notion "d'aire". Plus précisément, on se donne une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et continue sur un intervalle I et pour tout $a, b \in I$, $a \leq b$, on veut introduire une quantité réelle qui mesurerait intuitivement l'aire (algébrique) comprise entre la courbe $y = f(x)$ pour $x \in [a,b]$ et l'axe des abscisses.

Si l'on note Aire(f,a,b) cette quantité, l'idée intuitive que l'on se fait de l'aire nous pousse à considérer les propriétés suivantes :

(P_1) Si f est constante égale à $\lambda \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$, alors Aire$(f,a,b) = \lambda(b-a)$ (aire d'un rectangle).

(P_2) Si $c \in [a,b]$ alors Aire$(f,a,b) =$ Aire$(f,a,c)+$ Aire(f,c,b).

(P_3) Si $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors Aire$(\lambda f + g, a, b) = \lambda$Aire$(f,a,b)+$ Aire(g,a,b).

(P_4) Si $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ sont telles que $f \leq g$, alors Aire$(f,a,b) \leq$ Aire(g,a,b).

On peut montrer qu'étant donné deux réels $a \leq b$, il existe une unique application $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à une fonction f associe Aire(f,a,b) et qui vérifie les propriétés (P_1), (P_2), (P_3) et (P_4). La quantité Aire(f,a,b) s'appelle l'intégrale de Riemann de la fonction f sur le segment $[a,b]$ et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

La définition de l'intégrale sur $[a,b]$ demande à ce que $a \leq b$. Il est pratique de convenir que lorsque $b \leq a$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Avec cette convention, les propriétés fondamentales de l'intégrale s'énonce de la manière suivante : soient I un intervalle, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(P_1) Pour tous $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$.

(P_2) Pour tous $a, b, c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).

(P_3) Pour tous $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(P_4) Pour tous $a, b \in I$, si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ si $a \leq b$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ si $a \geq b$.

Corollaire 1.— *Soient $a \leq b$. Pour toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve : Pour tout $x \in [a,b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ et donc, $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, ce qui équivaut à l'énoncé.

L'unicité de l'intégrale découlera du théorème 2 que l'on démontrera dans le paragraphe suivant. L'existence de l'intégrale est plus délicate à montrer. Nous allons décrire ici l'idée originale de sa construction.

On se donne $a < b$ deux réels et f une application continue sur $[a,b]$. On considère alors les subdivisions du segment $[a,b]$, c'est-à-dire les suites finie $\underline{\sigma} : \sigma_0 < \cdots < \sigma_n$ telles que $x_0 = a$ et $x_n = b$ ($n \geq 1$ est variable). Le réel $\pi(\underline{\sigma}) = \sup_{i=1,\cdots,n}(\sigma_i - \sigma_{i-1})$. Pour une telle subdivision $\underline{\sigma}$, on appelle *pointage* de $\underline{\sigma}$ la donnée de n réels $\underline{\xi} = (\xi_1, \cdots \xi_n)$ vérifiant $\xi_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. La donnée du couple $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$, s'appelle une *sudivision pointée* de $[a,b]$. A cette subdivision pointée, on associe la *somme de Riemann* relative à la fonction f :

$$R_{(\underline{\sigma},\underline{\xi})}(f) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) f(\xi_i)$$

On peut alors montrer qu'il existe un réel I tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$, tel que pour toute subdivision pointée $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$ de $[a,b]$ on ait

$$\pi(\underline{\sigma}) < \alpha \Longrightarrow \left| I - R_{(\underline{\sigma},\underline{\xi})}(f) \right| < \varepsilon$$

Le réel I est alors précisément l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ recherchée et l'on voit alors pourquoi il correspond à l'idée intuitive que l'on se fait de l'aire sous la courbe de la fonction f.

