Intégrale de Riemann

Université d'Eleuthéria-Polites

Cours de Licence 2 — 2014/2015

Bruno Deschamps

Version 1.0

« Pour chaque problème complexe, il existe une solution simple, directe… et fausse ».

Table des matières

1 Construction.

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

1.1 Intégrale des fonctions en escalier.

1.1.1 Subdivisions.

Définition 1.— *Une "subdivision" du segment $[a,b]$ est une suite finie strictement croissante $(x_0, x_1, \cdots x_n)$ d'éléments de $[a,b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Une telle subdivision sera notée*

$$s : x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

On appelle "pas de s", le réel noté $\pi(s)$ et défini par

$$\pi(s) = \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

On note $\mathscr{S}ub([a,b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

L'ensemble $\mathscr{S}ub([a,b])$ est naturellement en bijection avec $\mathcal{P}_f(]a,b[)$, l'ensemble des parties finies de $]a,b[$. En effet, une bijection $\varphi : \mathscr{S}ub([a,b]) \to \mathcal{P}_f(]a,b[)$ est par exemple donnée par l'application φ qui à une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de $[a,b]$, associe $\varphi(s) = \{x_1, \cdots, x_{p-1}\}$ si $p \geq 2$ et $\varphi(s) = \emptyset$ sinon.

Définition 2.— *Soit s et $s^{'}$ deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que $s^{'}$ est plus fine que s si et seulement si $\varphi(s) \subset \varphi(s^{'})$. En d'autres termes, si l'on pose $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ et $s^{'} : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ alors $s^{'}$ est plus fine que s si et seulement si*

$$\forall i = 0, \cdots, p,\ \exists j = 0, 1, \cdots, n \text{ tel que } x_i = y_j$$

Dans cette situation, on a donc en particulier $n \geq p$.

La relation "être plus fine que" est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}ub([a,b])$, qui n'est bien évidement pas totale. Toutefois si s et $s^{'}$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors il existe $s^{''} \in \mathscr{S}ub([a,b])$ qui est à la fois plus fine que s et $s^{'}$. En effet définissons $s^{''} = \varphi^{-1}(\varphi(s) \cup \varphi(s^{'}))$. Cette subdivision s'appelle la subdivision obtenue par recollement de s et $s^{'}$, on la note $s^{''} = s \wedge s^{'}$. Elle est clairement plus fine que s et $s^{'}$.

Exemples 3.— 1/ Soient c et d deux points distincts de $]a,b[$ tels que $c < d$. On considère les subdivisions $s : a < c < b$ et $s^{'} : a < d < b$. Alors $s \wedge s^{'} : a < c < d < b$.

2/ On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation $u_n = \dfrac{1}{n}$. Pour $n \neq 0$, on définit la subdivision de $[0,1]$, $s_n : 0 < u_n < u_{n-1} < \cdots < u_1 = 1$. Si p et q sont deux entiers strictements positifs tels que $p \leq q$, alors $s_p \wedge s_q = s_q$.

Remarque 4.— Si $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ et si $s^{'}$ désigne une subdivision plus fine que s, alors pour tout $0 \leq i \leq n-1$, il existe une subdivision $s_i : x_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = x_{i+1}$ de $[x_i, x_{i+1}]$ telle que

$$s^{'} : a = x_{0,0} < x_{0,1} < \cdots < x_{0,k_0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} < \cdots\cdots < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n-1,k_{n-1}} = x_n = b$$

1.1.2 Fonctions en escalier.

Définition 5.— *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, telle que f soit constante sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (les valeurs de f en les points x_i peuvent être quelconques).*

On note $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Soient $f \in \mathscr{E}([a,b])$ et $s \in \mathscr{S}ub([a,b])$ ($s : a = y_0 < x_1 < \cdots < y_p = b$). On dit que s est "adaptée" à f si f est constante sur tout les intervalles $]y_i, y_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq p-1$.

Remarques : 1/ Si s est une subdivision adaptée à f et que s' est une subdivision plus fine que s, alors s' est adaptée à f.

2/ Soient c et d deux éléments de $[a,b]$ tels que $c < d$. Si f est une fonction définie sur $[a,b]$ on note $f_{|[c,d]}$, la restriction de f à $[c,d]$. Alors si $f \in \mathscr{E}([a,b])$, on a $f_{|[c,d]} \in \mathscr{E}([c,d])$.

Lemme 6.— *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ qui est stable par passage à la valeur absolue (i.e. $f \in \mathscr{E}([a,b]) \Longrightarrow |f| \in \mathscr{E}([a,b])$).*

Preuve : Soient $f \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il est clair que $-f$, αf et $|f|$ sont des éléments de $\mathscr{E}([a,b])$. Il suffit donc de vérifier que si f et g sont éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ alors il en est de même pour $f+g$ et fg. Soit s_f une subdivision adaptée à f et s_g une subdivision adaptée à g. Soit $s = s_f \wedge s_g$, supposons que $s : a = x_0 < \cdots x_n = b$, alors f et g sont constantes sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$, donc $f+g$ et fg le sont aussi sur les même intervalles. Elles sont donc en escalier.

Les fonctions en escalier sur $[a,b]$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur $[a,b]$ (elles sont donc, en particulier, bornées). Cette propriété ne les caractérise pas. En effet, considérons $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique des rationnels restreint à $[a,b]$ (i.e. $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ si $x \in [a,b]$, $x \notin \mathbb{Q}$). C'est une fonction qui ne prends que deux valeurs sur $[a,b]$, mais qui n'est pas en escalier, car compte-tenu du caractère dense de l'ensemble $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire dans $\mathbb{R}$, on voit que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est constante sur aucun intervale ouvert.

On voit donc que pour caractériser les fonctions en escalier il faut rajouter une condition à celle de la finitude de ses valeurs :

Proposition 7.— *Pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit une fonction en escalier, il faut et il suffit que*

1) f ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur $\mathbb{R}$,

2) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_{x_0} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = x_0\}$ soit la réunion finie de sous-intervalles de $[a,b]$.

Preuve : Il est clair que toute fonction en escalier vérifie ces deux propriétés. Pour la réciproque, remarquons d'abord que la propriétés 2) équivaut à :

$2'$*) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_{x_0} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = x_0\}$ soit la réunion finie de sous-intervalles de $[a,b]$ disjoints deux à deux.*

(il suffit de considérer les composantes connexes de E_{x_0} qui sont des intervalles et qui sont en nombres finis)

On considère alors l'ensemble E constitué des $y \in \mathbb{R}$ tel que $E_y \neq \emptyset$. D'après 1), E est un ensemble fini (non vide), d'après $2'$) pour tout $y \in E$ il existe une suite finie de sous-intervalles $I_{y_1}, \cdots I_{y_{n_y}}$ de $[a,b]$ disjoints deux à deux tels que $E_y = \bigcup_{i=1}^{n_y} I_{y_i}$. Si y et z sont deux éléments distincts de E alors $E_y \cap E_z = \emptyset$. Il s'ensuit que l'ensemble des I_{y_i} ($y \in E$, $1 \leq i \leq n_y$) constitue en ensemble fini de sous-intervalles de $[a,b]$ disjoint deux à deux et dont la réunion vaut $[a,b]$. On considère alors l'ensemble des bornes inférieures et supérieures des intervalles I_{y_i}. Puisque cet ensemble est fini, on peut l'énumérer en une suite ordonnée $x_1 < \cdots < x_n$. Il est clair que $a = x_1$ et $b = x_n$, car a et b sont chacun contenu dans un des I_{y_i}. Ainsi, $s : x_1 < \cdots < x_n$ est une subdivision de $[a,b]$. Nous allons maintenant montrer que f est en escalier et que s est adaptée à f.

Si $j \in [2, \cdots, n-1]$ alors, par hypothèse, x_j est soit la borne supérieure, soit la borne inférieure d'un intervalle $I_{y_{0_{i_0}}}$. Supposons que ce soit une borne inférieure. Par hypothèse, il existe un indice j' tel que $x_{j'}$ soit la borne supérieure de $I_{y_{0_{i_0}}}$.

- Si $j = j'$ alors $I_{y_{0_{i_0}}} = \{x_j\}$.

- Si $j' = j+1$ alors l'intérieur de l'intervalle $I_{y_{0_{i_0}}}$ vaut $]x_j, x_{j+1}[$ et donc f est constante sur cet intervalle.

Si $j^{'} \neq j$ et $j+1$, alors $x_{j^{'}}$ est la borne inférieure ou supérieure d'un intervalle $I_{y_{1\,i_1}}$ avec $y_1 \neq y_0$ ou $i_1 \neq i_0$. Donc $I_{y_{0\,i_0}} \cap I_{y_{1\,i_1}} \neq \emptyset$, ce qui est absurde.

Le cas x_j borne supérieure, ainsi que le cas des intervalles $]x_1, x_2[$ et $]x_{n-1}, x_n[$ se traitent de la même façon.

1.1.3 Intégrale.

Théorème 8.— *Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et s une subdivision adaptée à f. On suppose que $s : a = x_0 < \cdots x_n < b$ et que sur $]x_i, x_{i+1}[$, f prenne la valeur λ_i $(0 \leq i \leq n-1)$. Le réel*

$$I_s = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

Preuve : Soit s et $s^{'}$ deux subdivisions adaptées à f. On suppose pour commencer que $s^{'}$ est plus fine que s. Soit $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, on a vu (remarque 4) que l'on pouvait écrire $s^{'}$ sous la forme $s^{'} : a = x_{0,0} < x_{0,1} < \cdots < x_{0,k_0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} < \cdots\cdots < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n-1,k_{n-1}} = x_n = b$ avec $x_{i,k_i} = x_{i+1}$.

Maintenant, puisque f prend la valeur λ_i sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f prend aussi la valeur λ_i sur les intervalles $]x_{i-1,k_{i-1}}, x_{i,1}[$, $]x_{i,1}, x_{1,2}[$, $\cdots$, $]x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i}[$. En posant $x_{i,0} = x_{i-1,k_{i-1}}$, on a donc

$$I_{s^{'}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = I_s$$

Soient maintenant s et $s^{'}$ deux subdivisions adaptées à f quelconques. On sait que $s \wedge s^{'}$ est plus fine que s et $s^{'}$. D'après ce qui précède, on a donc $I_s = I_{s \wedge s^{'}} = I_{s^{'}}$.

Définition 9.— *Soit f une fonction en escalier. On appelle "intégrale" de f sur $[a,b]$, le réel I_s défini dans le théorème 8 pour n'importe quelle subdivision s adaptée à f. On note alors $\int_a^b f(x)dx$ ce réel.*

Note : Le x dans $\int_a^b f(x)dx$ est une "variable muette". Il est mentionné pour rappeller le lien qu'il y a entre la théorie de l'intégration et celle du calcul différentiel. Parfois, on omettra ce x et l'on notera l'intégrale de f sur $[a,b]$ plus simplement $\int_a^b f$.

1.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 10.— *L'application de $\mathscr{E}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ qui a f fait correspondre $\int_a^b f(x)dx$ est linéaire.*

Preuve : Soit f, g deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ et α un réel. Si s_f est une subdivision adaptée à f et s_g une subdivision adaptée à g, il est clair que $s = s_f \wedge s_g$ est adaptée à $f + \alpha g$. La calcul de $\int_a^b (f+\alpha g)(x)dx$ à partir de s, donne immédiatement le résultat.

Proposition 11.— *Si $f \in \mathscr{E}([a,b])$ est positive alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

Preuve : Ceci résulte directement de la définition.

Corollaire 12.— *Soit f et g deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que $f \le g$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, pour tout $f \in \mathscr{E}([a,b])$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve : Par linéarité, on a $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, or $(g-f)$ eﬆ positive, d'où le résultat.

L'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ assure que $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$. On en déduit que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le -\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

c'eﬆ-à-dire $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Proposition 13.— *Si $c \in]a,b[$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^d f_{|[c,d]}(x)dx$.*

Preuve : Soit s une subdivision adaptée à f. On prend s_c la subdivision définie par $s_c : a < c < b$. Soit $s' = s \wedge s_c$, avec cette subdivision le résultat eﬆ immédiat.

1.3 Intégrales de Riemann.

1.3.1 Sommes de Riemann, sommes de Darboux.

Définition 14.— *Une subdivision pointée de $[a,b]$ eﬆ la donnée d'un couple (s,t) où $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ désigne une subdivision et t un n-uplet de point de $[a,b]$ vérifiant*

$$\forall i = 1,\cdots,n, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

On note $\widehat{\mathscr{S}ub}([a,b])$ l'ensemble des subdivisions pointées de $[a,b]$.