Une conséquence de cette propriété est que, si $(\underline{\sigma}_n, \underline{\xi}_n)_n$ désigne une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ telle que $\lim_n \pi(\underline{\sigma}_n) = 0$ alors

$$\lim_n R_{(\underline{\sigma}_n,\underline{\xi}_n)}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

En application de ce dernier résultat, pour un entier $n \geq 1$ donné, on considère la subdivision à pas régulier $\underline{\sigma} : \sigma_0 < \cdots < \sigma_n$ de $[a,b]$ définie par $\sigma_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \cdots, n$. Des choix particulier de pointages, donne alors les *sommes de Riemann inférieures (resp. supérieures, resp. médianes) à pas régulier* :

$$\begin{aligned}
R_n^{\text{inf}}(f) &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \\
R_n^{\text{sup}}(f) &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \\
R_n^{\text{med}}(f) &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2k+1)\frac{2(b-a)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Exemple : On a

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \lim_n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right)$$

1.2 Intégrales et primitives

Théorème 2.— *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et a un point de I. Si l'on définit la fonction F, pour $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

alors la fonction F est dérivable sur I et $F^{'}(x) = f(x)$.

En particulier, l'application F est une primitive de la fonction f : c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve : Soit $x_0 \in I$. Puisque f est continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in]x_0, x_0 + \alpha[\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ainsi, comme $F(x) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$ on a

$$f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon)dt < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon)dt = f(x_0) + \varepsilon$$

ce qui assure que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corollaire 3.— *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. Si F désigne une primitive de f sur I, alors il existe une constante C telle que, pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. En particulier, pour tout $b \in I$, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notation : Pour une fonction continue f sur un intervalle I, on note $\displaystyle\int f(x)dx$ une primitive de f sur F. Parfois, si F désigne une primitive de f, on notera $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour rappeler que toutes les primitives de f sur I diffère d'une constante.

Exemples : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue et $u : J \longrightarrow I$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, alors en notant F une primitive de f sur I, on voit que $(F \circ u)'(x) = f \circ u(x).u'(x)$, de sorte que

$$\int f \circ u(x).u'(x) = F \circ u(x) + C$$

Par exemple :

a) Si u est de signe constant et non nul sur J, on a $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(u(x)) + C$. Ainsi, sur $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln(x)) + C$.

b) Si u est strictement positive sur J et $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, on a $\displaystyle\int u'(x)u(x)^a dx = \frac{u(x)^{a+1}}{a+1} + C$. Ainsi, sur $]0, \pi[$, $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x)^2 dx = \frac{\sin(x)^3}{3} + C$.

c) Sur J, on a $\displaystyle\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + C$. Ainsi, $\displaystyle\int (1 + \ln x)x^x dx = x^x + C$.

1.3 Méthodes de calcul

1.3.1 Intégration par parties

Théorème 4.— (Formule d'intégration par parties) *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$. On a*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Preuve :

Application au calcul des primitves : $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C$. Par exemple, sur $I =]0, +\infty[$,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx + C = x\ln x - x + C$$

Sur $I = \mathbb{R}$,

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + C = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

1.3.2 Changement de variables

Théorème 5.— *Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi[c,d]\to[a,b]$ une fonction continument dérivable. On a*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d f\circ\varphi(x)\varphi^{'}(x)dx$$

(On dit que l'on a opéré le changement de variable $t=\varphi(x)$)

Preuve : Soit F une primitive de f. La fonction $f\circ\varphi.\varphi^{'}$ est continue et admet $F\circ\varphi$ pour primitive. En appliquant le corollaire 3, on a donc

$$\int_c^d f\circ\varphi(x)\varphi^{'}(x)dx = F\circ\varphi(d) - F\circ\varphi(c) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt$$

Corollaire 6.— *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle et $\varphi: I\to\mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (i.e. une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa réciproque soit $\mathcal{C}^1$) tel que $[a,b]\subset\varphi(I)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\circ\varphi(x)\varphi^{'}(x)dx$$

Preuve : C'est une application directe du résultat précédent, en remarquant que $f\circ\varphi$ et $\varphi^{'}$ sont continues et que φ étant un difféomorphisme, c'est en particulier un homéomorphisme, donc que $\varphi([\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)]) = [a,b]$.

Remarques 7.— Il est généralement pratique de poser "à l'envers" le changement de variable, c'est-à-dire de poser par exemple $x=\psi(t)$. Il est alors commode, pour s'y retrouver, de différentier formellement $dx=\psi^{'}(t)dt$ et de rechercher à exprimer simplement $\psi^{'}(t)$ en fonction de x.

1.4 Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
e^{ax} avec $a \in \mathscr{C}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{e^{ax}}{a} + C$
$\mathrm{ch}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(ax)}{a} + C$
$\mathrm{sh}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{ch}(ax)}{a} + C$
$\cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\sin(ax)}{a} + C$
$\sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{\cos(ax)}{a} + C$
x^a avec $a \in \mathbb{R}/\{-1\}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x}{a}\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,+\infty[$	$\operatorname{argch}\left(\dfrac{x}{a}\right)=\ln\left(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[$	$-\operatorname{argch}\left(\dfrac{-x}{a}\right)=\ln\left(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert\right)$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[;\ ]a,+\infty[$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert}\right)+C$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert}\right)+C=\dfrac{1}{a}\operatorname{argth}\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\tan(x)$	$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+C$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$]k\pi,(k+1)\pi[$	$-\ln\left(\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert\right)+C$
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln\left(\left\lvert\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert\right)+C$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}$	$]0,+\infty[;\ ]-\infty,0[$	$-\ln\left(\left\lvert\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert\right)+C$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$	$\mathbb{R}$	$2\arctan(e^x)+C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$x\ln(x)-x+C$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x\arctan(x)-\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arccos(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\text{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$x\text{argsh}(x)-\sqrt{1+x^2}+C$
$\text{argch}(x)$	$[1,+\infty[$	$x\text{argch}(x)-\sqrt{x^2-1}+C$
$\text{argth}(x)$	$]-1,1[$	$x\text{argth}(x)+\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)+C$

1.5 Longueur d'une courbe

On considère une application $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Par définition, la longueur de la courbe $C=\{(x,f(x))/\ x\in[a,b]\}$ est la limite de la somme des longueurs des cordes reliant la courbe sur la subdivision à par régulier de $[a,b]$:

$$\ell(C)=\lim_n\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+\left(f\left(a+(k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)-f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right)^2}$$

Puisque f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$, en application du théorème des accroissements finis, pour tout $k=0,\cdots,n-1$, il existe $c_k\in]a+k\frac{(b-a)}{n},a+(k+1)\frac{(b-a)}{n}[$ tel que

$$\left|f\left(a+(k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)-f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right|=\frac{(b-a)}{n}f'(c_k)$$

Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+\left(f\left(a+(k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)-f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right)^2}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\sqrt{1+f'(c_k)^2}=R_{n,\sigma_n}(f')$$

où σ_n est le pointage $c_0,\cdots,c_{n-1}$. On en déduit que

$$\ell(C)=\lim_n R_{n,\sigma_n}(\sqrt{1+f'^2})=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

Exemple : Un demi cercle C de rayon R est associé à la fonction $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ définie sur $[-R,R]$. Ainsi, on a

$$\ell(C)=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=R\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Le changement de variables $x = R\sin t$, donne alors

$$\ell(C) = R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R\cos t\,dt}{\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}} = R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi R$$

Ainsi, le périmètre d'un cercle entier de rayon R vaut $2\pi R$.

Dans le cas des courbes C paramétrées par $(x(t), y(t)/\ t \in [a,b])$ avec x, y des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on montre avec les mêmes arguments que

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

2 Intégrale double et curviligne

2.1 Intégrale double

2.1.1 Introduction

Définitions 8.— *a) Un pavé de $\mathbb{R}^2$ est une partie de la forme*

$$P = [a,b] \times [c,d]$$

où $a \leq b$ et $c \leq d$ désignent des réels. L'intérieur de P est la partie $\overset{\circ}{P} =]a,b[\times]c,d[$. La mesure (de Riemmann) ou aire de P est par définition le réel

$$\mu(P) = (b-a)(d-c) \geq 0$$

b) Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est dite pavable s'il existe une famille finie de pavés $\underline{P} = (P_1, \cdots, P_n)$, appelée pavage de D, telle que

$$D = \bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i$$

et telle que, pour tout $i \neq j$, $\overset{\circ}{P_i} \cap \overset{\circ}{P_j} = \emptyset$. Le pas du pavage est alors

$$\pi(\underline{P}) = \sup_{i=1,\cdots,n} \mu(P_i)$$

On montre que, quel que soit le pavage $\underline{P} = (P_1, \cdots, P_n)$ de D, le réel $\mu(D) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i)$ est constant. C'est la mesure ou l'aire de D.

c) Une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est dite quarrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux parties pavables $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ telles que $D_1 \subset \Omega \subset D_2$ et $\mu(D_2) - \mu(D_1) < \varepsilon$.