On considère une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 15.— *Si (s,t) désigne une subdivision pointée de $[a,b]$ ($s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et $t = (t_1,\cdots,t_n)$), on appelle somme de Riemann de f associée à (s,t) le réel*

$$R_{(s,t)}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

Définition 16.— *Si f eﬆ bornée sur $[a,b]$ et si $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ désigne une subdivision de $[a,b]$, on appelle "somme de Darboux supérieure" de f associée à s le réel*

$$D_{\sup}(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

et "somme de Darboux inférieure" de f associée à s le réel

$$D_{\inf}(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Lemme 17.— *Si f est bornée, alors pour toute subdivision pointée $(s,t) \in \widehat{\mathscr{S}ub}([a,b])$, on a*

$$D_{\inf}(f,s) \leq R_{(s,t)}(f) \leq D_{\sup}(f,s)$$

Preuve : Ceci résulte du fait que si $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, alors pour tout $i = 1, \cdots n$, on a

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq f(t_i) \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Lemme 18.— *Si s et $s^{'}$ sont deux subdivisions de $[a,b]$ telle que $s^{'}$ soit plus fine que s, alors si f est bornée on a*

$$D_{\inf}(f,s) \leq D_{\inf}(f,s^{'}) \leq D_{\sup}(f,s^{'}) \leq D_{\sup}(f,s)$$

Preuve : Si l'on pose $s : x_1 < \cdots < x_n$, comme $s^{'}$ est plus fine que s alors, pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, il existe une subdivision $s_i : x_i = x_{i,1} < \cdots < x_{i,n_i} < x_{i+1}$ de $[x_i, x_{i+1}]$ telle que $s^{'} : a < \cdots < x_{i,j} < \cdots < b$. Pour un indice i fixé, on a

$$\forall j = 1, \cdots, n_i\ , \quad \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq \inf_{x \in [x_{i,j}, x_{i,j+1}]} f(x)$$

et donc $\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \inf_{x \in [x_{i,j}, x_{i,j+1}]} f(x)$. Ainsi,

$$D_{\inf}(f,s) \leq D_{\inf}(f,s^{'})$$

Le cas des sommes de Darboux supérieures se traite de la même manière.

1.3.2 Fonction Riemann-intégrables.

Théorème 19.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propositions suivantes*

i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε et h_ε deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que:

$$g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon \text{ et } \int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$$

En particulier, les réels $M(f) = \inf_{h \in \mathscr{E}([a,b]), f \leq h} \int_a^b h(x)dx$ et $m(f) = \sup_{g \in \mathscr{E}([a,b]), f \geq g} \int_a^b g(x)dx$ existent et sont égaux,

ii) f est bornée et il existe un (unique) réel I tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (s,t) \in \widehat{\mathscr{S}ub}([a,b])\ \Big(\pi(s) < \alpha \Longrightarrow |I - R_{(s,t)}(f)| < \varepsilon\Big)$$

iii) f est bornée et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall s \in \mathscr{S}ub([a,b])\ \Big(\pi(s) < \alpha \Longrightarrow D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) < \varepsilon\Big)$$

iv) f est bornée et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s \in \mathscr{S}ub([a,b])\ D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) < \varepsilon$$

sont équivalentes.

Preuve : Il convient, en premier lieu, de démontrer l'implication contenue dans la proposition i). En posant $\varepsilon = 1$, il existe g_1 et h_1 deux fonctions en escalier telles que $g_1 \leq f \leq h_1$. En particulier, si g est une fonction en escalier telle que $g \leq f$, alors $g \leq h_1$. On a donc

$$\forall g \in \mathscr{E}([a,b]),\ f \geq g,\ \int_a^b g(x) \leq \int_a^b h_1(x)dx$$

et ainsi, $m(f) = \sup_{g \in \mathscr{E}([a,b]),\ f \geq g} \int_a^b g(x)dx$ existe. On a de même, l'existence de $M(f)$. Il est clair (par prolongement des inégalités) que $m(f) \leq M(f)$. Si $\varepsilon > 0$, il existe g_ε et h_ε deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que

$$g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon \ et \ \int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$$

et alors $\int_a^b g_\varepsilon(x)dx \leq m(f) \leq M(f) \leq \int_a^b h_\varepsilon(x)dx$. On en déduit que

$$0 \leq M(f) - m(f) < \varepsilon$$

Cet encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit finalement que $M(f) = m(f)$.

$i) \Longrightarrow ii)$ Il est déjà clair que f est borné, car f est majorée par une fonction en escalier et celles-ci sont bornées. Par ailleurs, si le réel I existe alors il est unique. en effet, considérons deux réels I et $I^{'}$ qui vérifient la propriété ii). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (s,t) \in \widehat{\mathscr{S}ub}([a,b]) \ \left(\pi(s) < \alpha \Longrightarrow |I - R_{(s,t)}(f)| < \varepsilon/2 \text{ et } |I^{'} - R_{(s,t)}(f)| < \varepsilon/2\right)$$

et donc

$$|I - I^{'}| \leq |I - R_{(s,t)}(f)| + |I^{'} - R_{(s,t)}(f)| < \varepsilon$$

Cet encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit finalement que $I = I^{'}$.

Voyons maintenant l'existence du réel I. Posons $I = m(f) = M(f)$, on fixons un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe g_ε et h_ε deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que

$$g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon \ et \ \int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

On a, en particulier,

$$\left| I - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Si l'on note $\varphi_\varepsilon = h_\varepsilon - g_\varepsilon$, alors

$$0 \leq f - g_\varepsilon(x) \leq \varphi_\varepsilon \ et \ \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit (s,t) une subdivision pointée de $[a,b]$ ($s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et $t = (t_1, \cdots, t_n)$). Considérons le sous-ensemble D de $[a,b]$ composé des points où φ_ε ou g_ε ne sont pas continues. Cet ensemble est fini et l'on note p sont cardinal. On note alors

$$A = \{i = 1, \cdots, n / [x_{i-1}, x_i] \cap D \neq \emptyset\}$$

et B le complémentaire de A dans $(1, 2, \cdots, n)$. L'ensemble B représente l'ensemble des indices i tels que sur $[x_{i-1}, x_i]$, φ_ε et g_ε sont continues. On voit que A est fini et que $\text{card}(A) \leq 2p$.

Pour $i \in B$, on note Λ_i la valeur de g_ε sur $[x_{i-1}, x_i]$ et λ_i celle de φ_ε sur $[x_{i-1}, x_i]$. On a

$$\int_a^b g_\varepsilon(x)dx - R_{(s,t)}(f) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right)$$

Décomposons cette dernière somme en deux sommes, indicées respectivement par A et par B. Pour la somme indicée par B, on a

$$\sum_{i\in B} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right) = \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1})(\Lambda_i - f(t_i)) = \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1})(g_\varepsilon(t_i) - f(t_i))$$

on en déduit que

$$\left| \sum_{i\in B} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right) \right| \leq \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1})\varphi_\varepsilon(t_i) = \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1})\lambda_i \leq \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

Regardons maintenant la somme indicée par A. Si μ désigne un majorant de φ_ε et de g_ε sur $[a,b]$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i\in A} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right) \right| &\leq \sum_{i\in A} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g_\varepsilon(x)|dx + (x_i - x_{i-1})2\mu \right) \leq 3\mu \sum_{i\in A} (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 6p\mu\pi(s) \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{18p\mu}$. Si (s,t) est une subdivision pointée de $[a,b]$ telle que $\pi(s) < \alpha$, alors

$$\left| I - R_{(s,t)}(f) \right| \leq \left| I - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \right| + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x)dx - R_{(s,t)}(f) \right|$$

et puisque l'on a $\left| I - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g_\varepsilon(x)dx - R_{(s,t)}(f) \right| &\leq \left| \sum_{i\in B} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right| + \left| \sum_{i\in A} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\varepsilon(x)dx - (x_i - x_{i-1})f(t_i) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 6p\mu\pi(s) \leq \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

inégalité qui, additionnée à l'inégalité $\left| I - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, montre finalement que $|I - R_{(s,t)}(f)| < \varepsilon$.

$ii) \Longrightarrow iii)$ Soient $\varepsilon > 0$ et $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\pi(s) < \alpha$ (le réel α étant celui donné par $ii)$). On pose $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Par définition même de la borne supérieure et inférieure, il existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $m_i \leq f(t_i) \leq m_i + \varepsilon$ et $M_i - \varepsilon \leq f(u_i) \leq M_i$. Posons $t = (t_1, \cdots t_n)$ et $u = (u_1, \cdots u_n)$. On a alors

$$D_{\inf}(f,s) \leq R_{(s,t)}(f) \leq D_{\inf}(f,s) + \varepsilon(b-a)$$

et

$$D_{\sup}(f,s) - \varepsilon(b-a) \leq R_{(s,u)}(f) \leq D_{\sup}(f,s)$$

ce qui assure que

$$0 \leq D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) \leq R_{(s,u)}(f) - R_{(s,t)}(f) + 2\varepsilon(b-a)$$

Par hypothèse, on a $|R_{(s,u)}(f)| \leq \varepsilon$ et $|R_{(s,t)}(f)| \leq \varepsilon$, ainsi

$$D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) \leq 2\varepsilon(1 + (b-a))$$

En prenant $\varepsilon^{'} = 2\varepsilon(1 + (b-a))$, on obtient alors le résultat.

$iii) \Longrightarrow iv)$ Immédiat.

$iv) \Longrightarrow i)$ Soient $\varepsilon > 0$ et $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$ tel que $D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) < \varepsilon$. On définit g_ε et h_ε par $\forall i = 1,\cdots n$, $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $g_\varepsilon(x) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ et $h_\varepsilon(x) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ et $g_\varepsilon(x_i) = h_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$.

Il eſt clair que $g_\varepsilon(x)$ et $h_\varepsilon(x)$ sont en escalier et que $g_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq h_\varepsilon(x)$. Maintenant, par conſtruction même on a

$$\int_a^b g_\varepsilon(x)dx = D_{\inf}(f,s) \ et \ \int_a^b h_\varepsilon(x)dx = D_{\sup}(f,s)$$

d'où le résultat.

Remarque 20.— La propriété $i)$ du théorème 19 eſt équivalente à la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il exiſte g_ε et h_ε deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que

$$|f - g_\varepsilon| \leq h_\varepsilon \ et \ \int_a^b h_\varepsilon(x)dx \leq \varepsilon$$

Définition 21.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie les quatre propriétés équivalentes du théorème 19, on dit que f eſt "Riemann-intégrable", ou plus simplement "intégrable". On définit alors "l'intégrale" de f sur $[a,b]$ comme étant le réel I intervenant dans la propriété ii) du théorème 19.*

On note $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (ou parfois $\int_a^b f$) et l'on désigne par $\mathscr{I}([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarques 22.— 1/ Si f eſt intégrable, on a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{h\in\mathscr{E}([a,b]),\ f\leq h} \int_a^b h(x)dx = \sup_{g\in\mathscr{E}([a,b]),\ f\geq g} \int_a^b g(x)dx$$

2/ L'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$ eſt un sous-ensemble des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 23.— *Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $(s_n,t_n)_n$ désigne une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ telle que $\lim_n \pi(s_n) = 0$ alors*

$$\lim_n D_{\sup}(f,s_n) = \lim_n D_{\inf}(f,s_n) = \lim_n R_{(s_n,t_n)}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve : D'après le lemme 17, on a

$$D_{\inf}(f,s_n) \leq R_{(s_n,t_n)}(f) \leq D_{\sup}(f,s_n)$$

Puisque $\pi(s_n) \to 0$, la propriété iii) du théorème 19 montre les deux suites $D_{\inf}(f,s_n)$ et $D_{\sup}(f,s_n)$ sont adjacentes (et donc convergentes). Ainsi,

$$\lim_n D_{\sup}(f,s_n) = \lim_n D_{\inf}(f,s_n) = \lim_n R_{(s_n,t_n)}(f)$$

Maintenant, la propriété ii) du théorème 19 assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il exiſte $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > N, \ \left|\int_a^b f(x)dx - R_{(s_n,t_n)}(f)\right| < \varepsilon$$

car $\lim_n \pi(s_n) = 0$. On en déduit finalement que $R_{(s_n,t_n)}(f)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f$.

Exemple de fonction Riemann-intégrable 24.— On définit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & 0 \text{ si } t \notin \mathbb{Q} \text{ ou } t = 0 \\ & = & 1/q \text{ si } t \in \mathbb{Q}^* \text{ avec } t = p/q \text{ la forme irreductible de la fraction} \end{array}$$

La fonction f est intégrable et d'intégrale nulle. En effet, si l'on pose $\varepsilon > 0$, on considère alors l'ensemble $A_\varepsilon = \{t \in [0,1]/f(t) > \varepsilon\}$.

Si $t \in A_\varepsilon$ alors $t \in \mathbb{Q}$ et si l'on pose $t = p/q$ (forme irréductible) on a alors $1/q > \varepsilon$ et, par suite, $0 \le p \le q < 1/\varepsilon$. On en déduit que l'ensemble A_ε est fini que l'on peut donc énumérer $A_\varepsilon = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ avec $x_i < x_{i+1}$. Comme $1 \in A_\varepsilon$ on a $x_n = 1$ et, si l'on pose $x_0 = 0$, on obtient alors une subdivision de $[0,1]$.

On définit alors une fonction en escalier f_ε de la manière suivante : si $t \in]x_i, x_{i+1}[$, on pose $f_\varepsilon(t) = 0$ et si $t = x_i$ on pose $f_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$. Soit g_ε la fonction constante égale à ε sur $[a,b]$. On a alors

$$\begin{array}{lllll} t \notin A & \Longrightarrow & f(t) < \varepsilon = g_\varepsilon & \Longrightarrow & |f(t) - f_\varepsilon(t)| \le g_\varepsilon \\ t \in A & \Longrightarrow & f(t) = f_\varepsilon(t) & \Longrightarrow & |f(t) - f_\varepsilon(t)| = 0 \le g_\varepsilon \end{array}$$

ce qui montre que

$$f_\varepsilon - g_\varepsilon \le f(t) \le f_\varepsilon + g_\varepsilon$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 2g_\varepsilon(t) < 2\varepsilon$, on en déduit que f est intégrable (par le i) du théorème 19) et que

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

Le caractère borné des fonctions intégrables n'est pas caractéristique :

Exemple de fonction bornée non Riemann-intégrable : Considérons la fonction caractéristique des rationnels $f = \mathbf{1}_\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$. Considérons $\varepsilon = 1/2$ et $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense, pour tout $i = 1, \cdots, n$ il existe $x \in]x_{i-1}, x_i[$ tel que $x \in \mathbb{Q}$, donc $\displaystyle\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$. De même comme le complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est dense, on a $\displaystyle\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$. Par conséquent, quelle que soit la subdivision s, on a

$$D_{\sup}(f,s) - D_{\inf}(f,s) = 1 > 1/2 > \varepsilon$$

ce qui met en défaut la propriété iii) du théorème 19.

1.4 Propriétés élémentaires.

1.4.1 Propriétés fondamentales.

Les propriétés qui suivent, découlent des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 25.— *L'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ stable par passage à la valeur absolue. L'application de $\mathscr{I}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire.*

Preuve : Soient f et g deux fonctions intégrables et α un réel. Si (s,t) désigne une subdivision pointée de $[a,b]$, alors on a

$$R_{(s,t)}(f + \alpha g) = R_{(s,t)}(f) + \alpha R_{(s,t)}(g)$$

$f + \alpha g$ est donc intégrable et

$$\int_a^b (f + \alpha g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \alpha \int_a^b g(x)dx$$

Nous verrons au corollaire 58 à venir que si $f \in \mathscr{I}([a,b])$ alors $|f| \in \mathscr{I}([a,b])$.

Corollaire 26.— *Soit $f \in \mathscr{I}([a,b])$. Si g désigne une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $(x_1,\cdots,x_n) \in [a,b]^n$ vérifiant $\forall x \in [a,b]/\{x_1,\cdots,x_n\}$, $g(x) = f(x)$ alors g est intégrable et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

(Autrement dit, on ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction si on change cette fonction en un nombre fini de points)

Preuve : La fonction $h = f - g$ est une fonction en escalier d'intégrale nulle, car nulle sauf en un nombre fini de points. D'après la proposition précédente, $g = f + h$ est donc intégrable et $\int g = \int f$.

Proposition 27.— *Soient $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $s : a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. On a*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_{|[c_{i-1},c_i]}(x)dx$$

Preuve : Si l'on pose

$$\begin{array}{rcl} f_{|\widehat{[c_{i-1},c_i]}}(x) & = & f(x) \text{ si } x \in [c_{i-1},c_i[\\ & = & 0 \text{ sinon} \end{array}$$

on a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{|\widehat{[c_{i-1},c_i]}}(x)$ $x \in [a,b[$. Comme $\int_a^b f_{|\widehat{[c_{i-1},c_i]}}(x)dx = \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_{|[c_{i-1},c_i]}(x)dx$, on en déduit, par linéarité,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_{|[c_{i-1},c_i]}(x)dx$$

Proposition 28.— *Si f est une fonction intégrable et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

Preuve : D'après la proposition 23, si $(s_n,t_n)_n$ est une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$, alors

$$\lim_n R_{(s_n,t_n)}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour tout entier n, la somme $R_{(s_n,t_n)}(f)$ est positive, le résultat s'obtient alors par passage à la limite des inégalités.

Corollaire 29.— *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et telles que $f \geq g$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, on a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve : La proposition précédente assure que $\int_a^b (f-g)(x)dx \geq 0$ et, par linéarité, on en déduit que

$$\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

On sait que la fonction $|f|$ est intégrable et, comme $-|f| \leq f \leq |f|$, on en déduit que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Proposition 30.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, intégrable et positive, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$$

Preuve : Soit $x_0 \in [a,b]$ un point tel que $f(x_0) > 0$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, par continuité de f en x_0, on déduit l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ on ait $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$.

Soit alors e la fonction en escalier définie par $e(x) = \dfrac{f(x_0)}{2}$ si $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et $e(x) = 0$ sinon. Il est clair que $f(x) \geq e(x)$ et donc, d'après le corollaire 29, on a

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b e(x)dx = 2\alpha \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

ce qui est absurde.

Remarque 31.— Cette proposition n'est bien évidemment valable que dans le cas où f est continue (il suffit de prendre une fonction nulle sauf en un point pour le voir!).

1.4.2 Intégrales orientées.

Définition 32.— *Soit a et b deux réels tels que $b < a$ et f une fonction intégrable sur $[b,a]$. On pose par définition*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

De même on pose

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 33.— *Soient $b < a$.*

1/ L'application de $\mathscr{I}([b,a])$ dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est linéaire.

2/ Si $f \in \mathscr{I}([b,a])$ et f positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

3/ Si $f \in \mathscr{I}([b,a])$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |\int_a^b |f(x)|dx| = \int_b^a |f(x)|dx$.

Preuve : Immédiat.

Proposition 34.— (Relation de Chasles) *Soient S un segment et f une fonction intégrable sur S. Si a,b,c désignent trois points de S, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Preuve : Immédiat.

1.4.3 Sommes de Riemann particulières.

On a vu à la proposition 23, que si f est une fonction intégrable et si $(s_n,t_n)_n$ est une suite de subdivisions pointées de pas convergeant vers 0, alors la suite des sommes de Riemann associées convergeait vers l'intégrale de f. Certaines de ces sommes sont remarquables :

Proposition 35.— *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors les suites*

$S_n^{sup}(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\dfrac{(b-a)}{n}\right)$ (Somme de Riemann à pas régulier, en les points supérieurs)

$S_n^{inf}(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$ (Somme de Riemann, à pas régulier, en les points inférieurs)

$S_n^{med}(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\dfrac{(b-a)}{2n}\right)$ (Somme de Riemann, à pas régulier, en les points médiants)

convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemple : (Nous verrons plus loin qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ est intégrable et que si F désigne une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Si l'on pose $a = 1$ et $b = 2$ et que l'on considère la fonction $f(x) = 1/x$ sur $[1,2]$ alors

$$S_n^{\inf}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(1+\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n+i}$$

et donc $u_n = S_n^{\inf}(f) + \frac{1}{2n}$. La fonction f est continue et $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive de f, on a donc

$$\lim_n u_n = \lim_n S_n^{\inf}(f) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2)$$

2 Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables.

Il apparait intuitivement, notament en considérant les sommes de Riemann que pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit intégrable au sens de Riemann, il faut que celle-ci est un nombre "raisonnable" de points de discontinuité. L'objet de cette partie est de montrer que la Riemann-intégrabilité dépend exclusivement de l'ensemble des discontinuités des fonctions considérées.

2.1 Caractérisation de Lebesgues.

2.1.1 Ensemble négligeable, propriétés vraies presque partout.

Définition 36.— *Soit $E \subset \mathbb{R}$, on dit que E est un ensemble négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés $(]a_i, b_i[)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que*

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty}]a_i, b_i[\quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

Remarque 37.— Une conséquence immédiate de la définition est que si A est négligeable et $B \subset A$, alors B est négligeable.

Lemme 38.— *Tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.*

Preuve : Soit E un ensemble dénombrable. On peut donc écrire E comme la réunion d'une suite de réels $(e_n)_n$. Fixons $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 0$, posons $a_n = e_n - \varepsilon/2^{n+3}$ et $b_n = e_n + \varepsilon/2^{n+3}$. Il est clair que

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty}]a_i, b_i[$$

mais, comme $b_n - a_n = \varepsilon/2^{n+2}$, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n) = \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et ainsi, E est bien négligeable.

Lemme 39.— *Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Preuve : Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensemble négligeable. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés $(]a_i^n, b_i^n[)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que

$$E_n \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty}]a_i^n, b_i^n[\quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} (b_i^n - a_i^n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

L'ensemble des intervalles $(]a_i^n, b_i^n[)_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$ est dénombrable, on peut donc l'énumérer en une suite d'intervalle $(]\alpha_k, \beta_k[)_k$. On a

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{i=0}^{+\infty}]a_i^n, b_i^n[= \bigcup_{k=0}^{+\infty}]\alpha_k, \beta_k[$$

Maintenant $\beta_k - \alpha_k$ est toujours positif, donc on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \varepsilon$$

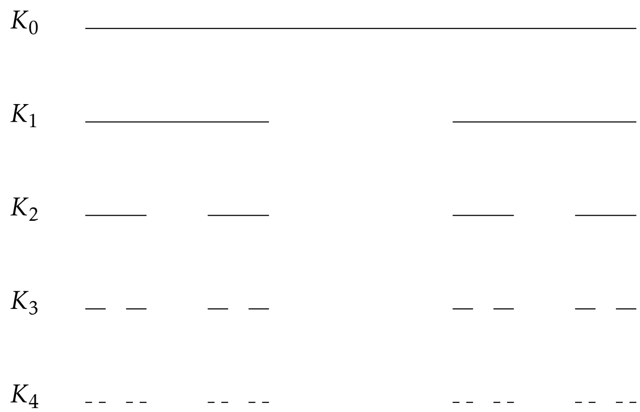
et ainsi, $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$ est négligeable.

Si les ensembles dénombrables sont négligeables, la réciproque n'est pas vraie. Un des exemples les plus célèbre est celui de l'ensemble triadique de Cantor : on définit, par récurrence, une suite de parties de $[0,1]$ de la manière suivante :

- $K_0 = [0,1]$
- $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$

• Si pour $n \geq 1$, $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k^n/3^n, b_k^n/3^n]$ où les réels a_k^n et b_k^n sont tels que $(a_k^n/3^n, b_k^n/3^n) \in [0,1]^2$ et $a_1^n/3^n < b_1^n/3^n < a_2^n/3^n < b_2^n/3^n < \cdots$ alors on pose, $K_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} [a_k^{n+1}/3^{n+1}, b_k^{n+1}/3^{n+1}]$, avec $a_{2k-1}^{n+1} = 3a_k^n$, $a_{2k}^{n+1} = 3a_k^n + 2$, $b_{2k-1}^{n+1} = 3b_k^n - 2$, $b_{2k}^{n+1} = 3b_k^n$ pour $k = 1, \cdots 2^n$.

De manière générale, pour passer de K_n à K_{n+1}, on prend chaque segment de K_n, on le "coupe" en trois parties égales et on retire celle du milieu :



La suite (K_n) est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de fermés de $\mathbb{R}$. L'ensemble triadique de Cantor est alors la partie $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$. Comme le suggère la figure ci-dessus, cet ensemble figure dans ce que l'on appelle les "objets fractals".