On montre alors que si $(D_{i_n})_n$ et $(D_{j_n})_n$ désignent deux suites de parties pavables de $\mathbb{R}^2$ telles que, pour tout $n \geq 0$, $D_{i_n} \subset \Omega \subset D_{j_n}$ et $\lim_n(\mu(D_{i_n}) - \mu(D_{j_n})) = 0$, alors il existe un réel $\mu(\Omega)$ (indépendant du choix des suites $(D_{i_n})_n$ et $(D_{j_n})_n$ vérifiants ces conditions) tel que $\lim_n \mu(D_{i_n}) = \lim_n \mu(D_{j_n}) = \mu(\Omega)$. Le réel $\mu(\Omega)$ est appelé la mesure ou l'aire de Ω.

Définitions 9.— *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie pavable et $f : D \longrightarrow \mathscr{R}$ une application. Si $P_1, \cdots, P_n$ désigne un pavage de D et $\xi_1, \cdots, \xi_n$ désignent des éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifiant que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $\xi_i \in P_i$ alors la donnée $(\underline{P}, \underline{\xi}) = (P_1, \cdots, P_n, \xi_n, \cdots, \xi_n)$ s'appelle un pavage pointé de D. La somme de Riemann sur $(\underline{P}, \underline{\xi})$ associée à la fonction f est, par définition, le réel*

$$R_{(\underline{P},\underline{\xi})}(f) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i) f(\xi_i)$$

Définition 10.— *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une partie quarrable et $f : \Omega \longrightarrow \mathscr{R}$ une application. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur D s'il existe un réel I tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute partie pavable $D \subset \Omega$ et tout pavage pointé $(\underline{P}, \underline{\xi})$ de D on ait*

$$\mu(\Omega) - \mu(D) < \alpha \text{ et } \pi(\underline{P}) < \alpha \Longrightarrow \left| R_{(\underline{P},\underline{\xi})}(f) - I \right| < \varepsilon$$

Le réel I est alors noté $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ et appelé intégrale double de f sur Ω.

On voit donc qu'à l'instar de l'intégrale simple et des aires, l'intégrale double mesure le volume algébrique de la partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ délimité par la partie Ω et les valeurs de la fonction f sur cette partie.

Théorème 11.— *Toute fonction continue sur une partie quarrable est intégrable.*

2.1.2 Propriétés

En utilisant les sommes de Riemann on montre que l'intégrale double vérifie les mêmes notions fondamentales que pour l'intégrale simple :

Proposition 12.— *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une partie quarrable, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathscr{R}$ deux fonctions intégrables, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ deux parties quarrables telles que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ et $\overset{\circ}{\Omega}_1 \cap \overset{\circ}{\Omega}_2 = \emptyset$. On a*

(P_1) $\displaystyle\iint_\Omega \lambda dxdy = \lambda\mu(\Omega)$. *En particulier,* $\displaystyle\iint_\Omega dxdy = \mu(\Omega) = \mathrm{Aire}(\Omega)$.

(P_2) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$ *(Relation de Chasles).*

(P_3) $\displaystyle\iint_\Omega (\lambda f + g)(x,y)dxdy = \lambda \iint_\Omega f(x,y)dxdy + \iint_\Omega g(x,y)dxdy$

(P_4) *Si $f \le g$ sur Ω alors,* $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy \le \iint_\Omega g(x,y)dxdy$.

2.1.3 Théorème de Fubini

Théorème-Définition 13.— *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. S'il existe deux applications continues $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\varphi, \psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

$$\left(resp.\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\right\}\right)$$

alors D est quarrable. Une telle partie D est alors dite "continûment paramétrable".

Exemples 14.— 0/ Pavé.

1/ Triangle.

2/ Intersection de deux cercles.

Théorème 15.— (Fubini) *Avec les notations du théorème 13, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une application continue alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\left(resp.\ \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy \right)$$

Corollaire 16.— *Si $D = [a,b] \times [c,d]$ désigne un pavé alors, pour tout application continue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

En particulier, si $f(x,y) = F(x)G(y)$ où $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications continues, alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx. \int_c^d G(y)dy$$

Exemples 17.— 1/ $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où D désigne le domaine de l'exemple 14-1.

2/ Calcul de l'aire du domaine D de l'exemple 14-2.

3/ Volume d'une pyramide.