Pour justifier l'adjectif "triadique", il faut voir que K est exactement l'ensemble des réels qui ont un développement triadique, ne faisant pas apparaitre de 1 :

$$x \in K \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad a_k = 0,2$$

Le développement que l'on considère ici n'est pas forcément propre. Par exemple, le réel 1/3 a pour développement propre $1,0,0,\cdots$ et pourtant $1/3 \in K$ car on a aussi $1/3 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{3^k}$.

Pour montrer cette caractérisation de K, il suffit de remarquer que

$$x \in K_n \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad a_k = 0,2 \; pour \; k \leq n \; et \; a_k = 0,1,2 \; pour \; k > n$$

On déduit de cette caractérisation que K n'est pas dénombrable, car K est alors en bijection avec l'ensemble $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ qui est lui-même en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

L'ensemble K, étant une intersection de fermés, est fermé et, comme il est borné, il est compact.

Enfin, si $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(2/3)^n < \varepsilon/2$. Si l'on considère les intervalles $]a_k^n, b_k^n[$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{2^n} (b_k^n - a_k^n) = (2/3)^n < \varepsilon/2$$

Soit $\alpha = \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$, considérons les intervalles $]a_k - \alpha, a_k + \alpha[$ et les intervalles $]b_k - \alpha, b_k + \alpha[$. On a

$$\sum_{k=1}^{2^n} ((a_k + \alpha) - (a_k - \alpha)) = \sum_{k=1}^{2^n} ((b_k + \alpha) - (b_k - \alpha)) = 2^n (2\alpha) = \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$K \subset K_n \subset \bigcup_{k=1}^{2^n}]a_k^n, b_k^n[\cup \bigcup_{k=1}^{2^n}]a_k - \alpha, a_k + \alpha[\cup \bigcup_{k=1}^{2^n}]b_k - \alpha, b_k + \alpha[$$

et

$$\sum_{k=1}^{2^n} (b_k^n - a_k^n) + \sum_{k=1}^{2^n} ((a_k + \alpha) - (a_k - \alpha)) + \sum_{k=1}^{2^n} ((b_k + \alpha) - (b_k - \alpha)) < \varepsilon$$

Il s'ensuit que K est une partie négligeable.

Pour résumer, K est compact, indénombrable et négligeable.

Définition 40.— *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie une propriété ponctuelle "presque partout" sur $[a,b]$, si elle la vérifie sur un ensemble de points $A \subset [a,b]$ dont le complémentaire $[a,b] - A$ est négligeable.*

Théorème 41.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. Les propositions suivantes*

i) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0,$

ii) f est presque partout nulle sur $[a,b]$,

iii) l'ensemble des points où f ne s'annule pas est une partie d'intérieur vide,

sont équivalentes.

Preuve : On pose $E = \{x \in [a,b] / \ f(x) \neq 0\}$. Pour un entier $n \geq 1$ donné, on considère la subdivision à pas régulier $\sigma_n : x_0 < \cdots < x_n$ (i.e. pour tout $k = 0, \cdots, n$, $x_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$) et l'on note $D^n = D_{\sup}(f, \sigma_n)$ la somme de Darboux supérieure. Puisque f est intégrable, on a $\displaystyle\lim_n D^n = \int_a^b f(x)dx$.

non $ii) \Longrightarrow$ non $i)$ Pour tout entier $\ell \geq 1$, considérons l'ensemble $E_\ell = \{x \in [a,b] / \ f(x) \geq 1/n\}$. On a $\bigcup_{\ell \geq 1} E_\ell = E$ et, en appliquant le lemme 39, on en déduit qu'il existe un entier $\ell_0 \geq 1$ tel que E_{ℓ_0} ne soit pas un ensemble négligeable. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles ouverts et bornés $(]a_i, b_i[)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que $E \subset \displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty}]a_i, b_i[$ on ait $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} (b_i - a_i) \geq \varepsilon$.

Considérons les ensembles d'indices

$$A = \left\{ k = 0, \cdots, n-1 / \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \geq 1/\ell_0 \right\}$$

et $B = \{0, \cdots, n-1\} - A$. Si $x \in E_{\ell_0}$, il existe un indice $k \in A$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$ et donc $E_{\ell_0} \subset \displaystyle\bigcup_{k \in A} [x_k, x_{k+1}]$.

On en déduit que

$$\sum_{k \in A} (x_{k+1} - x_k) \geq \varepsilon$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} D^n &= \sum_{k \in A} (x_{k+1} - x_k) \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) + \sum_{k \in B} (x_{k+1} - x_k) \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \\ &\geq \sum_{k \in A} (x_{k+1} - x_k) \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \geq \frac{1}{\ell_0} \sum_{k \in A} (x_{k+1} - x_k) \geq \frac{\varepsilon}{\ell_0} \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \frac{\varepsilon}{\ell_0} > 0$.

$ii) \Longrightarrow iii)$ Immédiat compte-tenu du fait qu'un ensemble négligeable est d'intérieur vide.

$iii) \Longrightarrow i)$ Fixons un entier $n \geq 1$. Puisque E est d'intérieur vide, pour tout $k = 0, \cdots, n-1$, il existe $t_k \in]x_k, x_{k+1}[- E$ (en particulier $f(t_k) = 0$). Si l'on considère alors la subdivision pointée (s_n, p_n) avec $p_n = (t_0, \cdots, t_{n-1})$, alors $R_{(s_n,p_n)}(f) = 0$. En appliquant la proposition 23, on trouve finalement

$$\lim_n R_{(s_n,t_n)}(f) = \int_a^b f(x)dx = 0$$

Remarque 42.— Un ensemble négligeable est d'intérieur vide, mais la réciproque de cette propriété est fausse : l'ensemble $E = [0,1] - \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide (puisque $\mathbb{Q}$ est dense) mais n'est visiblement pas négligeable. L'équivalence $ii) \Longleftrightarrow iii)$ du théorème précédent pourrait ainsi être trompeuse. Elle a lieu car l'ensemble E que l'on considère ici est celui des points où une fonction intégrable ne s'annule pas, ceci limitant considérablement le choix pour E.

Corollaire 43.— *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Si $f = g$ presque partout sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Réciproquement, si $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0$, alors $f = g$ presque partout.*

Corollaire 44.— *Soient f et g deux fonctions intégrables telles que $\Delta = \{x \in [a,b],\ f(x) \neq g(x)\}$ soit un ensemble dénombrable. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Remarque 45.— Il faut faire attention à ce dernier corollaire et ne pas tenter d'y lire un énoncé du genre: *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et que l'on change les valeurs de f en un nombre dénombrable de points alors l'intégrale de f ne change pas.* En effet, il faut s'assurer d'abord qu'en changeant certaines valeurs de f on garde une fonction intégrable: La fonction nulle est bien intégrable, d'intégrale nulle; mais la fonction caractéristique des rationnels n'est pas intégrable et diffère pourtant de la fonction nulle seulement sur un ensemble dénombrable ($\mathbb{Q} \cap [0,1]$).

Sur $\mathscr{I}([a,b])$, on définit une relation d'équivalence $\equiv$, par

$$f \equiv g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout}$$

On considère alors l'ensemble quotient

$$\widetilde{\mathscr{I}}([a,b]) = \mathscr{I}([a,b]) / \equiv$$

Si $\widetilde{f}$ est un élément de cet espace, on peut définir $\int_a^b \widetilde{f}(x)dx$ comme étant $\int_a^b f(x)dx$ où $f \in \mathscr{I}([a,b])$ est un représentant de $\widetilde{f}$ (d'après le corollaire 43, la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de f).

Il est clair que si $f \equiv g$ alors $|f| \equiv |g|$, ainsi si $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{I}}([a,b])$, on définit $\int_a^b |\widetilde{f}(x)|dx$ comme étant l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ où f représente $\widetilde{f}$. On vérifie alors que $\widetilde{\mathscr{I}}([a,b])$ est un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel, et que l'application de $\widetilde{\mathscr{I}}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ qui à $\widetilde{f}$ associe $\int_a^b |\widetilde{f}(x)|dx$ est une norme sur $\widetilde{\mathscr{I}}([a,b])$.

2.1.2 Oscillation d'une fonction.

Définition 46.— *Soit $A \subset \mathbb{R}$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $V \subset A$, on définit l'oscillation de f sur V comme étant le réel*

$$\Omega(f,V) = \sup_{x \in V} f(x) - \inf_{x \in V} f(x)$$

On définit l'oscillation de f en un point $x \in A$ comme étant la valeur inférieure des oscillations de f sur V quand V parcourt l'ensemble des voisinage de x:

$$\omega(f,x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \Omega(f,V)$$

Remarques 47.— 1/ $\Omega(f,V)$ est toujours un nombre positif, ce qui justifie l'existence de $\omega(f,x)$ en tout point.

2/ Lorsque $x \in A$ est intérieur à A, on voit que $\omega(f,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Omega(f,x,\varepsilon) = \inf_{\varepsilon > 0} \Omega(f,x,\varepsilon)$ où $\Omega(f,x,\varepsilon) = \Omega(f,]x-\varepsilon,x+\varepsilon[) = \sup_{x-\varepsilon<t<x+\varepsilon} f(t) - \inf_{x-\varepsilon<t<x+\varepsilon} f(t)$.

Proposition 48.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $x \in A$. Les propositions suivantes*

i) f est continue en x,

ii) $\omega(f,x) = 0$,

sont équivalentes.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$ Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in A \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $|f(x)-f(t)| < \varepsilon/2$, en particulier $V = A \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ est un voisinage de x dans A et $\Omega(f,V) \leq \varepsilon$, donc $\omega(f,x) \leq \varepsilon$ et donc $\omega(f,x) = 0$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Soit $\varepsilon > 0$, par définition même de $\omega(f,x)$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\Omega(f,V) < \varepsilon$. Or $\forall t \in V$, $|f(t) - f(x)| \leq \Omega(f,V) < \varepsilon$, donc f est continue en x.

Lemme 49.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $x \in A$ et $h > 0$. L'ensemble D_h des points $x \in A$ tels que $\omega(f,x) \geq h$ est un fermé de A.*

Preuve : Soit x un point adhérent à D_h, par définition, tout voisinage de x rencontre D_h. Fixons un tel voisinage V et soit $y \in V \cap D_h$ tel que V soit aussi un voisinage de y, alors $\Omega(f,V) \geq \omega(f,y) \geq h$. Donc quelque soit V voisinage de x, on a $\Omega(f,V) \geq h$, donc $\omega(f,x) \geq h$, c'est-à-dire $x \in D_h$.

2.1.3 Le théorème de Lebesgue.

Théorème 50.— (Lebesgue) *Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes*

i) f est intégrable,

ii) f est bornée et l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable (i.e. f est continue presque partout),

sont équivalentes.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$ Il est déjà clair que f est bornée. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour $h > 0$, on note D_h l'ensemble des points x de $[a,b]$ tels que $\omega(f,x) \geq h$. Cet ensemble est fermé d'après le lemme 49 et, en vertue de la proposition 48, on a $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}$.

Soit alors $n > 0$ et $\varepsilon > 0$, puisque f est intégrable, il existe une subdivision $s : s_0 < \cdots < s_m$ de $[a,b]$ telle que

$$\sum_{i=1}^{m} (s_i - s_{i-1})\Big(\sup_{x \in [s_{i-1},s_i]} f(x) - \inf_{x \in [s_{i-1},s_i]} f(x)\Big) = \sum_{i=1}^{m} (s_i - s_{i-1})\Omega(f,[s_{i-1},s_i]) < \frac{\varepsilon}{2n}$$

Si l'on pose $I = \{i = 1,\cdots,m / \ [s_{i-1},s_i] \cap D_{1/n} \neq \emptyset\}$, on a alors

$$\sum_{i \in I} (s_i - s_{i-1})\Omega(f,[s_{i-1},s_i]) < \frac{\varepsilon}{2n}$$

et donc
$$\sum_{i\in I}(s_i - s_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$
Soit $\alpha = \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$ et les intervalles $V_i =]s_i - \alpha, s_i + \alpha[$. Il est clair que
$$D_{1/n} \subset \bigcup_{i\in I}]s_{i-1}, s_i[\cup \bigcup_{i=0}^{n} V_i$$
mais comme
$$\sum_{i\in I}(s_i - s_{i-1}) + \sum_{i=0}^{n}((s_i + \alpha) - (s_i - \alpha)) < \varepsilon$$
on en déduit que $D_{1/n}$ est négligeable et, puisque D est la réunion des $D_{1/n}$, il est lui aussi négligeable (lemme 39).

$ii) \Longrightarrow i)$ Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f et fixons $\varepsilon > 0$. Comme D est négligeable, il existe une suite d'intervalle ouverts $]a_n, b_n[$ qui recouvre D et tel que
$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \varepsilon$$

Soit x un point de continuité, il existe donc $h_x > 0$ tel que $\Omega(f,]x - h_x, x + h_x[) < \varepsilon$. L'ensemble des intervalles $V_{h_x} =]x - h_x, x + h_x[$ recouvre l'ensemble $[a, b] - \cup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i[$ qui est compact et l'on peut donc on peut extraire un recouvrement fini $V_{h_{x_1}}, \cdots, V_{h_{x_p}}$. Maintenant les ouverts $V_{h_{x_1}}, \cdots, V_{h_{x_p}}$ et $]a_i, b_i[$ recouvrent $[a, b]$ qui est compact, donc il existe un recouvrement fini de $[a, b]$. On suppose pour plus de clarté que ce recouvrement soit $V_{h_{x_1}}, \cdots, V_{h_{x_p}},]a_0, b_0[, \cdots,]a_q, b_q[$. Comme ces ouverts sont des intervalles ouverts, il existe une subdivision $s : s_0 < \cdots < s_n$ de $[a, b]$ tel que pour tout $i = 1, \cdots, n$, l'intervalle $]s_{i-1}, s_i[$ soit entierement contenu dans un $V_{h_{x_k}}$ ou dans un $]a_l, b_l[$.

Notons $J = \{i = 1, \cdots, m\ \exists k,\ ]s_{i-1}, s_i[\subset V_{h_{x_k}}\}$ et $K = \{i = 1, \cdots, m\ \exists k,\ ]s_{i-1}, s_i[\subset]a_k, b_k[\}$. Alors, on a
$$\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) = \sum_{i\in I}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) + \sum_{i\in K}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i])$$
et
$$\sum_{i\in I}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon(b - a)$$
Comme f est bornée, on a toujours $\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq 2\sup|f(x)|$ et donc
$$\sum_{i\in K}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq 2\sup|f(x)|\sum_{i\in K}(x_i - x_{i-1}) \leq 2\sup|f(x)|\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) < 2\varepsilon\sup|f(x)|$$
Ainsi
$$\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_{i-1})\Omega(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon((b - a) + 2\sup|f(x)|)$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, f vérifie bien les condition du théorème 19 et est donc intégrable.

2.2 Conséquences.

Proposition 51.— *Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.*

1/ La fonction fg est intégrable.

2/ S'il existe un réel $\mu > 0$ tel que pour tout $x \in [a, B]$, $|f(x)| \geq \mu$, alors la fonction $1/f$ est intégrable.

Corollaire 52.— *L'espace $\mathscr{I}([a, b])$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.*

Théorème 53.— *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $g : K \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f([a,b]) \subset K$. Si $g \circ f$ est bornée, alors $g \circ f \in \mathscr{I}([a,b])$.*

En particulier, si K est compact, alors $g \circ f$ est intégrable.

Preuve :

Remarques 54.— 1/ Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$. Soit $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ définit par $g(x) = 1/x$. f est intégrable sur $[0,1]$, g est continue sur $]0,1]$ et $f([0,1]) \subset]0,1]$. Alors $g \circ f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $g \circ f(0) = 1$, et donc $g \circ f$ n'est pas intégrable car elle n'est pas bornée. Cette pathologie provient du fait que $]0,1]$ n'est pas compact et qu'il est impossible de trouver un compact K sur lequel g est continue et $f([0,1]) \subset K$.

2/ Le contre-exemple précédent fonctionne notamment parce que l'on s'est arrangé pour trouver une fonction g non bornée. Nous allons donner un nouveau contre exemple qui a pour but de montrer que la composée deux fonctions intégrables n'est pas toujours intégrables.

Reprenons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \notin \mathbb{Q}$, et si $t \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(t) = 1/q$ avec $q \in \mathbb{N}$ où $t = p/q$ est la forme irreductible de la fraction, et enfin $f(0) = 0$.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$. Ces deux fonctions sont intégrables sur $[0,1]$, mais $g \circ f$ n'est pas intégrable. En effet, soit $x \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$ et donc $g \circ f(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}^*$, avec $x = p/q$ alors $f(x) = 1/q$ et donc $g \circ f(x) = 1$. Enfin $g \circ f(0) = 0$. Donc sur $]0,1]$, $g \circ f$ est la fonction caractéristique des rationnels. Comme on l'a vu, cette fonction n'est pas intégrable.

Corollaire 55.— *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$.*

1/ Les fonctions $x \longmapsto \exp(f(x))$, $x \longmapsto \cos(f(x))$, $x \longmapsto \sin(f(x))$ etc. sont intégrables sur $[a,b]$.

2/ Si f est positive, alors pour tout $\alpha \in [0,+\infty[$, la fonction f^α est intégrable.

3/ Si f est minorée par une constante $\mu > 0$, alors la fonction $x \longmapsto \ln(f(x))$ est intégrable et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f^α est intégrable.

Preuve :

Proposition 56.— *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ alors la fonction $\sup(f,g)$ l'est aussi.*

Preuve : Soit E_f et E_g les ensembles de points de discontinuité de f et de g. Si $x_0 \notin E_f \cup E_g$, alors f et g sont continues en x_0. Supposons que $f(x_0) \geq g(x_0)$, alors, par continuité, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc sur V, on a $\sup(f,g) = f$, ce qui montre que $\sup(f,g)$ est continue en x_0. Ainsi l'ensemble $E_{\sup(f,g)}$ des points de discontinuité de $\sup(f,g)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $E_f \cup E_g$. Les fonctions sont intégrables, donc E_f et E_g sont négligeables (théorème 50) et donc, on en déduit par le lemme 39 que $E_f \cup E_g$ est négligeable. Il s'ensuit que $E_{\sup(f,g)}$ est aussi un ensemble négligeable. Pour finir, puisque f et g sont intégrables, elles sont bornées, il en est donc de même de $\sup(f,g)$. Par application du théorème 50 on en déduit finalement l'intégrabilité de $\sup(f,g)$.

Remarque 57.— On a la même propriété pour $\inf(f,g)$.

Corollaire 58.— *Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$ alors $|f| \in \mathscr{I}([a,b])$.*

Preuve : On pose $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \inf(f,0)$ (on a alors $f = f^+ + f^-$). D'après la proposition précédente, f^+ et f^- sont intégrables et il suffit alors de remarquer que

$$|f| = \frac{f^+ - f^-}{2}$$

pour conclure.

Remarque 59.— La réciproque de ce corollaire est fausse. En effet, la fonction $f(x)-1/2$ où f désigne la fonction caractéristique des rationnels sur $[0,1]$, n'est pas intégrable et pourtant, $|f(x)+1/2| = 1/2$ donc $|f(x)+1/2|$ est intégrable.

2.3 Mesure de Riemann.

On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui sont réunions disjointes d'un nombre fini de segment. Si $E \in \mathscr{M}$, il existe une unique suite $a_0 \leq b_0 < a_1 \leq b_1 < \cdots < a_n \leq b_n$ telle que

$$E = \bigcup_{i=0}^{n} [a_i, b_i]$$

On définit alors la "mesure" de E comme étant le réel

$$\mu(E) = \sum_{i=0}^{n} (b_i - a_i)$$

Etant donnée une partie non vide bornée A de $\mathbb{R}$ et un élément $E \in \mathscr{M}$, on constate que si $E \subset A$, alors $\mu(E)$ est bornée par une constante qui ne dépend que de E. Ainsi le réel

$$\mu^-(A) = \sup_{E \in \mathscr{M}, E \subset A} \mu(E)$$

existe. On appelle ce réel "la mesure intérieure" de la partie E. De même, on définit "la mesure extérieure" de la partie E comme étant le réel

$$\mu^+(A) = \inf_{E \in \mathscr{M}, A \subset E} \mu(E)$$

Lemme 60.— *Soient A et B des parties bornées non vides.*

1/ $\mu^-(A) \leq \mu^+(A)$.

2/ Si $A \subset B$, alors $\mu^-(A) \leq \mu^-(B)$ et $\mu^+(A) \leq \mu^-(A)$.

Preuve :

Définition 61.— *Une partie non vide et bornée A de $\mathbb{R}$ est dite "mesurable au sens de Riemann" si $\mu^-(A) = \mu^+(A)$. Dans cette situation le réel $\mu(A) = \mu^-(A) = \mu^+(A)$ est appelé "la mesure de Riemann" de la partie A.*

On étend la définition de μ en posant $\mu(\emptyset) = 0$.

Proposition 62.— *Soit $A \subset B \subset C$ trois parties bornées. Si A et C sont mesurable au sens de Riemann et que $\mu(A) = \mu(C)$, alors B est mesurable au sens de Riemann et $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.*

Preuve : Puisque A et C sont mesurables au sens de Riemann, d'après le lemme 60, on a alors

$$\mu(A) = \mu^-(A) \leq \mu^-(B) \leq \mu^-(C) = \mu(C) = \mu(A) = \mu^+(A) \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(C) = \mu(C) = \mu(A)$$

Les inégalités sont donc des égalités, en particulier on a $\mu^-(B) = \mu^+(B)$ (et donc B est mesurable au sens de Riemann) et $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.

Théorème 63.— *Pour qu'une partie non vide et bornée A de $\mathbb{R}$ soit mesurable au sens de Riemann, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit Riemann-intégrable. Dans ces condition, on a*

$$\mu(A) = \int_a^b \mathbf{1}_A(x)dx$$

où $a = \inf A$ et $b = \sup A$.

Preuve :

Corollaire 64.— *Soient A et B des parties de $\mathbb{R}$ mesurables au sens de Riemann. On pose $a = \inf A$ et $b = \sup A$.*

1/ Si $B \subset A$ alors $A - B$ est mesurable au sens de Riemann et $\mu(A-B) = \mu(A) - \mu(B)$.

2/ La partie $A^c = [a,b] - A$ est mesurable au sens de Riemann et $\mu(A^c) = (b-a) - \mu(A)$.

3/ Les parties $A \cup B$ et $A \cap B$ sont mesurables au sens de Riemann et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Preuve : 1/ On a $\mathbf{1}_{A-B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$. Puisque $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ sont intégrables, la proposition 33 montre que $\mathbf{1}_{A-B}$ l'est aussi et ainsi, la partie $A - B$ est mesurable au sens de Riemann. Si l'on note $c = \inf B$ et $d = \sup B$, on a alors $[c,d] \subset [a,b]$ et $\mathbf{1}_B$ est nulle sur $[a,c[$ et $]d,b]$. On en déduit que

$$\mu(A-B) = \int_a^b \mathbf{1}_{A-B}(x)dx = \int_a^b \mathbf{1}_A(x)dx - \int_c^d \mathbf{1}_B(x)dx = \int_a^b \mathbf{1}_A(x)dx - \int_c^d \mathbf{1}_B(x)dx = \mu(A) - \mu(B)$$

2/ On applique le 1/ en considérant $A_0 = [a,b]$ et $B_0 = A$.

3/ On a $\mathbf{1}_{A\cup B} = \sup(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ et $\mathbf{1}_{A\cap B} = \inf(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$. Puisque $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ sont intégrables, la proposition 56 montre que $\mathbf{1}_{A\cup B}$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}$ le sont aussi, ce qui assure que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont mesurables au sens de Riemann.

Pour l'égalité $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, commençons par supposer que $A \cap B = \emptyset$. On a alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ et il s'ensuit que

$$\mu(A \cup B) = \int_c^d \mathbf{1}_A(x)dx + \int_c^d \mathbf{1}_B(x)dx = \mu(A) + \mu(B)$$

($c = \inf(A \cup B)$ et $d = \sup(A \cup B)$). Pour le cas général, on écrit $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$. Les parties $A - (A \cap B))$ et B sont disjointes et mesurables au sens de Riemann, en appliquant le cas particulier, on trouve

$$\mu(A \cup B) = \mu(A - (A \cap B))) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B)$$

Proposition 65.— *Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$.*

1/ Si A est compact et négligeable, alors A est mesurable au sens de Riemann et $\mu(A) = 0$.

2/ Si A est mesurable au sens de Riemann et si $\mu(A) = 0$ alors A est négligeable.

3/ Si A est mesurable au sens de Riemann alors l'adhérence $\overline{A}$ de A l'est aussi et $\mu(A) = \mu(\overline{A})$. En particulier, quand A est mesurable au sens de Riemann toute partie B vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est mesurable au sens de Riemann et de même mesure que celle de A.