2.1.4 Changement de variables

Définitions 18.— *Soient $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts. On appelle $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de D' vers D, toute application bijective $\theta : (u,v) \longmapsto (h(u,v), k(u,v))$ de D' versD telle que θ et θ^{-1} possèdent des dérivées partielles continues.*

La matrice jacobienne de θ au point $(u_0,v_0) \in D'$ est alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial k}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial k}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

et l'on appelle jacobien θ au point $(u_0,v_0) \in D'$ le déterminant $J_\theta(u_0,v_0)$ de cette matrice (i.e. $J_\theta(u_0,v_0) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0).\dfrac{\partial k}{\partial v}(u_0,v_0) - \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0).\dfrac{\partial k}{\partial u}(u_0,v_0)$).

Théorème 19.— (Changement de variables) *Soient K un compact quarrable et Ω de $\mathbb{R}^2$ tels que $K \subset \Omega$. Si $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ désigne une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\theta_{|\mathring{K}}$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{K}$ sur $\theta(\mathring{K})$, alors*

1/ $\theta(K)$ est une partie quarrable.

2/ $\iint_{\theta(K)} f(x,y)dxdy = \iint_K f \circ \theta(u,v).|J_\theta(u,v)|dudv$

La formule du 2/ est la formule de changement de variables. Si $\theta(u,v) = (h(u,v), k(u,v))$, compte-tenu du fait que $f \circ \theta(u,v) = f(h(u,v), k(u,v))$, on dit généralement que l'on a opéré le changement de variables $\begin{cases} x = h(u,v) \\ y = k(u,v) \end{cases}$.

Applications 20.— 1/ (Changement de variables en polaire). Il s'agit de l'application $(\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On a alors

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Exemples : a) Aire d'un cercle.

b) Calcul de $I = \iint_D \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

2/ (Aire d'un secteur curviligne). On considère une application continue $f : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ où $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$ et

$$D^{'} = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 / \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \ 0 \leq r \leq f(\theta)\right\}$$

Le *secteur curviligne* D défini par l'application f est par définition l'image de la partie $D^{'}$ par l'application $(\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On a alors

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D^{'}} \rho d\rho d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{f(\theta)} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2 d\theta$$

Exemples : a) Aire d'un cercle.

b) Aire d'une spirale logarithmique $f(\theta) = e^{\theta}$.

3/ (Volume d'une surface de révolution). On considère le secteur curviligne D défini par une application $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et Δ le domaine délimité par les segments d'extrémités un point $A(0, 0, h)$ fixé et les points du bord de D. On voit que

$$\Delta = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x, y) \in D, \ 0 \leq z \leq F(x, y)\right\}$$

où F vérifie, pour tous (ρ, θ) tel que $0 \leq \rho \leq f(\theta)$, $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = h\frac{f(\theta)-\rho}{f(\theta)}$. Ainsi, en effectuant un changement de variables en polaire, on a

$$\begin{aligned}
Volume(\Delta) &= \iint_D F(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{f(\theta)} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{f(\theta)} h\frac{f(\theta)-\rho}{f(\theta)}\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{h}{f(\theta)}\int_0^{f(\theta)} (f(\theta)\rho - \rho^2) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{h}{f(\theta)}\left[f(\theta)\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{h}{f(\theta)}\frac{f(\theta)^3}{6} d\theta \\
&= \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2 d\theta\right) = \frac{h.\text{Aire}(D)}{3}
\end{aligned}$$

2.2 Intégrale curviligne

2.2.1 Définitions, propriétés

On rapporte le plan euclidien $\mathscr{P}$ à une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définitions 21.— *Un chemin de $\mathscr{P}$ est une application vectorielle $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathscr{P}$ que l'on supposera le plus souvent implicitement de classe $\mathscr{C}^1$, autrement dit, si pour $t \in [a, b]$ donné on pose $\gamma(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$, les fonctions $x, y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seront supposées de classe $\mathscr{C}^1$.*

Lorsque γ vérifie $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un "lacet".

L'image $\mathfrak{C} = \gamma([a, b]) \subset \mathscr{P}$ est appelée "courbe géométrique" associée au chemin γ. Les fonctions $(x(t), y(t))$ sont alors une paramétrisation de $\mathfrak{C}$.

Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathscr{P}$ est un chemin, le chemin opposé $\gamma^o : [a, b] \longrightarrow \mathscr{P}$ est défini, pour $t \in [a, b]$, par $\gamma^o(t) = \gamma(a + b - t)$.