Preuve :

3 Fonctions réglées.

3.1 Définition, propriétés.

Définition 66.— *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite "réglée" s'il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f. On note $\mathcal{R}eg([a,b])$ l'ensemble des fonctions réglées sur $[a,b]$.*

Lemme 67.— *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes*

i) f est réglée,

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_\varepsilon \in \mathscr{E}([a,b])$ $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$,

sont équivalentes.

Preuve : Si (f_n) converge uniformément vers f, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. En posant par exemple $f_\varepsilon = f_n$ on a la première implication.
Soit $\varepsilon = 1/n$ pour $n > 0$. Il existe une fonction en escalier f_ε telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < 1/n$. On définit $f_n = f_\varepsilon$ et on a l'autre implication.

Exemples 68.— 1/ Toute fonction en escalier est une fonction réglée.

2/ La fonction f de l'exemple 24 est une fonction réglée. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon$. Il n'y a qu'un nombre fini de rationnels de $x \in [0,1]$ tel que si x s'écrit sous la forme irréductible p/q on ait $q \leq N$ (il y en a au plus $N!$). Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ces rationnels. On définit f_ε par $f_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$, $(i = 1, \cdots, n)$ et si $x \neq x_i$ pour tout i, alors $f_\varepsilon(x) = 1/N$. Il est clair que f_ε est en escalier et que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

3/ La fonction caractéristique des rationnels sur $[0,1]$ n'est pas réglée (c'est une conséquence de la proposition 70 à venir).

Proposition 69.— *Si f est réglée sur $[a,b]$, alors f est bornée. L'ensemble $\mathcal{R}eg([a,b])$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ stable par passage à la valeur absolue. En d'autres termes, si $f, g \in \mathcal{R}eg([a,b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $(f + \alpha g), fg, |f| \in \mathcal{R}eg([a,b])$.*

Preuve : Si f est réglée, en particulier, il existe $f_1 \in \mathscr{E}([a,b])$ $\|f - f_1\|_\infty < 1$. Donc, par l'inégalité triangulaire, on a $|\|f\|_\infty - \|f_1\|_\infty| \leq \|f - f_1\|_\infty < 1$, donc

$$\|f_1\|_\infty - 1 \leq \|f\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + 1$$

f_1 étant bornée, $\|f_1\|_\infty$ est un réel donc $\|f\|_\infty$ est un réel et f est bornée.

Soient f et g deux fonctions réglées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) soit une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ qui converge uniformément vers f (resp. g). La suite $(f_n + \alpha g_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier, or $\|(f + \alpha g) - (f_n + \alpha g_n)\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + |\alpha|\|g - g_n\|_\infty$. Donc la suite $(f_n + \alpha g_n)_n$ converge uniformément vers $(f + \alpha g)$ et ainsi $\mathcal{R}eg([a,b])$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

La suite de fonctions $(f_n g_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier. Remarquons que comme $(g_n)_n$ converge uniformément vers f, la suite $\|f_n)\|_\infty$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite, alors la suite $(g_n(f - f_n))$ converge uniformément vers 0 car $\|g_n(f - f_n)\|_\infty \leq M\|g_n(f - f_n)\|_\infty$. De même, puisque f est bornée, la suite $f(g - g_n)$ converge uniformément vers 0, et comme on a $(fg - f_n g_n) = g_n(f - f_n) + f(g - g_n)$, et que $\|(fg - f_n g_n)\|_\infty \leq \|g_n(f - f_n)\|_\infty + \|f(g - g_n)\|_\infty$ alors $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers (fg). Donc (fg) est réglée.

Enfin, pour tout $x \in [a,b]$, on a $\||f(x)| - |f_n(x)|\| \leq |f(x) - f_n(x)|$ et donc

$$\||f| - |f_n|\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty$$

La suite $(|f_n|)_n$ (qui est une suite de fonctions en escalier, converge uniformément vers $|f|$ et donc $|f|$ est réglée.

La famille des fonctions réglées est un premier exemple de famille générique de fonctions intégrables :

Proposition 70.— *Toute fonction réglée f sur $[a,b]$ est intégrable. De plus, si (f_n) est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge et*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve : Soit f réglée et (f_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n tel que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On pose alors

$$g_\varepsilon(x) = g_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ et \ h_\varepsilon(x) = g_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

g_ε et h_ε sont deux fonctions en escalier telles que:

$$g_\varepsilon(x) \le f(x) \le h_\varepsilon(x) \ et \ \int_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))dx \le \varepsilon$$

Donc f est intégrable. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > N,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Pour $n > N$, on a donc

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \varepsilon$$

et donc $\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Il est naturel de se demander si l'inclusion réciproque est vraie. La réponse est non et voici un exemple. On prend K, l'ensemble triadique de Cantor, et on prend l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définit par $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = d(K,x)$ si $x \notin K$ ($d(K,x)$ désigne la distance de x à K, i.e. $d(K,x) = \inf_{t\in K} |x-t|$).

On va montrer que l'ensemble des points de discontinuité de cette fonction est exactement K. Comme K est négligeable et que f est bornée, f sera donc intégrable au sens de Riemann. Si f était réglée, K serait dénombrable (conséquence de la proposition 76 à venir), ce qui n'est pas le cas.

Soit $x_0 \notin K$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \cap K = \emptyset$ car sinon x_0 serait adhérent à K et par suite comme K est fermé, x_0 serait élément de K.

Soit $x_0 \in K$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \notin K$ tel que $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$. En effet sinon, il existerait un intervalle $]t_1, t_2[$ non vide inclus dans K, ce qui contredirait que K est négligeable. Il existe donc une suite x_n de réel de $[0,1]$ telle que $\lim_n x_n = x_0$ et $x_n \notin K$. Comme $d(K,x_n) \le |x_n - x_0|$, on a alors $\lim_n f(x_n) = 0$ mais comme $f(x) = 1$, on en déduit que f n'est pas continue en x_0.

Soit $x_0 \notin K$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \cap K = \emptyset$. En effet, sinon x_0 serait adhérent à K et comme K est fermé on aurait $x_0 \in K$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset V$. Les ensembles $K_\alpha^- = \{t \in K,\ t < x_0 - \alpha\}$ et $K_\alpha^+ = \{t \in K,\ t > x_0 + \alpha\}$ sont fermés et non vide car $1 \in K$ et $0 \in K$. On a $K = K_\alpha^- \cup K_\alpha^+$, et K_α^- contient sa borne supérieure t^- et K_α^+ contient sa borne supérieure t^+. Il est clair que $d(x_0,K) = \inf(|x_0 - t^+|, |x_0 - t^-|)$. Deux cas se présentent :

1) $|x_0 - t^+| = |x_0 - t^-|$. On a pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $d(x,k) = \inf(|x - t^+|, |x - t^-|)$ (on suppose que la borne inférieure est $|x-t^+|$. Alors $d(x,K) - d(x_0,K) = |x-t^+| - |x_0-t^+|$, on a donc $|d(x,K) - d(x_0,K)| \le |x-x_0|$. Dans le cas où $d(x,K) = |x - t^-|$ on aurait la même chose, et ainsi f est continue en x_0.
2) $|x_0-t^+| > |x_0-t^-|$ (par exemple). On a toujours pour tout $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $d(x,k) = \inf(|x-t^+|, |x-t^-|)$. Soit $\varepsilon = (t^+ - t^-)/2$, alors pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $d(K,x) = |x - t^-|$, et alors comme précédement, $|d(K,x) - d(K,x_0)| \le |x - x_0|$ donc f est continue en x_0.

3.2 Exemples.

L'interêt des fonctions réglées, est que la majorité des fonctions "classiques" le sont.

Lemme 71.— *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est réglée.*

Preuve : D'après le théorème de Heine, la fonction f étant continue et l'intervalle considéré étant compact, f est uniformément continue. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si p est un entier tel que $(b-a)/p < \alpha$, on considère alors la subdivision à pas régulier $s : a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ de $[a,b]$ ($a_j = a + j\frac{b-a}{p}$ pour $j = 0, \cdots, p$) et la fonction e_ε définie par, $e_\varepsilon(b) = f(b)$ et

$$e_\varepsilon(x) = f(a_j) \text{ pour tout } j = 0, \cdots, p-1 \text{ et tout } x \in [a_j, a_{j+1}[$$

Pour tout $i = 0, \cdots, p-1$ et tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$, on a donc

$$|e_\varepsilon(x) - f(x)| = |f(a_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ (car } |x - a_i| < \alpha)$$

et comme $e_\varepsilon(a_i) = f(a_i)$, on en déduit que $\|e_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$. La fonction e_ε étant en escalier, on en déduit finalement que f est réglée.

Définition 72.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue par morceaux si et seulement si, il existe une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ tel que pour tout $i = 1, \cdots, n$ il existe une application $f_i : [x_{i-1}, x_i]$ continue telle que $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(x) = f_i(x)$. On note $\mathscr{CM}([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.*

Proposition 73.— *On a l'inclusion $\mathscr{CM}([a,b]) \subset \mathcal{R}eg([a,b])$.*

Preuve : On reprend les notations de la définition. On se place sur $[x_{i-1}, x_i]$. Fixons $\varepsilon > 0$, d'après le lemme précédent, il existe e_i une fonction en escalier de $[x_{i-1}, x_i]$ telle que sur $]x_{i-1}, x_i[$ on ait

$$\|f_i(x) - e_i(x)\|_\infty < \varepsilon$$

Soit alors e, la fonction en escalier définit par $\forall i = 0, \cdots n$, $e(x_i) = f(x_i)$ et

$$\forall i = 1, \cdots, n \ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\ e(x) = e_i(x)$$

Il est clair que sur $[a,b]$ on a $\|e - f\|_\infty < \varepsilon$, le résultat en découle alors.

3.3 Caractérisation.

Proposition 74.— *Soit f une fonction sur $[a,b]$. Les propositions suivantes*

i) f est réglée sur $[a,b]$,

ii) f admet en tout point de $]a,b[$ une limite droite et une limite gauche, et admet une limite droite en a et une gauche en b,

sont équivalentes.

Preuve : On rappelle le théorème suivant[1] : si $]\alpha_i, \beta_i[_I$ est une famille d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i\in I}]\alpha_i, \beta_i[$. Alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $[a,b] \subset \bigcup_{j \in J}]\alpha_j, \beta_j[$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Pour $t \in [a,b]$, on note $f(t-0)$ la limite gauche de f en t et $f(t+0)$, la limite droite de f en t. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\forall t \in]a,b[$, il existe $\alpha_t > 0$ tel que $\forall x \in]t-\alpha_t, t[$, $|f(x) - f(t-0)| < \varepsilon$ et $\forall x \in]t, t+\alpha_t[$,

[1] Ce théorème est en fait la caractérisation, par l'axiome de Borel-Lebesgue, des ensembles compacts. Une démonstration de ce résultat pourra être trouvée dans tout bon cours de topologie.

$|f(x) - f(t+0)| < \varepsilon$. De même, il existe $\alpha_0 > 0$ et α_1 tel que $\forall x \in]b - \alpha_1, b[$, $|f(x) - f(1-0)| < \varepsilon$ et $\forall x \in]a, a+\alpha_0[$, $|f(x) - f(0+0)| < \varepsilon$.

La famille d'intervalles ouverts $(]t-\alpha_t, t+\alpha_t[)_{t\in]a,b[}$ vérifie $[a,b] \subset \bigcup_{t\in]a,b[}]t-\alpha_t, t+\alpha_t[\bigcup]b-\alpha_1, b[\cup]a, a+\alpha_a[$. Donc il existe $t_1, \cdots, t_{n-1}$ des points de $]a,b[$ tels que $]a,b[\subset \bigcup_{i=1,\cdots,n-1}]t_i - \alpha_{t_i}, t_i + \alpha_{t_i}[\bigcup]1-\alpha_1, 1[\cup]0, \alpha_0[$. On suppose que $a = t_0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = b$ et $t_i + \alpha_i < t_{i+1} + \alpha_{i+1}$ (il suffit de réordonner les points d'enlever les t_i tel que $]t_i - \alpha_{t_i}, t_i + \alpha_{t_i}[$ soit entièrement inclu dans un $]t_i - \alpha_{t_i}, t_i + \alpha_{t_i}[$ pour $j \neq i$ et éventuellement de prendre α_0 "plus petits"). On définit la fonction e_ε par:

Si $x \in [a, a+\alpha_0[$, $e_\varepsilon(x) = f(a+0)$.

Si $x \in [t_i + \alpha_{t_i}, t_{i+1} + \alpha_{t_{i+1}}[$ $(i = 1, \cdots, n-2)$, $e_\varepsilon(x) = f(ti+1+0)$.

Si $x \in [t_n + \alpha_{t_n}, b]$, $e_\varepsilon(x) = f(b-0)$.

e_ε est donc une fonction en escalier telle que $\|f - e_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Donc f est réglée.

$i) \Longrightarrow ii)$ Soit f une fonction réglée, et $(f_n)_n$ une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers f. Soit $x \in [a,b[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que $\forall n > N$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$. Maintenant pour tout n, f_n est en escalier, donc $\forall n \in N$, il existe $\alpha_n > 0$ et un unique $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in]x, x+\alpha_n[$, $f_n(x) = \lambda_n$. Pour $x \in [a,b[$, on a donc:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\ \exists \alpha_n > 0\ \exists! \lambda_n > 0\ tel\ que\ \forall t \in]x, x+\alpha_n[,\ |f(t) - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En utilisant l'identité remarquable $|\lambda_p - \lambda_q| \leq |f(t) - \lambda_p| + |f(t) - \lambda_q|$ on en déduit que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N, \forall q > N, |\lambda_p - \lambda_q| < \varepsilon$$

Donc la suite $(\lambda_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente. Soit λ sa limite. On a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ \exists \alpha_n > 0,\ \forall t \in]x, x+\alpha_n[\ |f(t) - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour $N = \sup(N_1, N_2)$, $n = N+1$ et $\alpha = \alpha_n$, on a en utilisant à nouveau l'inégalité triangulaire:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in]x, x+\alpha[\ |f(t) - \lambda| < \varepsilon$$

Ce qui dit bien que $\lim_{t \to x^+} f(t) = \lambda = f(x+0)$ (i.e. f a une limite droite en tout point de $[a,b[$). On démontrerait de la même façon que f a une limite gauche en tout point de $]a,b]$.

Corollaire 75.— *Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est réglée, en particulier, toute fonction monotone est intégrable.*

Preuve : En effet les fonctions monotones admettent en tout point une limite droite et une limite gauche: Soit x_0 fixé, comme f est monotone (croissante par exemple), l'ensemble $\{f(x)/x < x_0\}$ est majoré par $f(x_0)$, donc admet une borne supérieure $\sup_{x<x_0} f(x)$. On a alors $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$. On obtient les autres cas de manière similaire.

Notons enfin une propriété sur les discontinuité d'une fonction réglée :

Proposition 76.— *L'ensemble constitué des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable.*

Preuve : Soit f une fonction réglée et f_n une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On note D_n l'ensemble des points de discontinuité de f_n. On note $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, comme D_n est fini, D est dénombrable.

Soit $x \notin D$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon/2$. Maintenant comme $x \notin D_N$, il existe $\alpha > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in]x-\alpha, x+\alpha[,\ f_N(t) = C$. On a donc :

$$\forall t \in]x-\alpha, x+\alpha[,\ |f(x) - f(t)| \leq |f(x) - C| + |f(t) - C| \leq 2\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon$$

Ainsi f est continue en x, et l'ensemble des points de discontinuité de f est inclus dans D et il donc est dénombrable.

La proposition 76 donne une nouvelle preuve, grâce au théorème 50 et au lemme 38, du fait qu'une fonction réglée est intégrable.

Exemples 77.— 1/ Soit $(x_n)_n$ un dénombrement de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ (i.e. une bijection $n \longmapsto x_n$ des rationnels de $[0,1]$). On définit la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par:

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}/x_n < x} \frac{1}{2^n}\ ,\ \varphi(0) = 0$$

Il est clair que φ est croissante, donc elle est réglée. De manière plus précise, soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la fonction de $[0,1]$, $e_N(x)$, par $e_N(x) = \displaystyle\sum_{0 \leq i \leq N/x_i < x} \frac{1}{2^i}$. Il est clair que e_N est une fonction en escalier, en effet en rajoutant éventuellement 0 et 1 au points $x_0, \cdots, x_N$ et en réordonnant le tout, on obtient une subdivision adaptée à e_N.

Maintenant, on a

$$\|\varphi - e_N\|_\infty \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2^{-N}$$

et donc la suite e_N converge uniformément vers φ.

Recherchons maintenant les points de discontinuité de φ. D'après la démonstration de la proposition 76, les points de discontinuité des e_N étant tous rationnels, il s'ensuit que φ est continue sur tout irrationnel de $[0,1]$. Il est clair que φ est continue en 1. Soit x_p un rationnel de $[0,1]$ différent de 1. Si φ était continue en x_p, alors on aurait $\lim_{x \to x_p^+} \varphi(x) = \varphi(x_p)$. Or pour $x > x_p$, on a:

$$\varphi(x) - \varphi(x_p) = \sum_{i/x_p \leq x_i < x} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^p} + \sum_{i/x_p < x_i < x} \frac{1}{2^i}$$

Donc $\varphi(x) - \varphi(x_p) \geq 2^{-p}$, et φ n'est pas continue en x_p et donc l'ensemble des points de discontinuité de φ est exactement $[0,1[\cap \mathbb{Q}$.

2/ Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$ (i.e. une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même). Pour $x \in [0,1[$, on prend le developpement décimal illimité propre de x, c'est-à-dire l'unique suite $(a_n)_n$ d'entiers compris entre 0 et 9 telle que $\nexists N/\ \forall n > N,\ a_n = 9$ et telle que:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Pour $x = 1$, on prend son développement illimité impropre (i.e $a_n = 9$ pour tout n). On définit alors $f : [0,1] \to [0,1]$ par:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \longmapsto f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(k)}}{10^k}$$

Continuité à droite: Soit $x_0 \in [0,1[$, de développement décimal propre $\sum a_i 10^{-i}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$. Comme σ est une bijection, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\} \subset \{1, \cdots, p\}$ et

$a_{p+1} \neq 9$. Soit alors $\alpha = 10^{-(p+1)}$, si $x \in]x_0, x_0+\alpha[\cap]0,1[$, le développement décimal illimité propre de x s'écrit $\sum b_i 10^{-i}$ avec $b_i = a_i$ pour tout $i = 1, \cdots, p$, donc $b_{\sigma(i)} = a_{\sigma(i)}$, donc pour tout $x \in]x_0, x_0+\alpha[\cap]0,1[$:

$$|f(x)-f(x_0)| < \left|\sum_{i>n}(b_{\sigma(i)}-a_{\sigma(i)})10^{-i}\right| \leq \sum_{i>n}|b_{\sigma(i)}-a_{\sigma(i)}|10^{-i} \leq 9\sum_{i>n}10^{-i} = 10^{-n} < \varepsilon$$

Donc f est continue à droite de tout point de $[0,1[$.

Continuité à gauche: Soit x_0 un point non décimal de $[0,1]$, en particulier, x_0 n'admet pas de développement décimal illimité impropre. On pose $x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}$, alors si $l = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{\sigma(i)}10^{-i}$, comme précédement, on prouve que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = f(x_0)$. Donc f est continue à gauche en x_0.

Si x_0 est décimal, il admet un développement décimal illimité impropre $x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}$, on pose $l = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{\sigma(i)}10^{-i}$. On prouve alors comme précédement que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$. Donc f admet une limite à gauche de x_0. Remarquons alors qu'elle n'est pas nécéssairement continue car, en général, $l \neq f(x_0)$. (Pour $x_0 = 1$, on a quand même $l = f(1) = 1$).

Calcul de l'intégrale: f est donc une fonction continue en 0, en 1 et en tout point non décimal de $[0,1]$. En un point décimal de $]0,1[$, elle est continue à gauche et admet une limite à gauche. C'est donc un fonction réglée, par conséquent intégrable.

La fonction $f(1-x)$ est intégrable et $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$ (conséquence du théorème??? à venir). Pour tout $x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}$ non décimal de $[0,1]$, $1-x$ est non décimal et son développement décimal illimité vaut $1-x = \sum_{i=1}^{+\infty}(9-a_i)10^{-i}$. On a parconséquent pour tout x non décimal:

$$f(x)+f(1-x) = 1$$

L'ensemble des décimal est un ensemble dénombrable, donc d'après la proposition???, $\int_0^1 (f(x)+f(1-x))dx = \int_0^1 dx = 1$. Par conséquent $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

4 Propriétés.

4.1 Intégrale fonction de la borne supérieure.

On s'intérresse maintenant aux propriétés des applications définie par des intégrales, applications qui sont définit à partir de la borne inférieure ou supérieure de l'intégrale, c'est-à-dire a des applications de la forme $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Définition 78.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est localement intégrable, si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I.*
En particulier toute fonction localement intégrable sur I est bornée sur tout segment inclu dans I.

Exemple : Toute fonctions continue sur $\mathbb{R}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

4.1.1 Continuité, dérivabilité.

Théorème 79.— *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et a un point de I. Si l'on définit la fonction F, pour $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

alors

1/ La fonction F est continue sur I et lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

2/ Si f admet une limite (resp. une limite à droite, resp. une limite à gauche) en $x_0 \in I$ alors la fonction F est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en x_0 et $F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ (resp. $F'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, resp. $F'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$). En particulier, si f est continue sur I alors F est dérivable et $F' = f$.

Preuve : 1/ Soit $[a,b] \subset I$. f étant localement intégrable, elle est bornée sur $[a,b]$. Soit par exemple $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)| < M$. Alors si $(x,y) \in [a,b]^2$, on a $\left|F(x)-F(y)\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \left|\int_x^y |f(t)|dt\right| < M|x-y|$. Donc F est M-lipschitzienne sur $[a,b]$. Si $x_0 \in I$, alors il existe un segment inclus dans I qui voisinne x_0 dans I. Donc F est continue en x_0.

2/ Soit x_0 un point intérieur à I et supposons que f admette l pour limite droite en x_0. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall t \in]x_0, x_0+\alpha[\ |f(t)-l| < \varepsilon$$

Ainsi, comme $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, pour tout $x \in]x_0, x_0+\alpha[$ on a

$$l-\varepsilon = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (l-\varepsilon)dt < \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} < \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (l+\varepsilon)dt = l+\varepsilon$$

ce qui assure que F est dérivable à droite de x_0 et que $F'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Les autres cas se traitent de façon similaire.

Remarque 80.— La propriété 1/ ne possède pas de réciproque. Pour le voir, considérons l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ et la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ si } x \neq 1/n \text{ pour tout } n \ge 1 \\ &= 0 \text{ si } x = 1/n \text{ pour un certain } n \ge 1 \end{aligned}$$

Il est clair que f n'admet pas de limite en 0. Cette fonction est localement intégrable sur $[0,+\infty[$: En effet, si on prend $0 < a < b$, alors f est en escalier sur $[a,b]$, donc intégrable. Si on prend $0 = a < b$, alors soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon$. Définissons la fonction g_ε, par $g_\varepsilon(x) = f(x)$ si $x \in]1/N,+\infty[\cap[0,b]$, et $g_\varepsilon(x) = 0$ si $x \in [0,1/N]\cap[0,b]$. g_ε est bien sur en escalier et on a:

$$g_\varepsilon(x) \le f(x) \le 1$$

La fonction $1-g_\varepsilon(x)$ vaut 1 sur $[0,1/N]$ et en les points $\{1/(N-1),\cdots,1\}\cap[0,b]$, donc $\int_0^b (1-g_\varepsilon(x))dx \le \varepsilon$. Ainsi, f est intégrable sur $[0,b]$ et $\int_0^b f(t)dt = b$. Il s'ensuit que $F(x) = \int_0^x f(t)dt = x$ est dérivable en 0.

4.1.2 Primitives.

Définition 81.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$, deux applications. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Lemme 82.— *Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité. Deux primitives différent sur I d'une constante.*

Preuve : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f, alors $(F_1 - F_2)^{'} = 0$, donc $F_1 - F_2$ est a la fois croissante et décroissante sur I, elle est donc constante. Comme I est un intervalle, $\exists C \in \mathbb{R} \, / \, F_1 = F_2 + C$.

En combinant cette définition avec les résultats précédent, on obtient :

Proposition 83.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle admet une primitive. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Preuve : Cette proposition est une conséquence directe du théorème 79 et du lemme 82.