Si $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathscr{P}$ et $\gamma_2 : [b, c] \longrightarrow \mathscr{P}$ sont deux chemins vérifiant $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, le "recollement" des chemins γ_1 et γ_2 est le chemin $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a, c] \longrightarrow \mathscr{P}$ défini, pour $t \in [a, b]$, par $\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ et, pour $t \in [b, c]$, $\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma_2(t)$.

Définitions 22.— *Un champ de vecteurs est une application continue $\overrightarrow{F} : \Omega \longrightarrow \mathscr{P}$ où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, si l'on pose pour $(x, y) \in \Omega$, $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\overrightarrow{i} + Q(x, y)\overrightarrow{j}$, les applications $P, Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues. Le champ $\overrightarrow{F}$ sera dit différentiable si les applications P et Q le sont (e.g. P et Q ont des dérivées partielles continues).*

La notation $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ s'appelle "la forme différentielle" associée à $\overrightarrow{F}$.

Définitions 23.— *Soient $\overrightarrow{F} : \Omega \longrightarrow \mathscr{P}$ un champ de vecteurs et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un chemin (i.e. $\gamma(t) = (x(t),y(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in [a,b]$). Si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ désigne la forme différentielle associée à $\overrightarrow{F}$, on appelle "intégrale curviligne" du champ $\overrightarrow{F}$ le long du chemin γ, l'intégrale simple*

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \Big(P(x(t),y(t))x^{'}(t) + Q(x(t),y(t))y^{'}(t)\Big)dt$$

Proposition 24.— *Soient $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle sur un ouvert Ω et γ,γ_1,γ_2 trois chemins à valeurs dans Ω tels que $\gamma_1 \vee \gamma_2$ existe. On a*

$$\int_{\gamma^o} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

et

$$\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Interprétation physique : Si $\overrightarrow{F}$ représente un champ de forces et $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}$ représente un déplacement infinitésimal élémentaire, le produit scalaire $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}$ vaut donc $Pdx + Qdy$ et ainsi l'intégrale curviligne $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ représente le travail effectué par la force $\overrightarrow{F}$ le long du chemin γ.

Par exemple, considérons le champ de forces $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$. On calcule le travail de ce champ de force sur les chemin $\gamma_1 : y = x$ et $\gamma_2 : y = x^2$ pour $x \in [0,1]$.

2.2.2 Indépendance des chemins

Définitions 25.— *On dit d'un champ de vecteur différentiable $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ qu'il dérive d'un potentiel, s'il existe une application $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\mathrm{grad}(f) = \overrightarrow{F}$ (i.e. $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$).*

Exemple: $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y^2}{x}\overrightarrow{i} + 2y\log x\overrightarrow{j}$ $(x > 0)$.

Théorème 26.— *Un champ de vecteur différentiable $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ dérive d'un potentiel si et seulement la forme différentielle $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est fermée (i.e. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$).*

Théorème 27.— *Si un champ de vecteur différentiable $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ dérive d'un potentiel f alors, pour tout chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ d'origine A et d'extrémité B, on a*

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = f(B) - f(A)$$

En particulier, si de plus γ est un lacet alors $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

2.2.3 Théorème de Green-Riemann

Pour un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ continûment paramétrable, on notera $\partial^+ D$ une paramétrisation injective du "bord" de D qui "tourne" dans le sens trigonométrique direct. Par exemple, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq R\}$ désigne le disque de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$ alors le bord de D (qui est le cercle associé) peut-être paramétré par $\partial^+ D(t) = (R\cos t, R\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Théorème 28.— (Green-Riemann) *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine continûment paramétrable et $P,Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$. On a*

$$\int_{\partial^+ D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

Exemple : Calcul de $\int_{\partial^+ D}(x^2-y)dx+(x+y)dy$ où $D=[-1,1]\times[-2,2]$.

Corollaire 29.— *Si $D\subset\mathbb{R}^2$ est un domaine continûment paramétrable, alors*

$$\mathrm{Aire}(D)=\int_{\partial^+ D} xdy=\int_{\partial^+ D}-ydx$$

Exemple : (Aire d'une ellipse) On considère la région du plan délimitée par l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3 Intégrale triples et de surface

3.1 Intégrale triples

3.2 Intégrale de surface