Proposition 84.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction qui admet une primitive F et si f est intégrable alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Preuve : Soit $s : x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$. Sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \cdots n-1)$, la fonction F est continuement dérivable. En vertu du théorème des accroissement finis, il existe $t_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = (x_{i+1} - x_i)F^{'}(t_i) = (x_{i+1} - x_i)f(t_i)$$

On a donc

$$D_{\text{inf}}(f,s) \leq \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) \leq D_{\text{sup}}(f,s)$$

Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(b) - F(a)$ et donc

$$D_{\text{inf}}(f,s) \leq F(b) - F(a) \leq D_{\text{sup}}(f,s)$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision, et la fonction f étant, par hypothèse, intégrable, on déduit de la proposition 23 que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque 85.— a) On pourrait croire que si f admet une primitive, alors elle est automatiquement intégrable, ce n'est pas vrai en général. Pour voir ce fait, considérons la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$. La fonction F est dérivable : c'est clair pour $x \neq 0$ où l'on a $F^{'}(x) = 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2)$. Pour $x = 0$, on a $F(x)/x = x\sin(1/x^2)$, donc $|F(x)/x| \leq |x|$ donc tend vers 0 en 0. Ainsi $F^{'}(0) = 0$.

Si l'on pose $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2)$ pour $x \neq 0$, il est alors clair que F est une primitive de f, mais comme la fonction f n'est pas bornée elle ne peut être intégrable.

Cet exemple montre que, s'il apparait que dans un certain sens que l'intégrale de Riemann constitue l'opération "inverse" de la dérivation, il faut rester prudent!

b) La preuve du théorème 79 repose sur les propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann. Ce fait montre le caractère fondamental de cette notion, car en reprenant les même arguments, on constate que l'on a le résulat suivant :

Théorème 86.— *Si $a < b$ sont deux réels et $S : [a,b]^2 \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

A0) $\forall x,y \in [a,b]$, $S(x,y,1) = y - x$,

A1) $\forall x,y \in [a,b]$, $\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $S(x,y,\alpha f + g) = \alpha S(x,y,f) + S(x,y,g)$ *(linéarité),*

A2) $\forall x,y,z \in [a,b]$, $\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $S(x,y,f) = S(x,z,f) + S(z,y,f)$ *(relation de Chasles),*

A3) $\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, *si* $f \leq g$ *alors pour tout* $x < y$ *dans* $[a,b]$, $S(x,y,f) \leq S(x,y,g)$ *(préservation des inégalités),*

alors pour tout $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, *on a* $S(a,b,f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Preuve :

4.2 Calcul.

4.2.1 Translations, homotéthies.

Proposition 87.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On définit la fonction $g : [a-\alpha, b-\alpha]$ par $g(x) = f(x+\alpha)$. Alors si f est intégrable, g l'est aussi et*

$$\int_{a-\alpha}^{b-\alpha} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

Corollaire 88.— *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est p-périodique et intégrable sur un segment $[a, a+p]$, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, f est intégrable sur $[b, b+p]$ et*

$$\int_b^{b+p} f(x)dx = \int_a^{a+p} f(x)dx$$

Proposition 89.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$. On définit la fonction $g : [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}]$ par $g(x) = f(\alpha x)$. Alors si f est intégrable, g l'est aussi et*

$$\alpha \int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

4.2.2 Intégration par parties.

Théorème 90.— *Soient f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que f' et g' soient intégrable sur $[a,b]$ (en particulier si f et g sont $\mathcal{C}^1$). Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

avec $[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Preuve : Les fonctions f et g étant dérivables, il en est de même pour fg et l'on a $(fg)' = f'g + fg'$. Les dérivées sont intégrables donc $f'g$ et fg' sont intégrables. Or on a

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

par linéarité, le résultat en découle.

4.2.3 Changement de variable.

Théorème 91.— *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une primitive et $\varphi[c,d] \to [a,b]$ une fonction dérivable telle que f soit intégrable sur le segment d'extrémité $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$. Si les fonctions $f \circ \varphi$ et $\varphi^{'}$ sont intégrables sur $[c,d]$, alors il en est de même pour $f \circ \varphi.\varphi^{'}$ et*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d f \circ \varphi(x)\varphi^{'}(x)dx$$

(On dit que l'on a opéré le changement de variable $t = \varphi(x)$)

Preuve : Soit F une primitive de f. Il est clair que $f \circ \varphi.\varphi^{'}$ est intégrable, cette fonction admet $F \circ \varphi$ pour primitive. En appliquant la proposition 84, on a donc

$$\int_c^d f \circ \varphi(x)\varphi^{'}(x)dx = F \circ \varphi(d) - F \circ \varphi(c) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt$$

Remarque 92.— Ce théorème reste encore valable si l'on suppose f continue par morceaux. En effet par la relation de Chasles, on se ramène au cas des fonctions continues.

Corollaire 93.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (i.e. une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa réciproque soit $\mathcal{C}^1$) tel que $[a,b] \subset \varphi(I)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f \circ \varphi(x)\varphi^{'}(x)dx$$

Preuve : C'est une application directe du résultat précédent, en remarquant que $f \circ \varphi$ et $\varphi^{'}$ sont continues et que φ étant un difféomorphisme, c'est en particulier un homéomorphisme, donc que $\varphi([\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]) = [a,b]$.

Remarques 94.— Il est généralement pratique de poser "à l'envers" le changement de variable, c'est-à-dire de poser par exemple $x = \psi(t)$. Il est alors commode, pour s'y retrouver, de différentier formellement $dx = \psi^{'}(t)dt$ et de rechercher à exprimer simplement $\psi^{'}(t)$ en fonction de x.

Il faut faire très attention à bien respecter les hypothèse du théorème 91 ou du corollaire 93 et de ne pas changer de variable inconsidérément. On veut par exemple (mal) calculer

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

On fait le changement de variable $u = \tan(t)$, on a donc $du = \frac{dt}{1+\cos^2 t}$ et donc on a:

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t} = \int_0^0 du = 0$$

Ce résultat est absurde, car $\frac{1}{1+\cos^2 t}$ est continue, positive et non nulle. L'erreur commise ici est la suivante: Le changement de variable que l'on pratique est en fait $t = \arctan(u)$ et arctan est à valeur dans $]-\pi/2, \pi/2[$, ce qui rend le changement de variable impossible sur $[0,\pi]$.

4.3 Relations, inégalités.

4.3.1 Formules de Taylor.

Théorème 95.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application $n+1$ fois dérivable, telle que $f^{(n+1)}$ soit intégrable sur $[a,b]$. Alors pour tout $t \in [a,b]$, on a:*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

(Formule de Taylor-Laplace)

Preuve : (Par récurrence) Pour $n = 0$ la formule devient:

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f^{'}(x)dx$$

c'eſt le théorème???
Si on suppose qu'au rang $n-1 \geq 0$ on a pour toute fonction f, n fois dérivable, telle que f^n soit intégrable sur $[a,b]$:

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

Alors au rang n, si f eſt une fonction $n+1$ fois dérivable, telle que $f^{(n+1)}$ soit intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $t \in [a,b]$, la fonction $\frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$ eſt intégrable sur $[a,t]$ et en intégrant par partie, on a:

$$\int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx = -\frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour prouver que la propriété eſt héréditaire.

Corollaire 96.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n. Soit $x_0 \in I$, alors*

$$f(x) =_{x \to x_0} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \circ((x-x_0)^n)$$

(Formule de Taylor-Young)

Preuve : En appliquant la formule de taylor-Laplace, on obtient pour $x \neq x_0$:

$$\frac{1}{(x-x_0)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)\right) = \frac{1}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))dt$$

Par hypothèse, $f^{(n)}$ eſt continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il exiſte $\alpha > 0$ tel que:

$$\forall t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| < \varepsilon$$

Par suite, on a:

$$\forall t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ \left|\frac{1}{(x-x_0)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)\right)\right| \leq \varepsilon \left|\frac{(x-x_0)^n}{n!(x-x_0)^n}\right| \leq \varepsilon$$

Application à l'irrationalité des valeurs de l'exponentielle en certains points. Soit $r \in \mathbb{Q}^{+*}$ tel que $r = 1/b$, avec b entier. La fonction e^x est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $n > 0$, on a, d'après la formule de Taylor-Laplace appliqué à $a = 0$ et $t = r$,

$$e^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r^k}{k!} + \int_0^r \frac{(r-x)^n}{n!} e^x dx$$

La fonction exponentielle est croissante et donc bornée par e^r sur $[0, r]$. On a donc

$$\left| e^r - \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} \right| \leq e^r \int_0^r \frac{(r-x)^n}{n!} dx = \frac{r^{n+1} e^r}{(n+1)!}$$

Supposons que $e^r \in \mathbb{Q}$, et ecrivons $e^r = p/q$ avec p et q deux entiers premiers entre eux. Si, pour $n \geq 0$, on pose

$$u_n = pb^n n! - q \sum_{k=0}^{n} b^{n-k} \frac{n!}{k!}$$

alors on a

$$e^r - \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} = \frac{u_n}{qb^n n!}$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite d'entiers et l'on a

$$|u_n| \leq \frac{qe^r}{b(n+1)}$$

Il s'ensuit que $(u_n)_n$ converge vers 0 mais comme u_n est entier, il existe un indice N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. En particulier on a $u_N = u_{N+1} = 0$, or

$$\frac{u_{N+1}}{qb^{N+1}(N+1)!} - \frac{u_N}{qb^N N!} = -\frac{r^{N+1}}{(N+1)!} \neq 0$$

et on en déduit que $e^r \notin \mathbb{Q}$. En particulier, e, la base de l'exponentielle, n'est pas rationnel.

4.3.2 Formules de la moyenne.

Proposition 97.— *(Inégalité de la moyenne) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $m, M \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $m \leq f \leq M$. Si g est à valeurs positives, on a*

$$m \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g(t)dt$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition 29 compte-tenu du fait que pour tout $t \in [a, b]$ on a $mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$.

Corollaire 98.— *(Egalité de la moyenne) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Si f est continue et g est à valeurs positives, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

Preuve : L'application f étant continue sur $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes m et M. L'application $x \longmapsto f(x) \int_a^b g(t)dt$ est donc continue et ses bornes sont respectivement $m \int_a^b g(t)dt$ et $M \int_a^b g(t)dt$. L'inégalité de la moyenne assure que le réel $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est valeur intermédiaire de cette fonction, le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors l'existence du réel c annoncée dans l'énoncé.

4.3.3 Inégalités.

Il existe quantité d'inégalités liants les intégrales. On se propose de donner ici un apercu des principales et des applications quelles peuvent avoir.

Proposition 99.— *Si f et g désignent deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables, alors*

$$\int_a^b \inf(f(x),g(x))dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \sup(f(x),g(x))dx$$

Preuve :

Proposition 100.— *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit f et g deux fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\left|\int_a^b fg(x)dx\right| \le \int_a^b |fg(x)|dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Preuve : On introduit la fonction $T(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda|f(x)|+|g(x)|)^2 dx$. Par définition même, cette fonction est positive. Mais

$$T(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b |fg(x)|dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

Par suite T est un polynôme à coefficients réels qui est de signe positif, son discriminant Δ est donc négatif. Par conséquent, on a

$$\Delta = 4\left(\int_a^b |fg(x)|dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

le résultat en découle.

Remarque 101.— Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si le discriminant Δ est nul, c'est-à-dire si et seulement si le polynôme $T(\lambda)$ possède une racine (double). En appliquant le théorème 41, on voit alors qu'il y a égalité si et seulement si, il existe une constante α telle que $|f| = \alpha|g|$ presque partout (où encore ici, si et seulement si, il existe une constante α telle que l'ensemble $A = \{t \in [a,b],\ |f(t)| \neq \alpha|g(t)|\}$ soit d'intérieur vide.

Dans le cas où l'on suppose que f et g sont continues, il y a donc égalité si et seulement si les fonctions $|f|$ et $|g|$ sont proportionnelles.

Corollaire 102.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application telle qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > m$. Alors*

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \ge 1$$

Preuve : D'après le corollaire 55, la fonction $1/f$ est intégrable, ainsi que les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$. On applique alors l'inégalité de Cauchy Schwarz à ces deux dernières fonctions.

Proposition 103.— *(Inégalité de Cauchy-Scharwz généralisée) Soient f et g deux fonctions intégrables et positive non nulle de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit minorée sur $[a,b]$ par un réel strictement positif. alors si l'on pose*

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ et } m = \inf_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

On a:

$$\int_a^b fg(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \leq \frac{m+M}{2\sqrt{mM}}\int_a^b fg(x)dx$$

Preuve :

Proposition 104.— *(Inégalité de Hölder) Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $f,g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications intégrables. On a :*

$$\int_a^b |fg(x)|dx \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}.\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

Remarque 105.— Cette inégalité généralise celle de Cauchy-Schwarz, puisqu'en prenant $p=q=2$ dans Hö lder, on obtient Cauchy-Schwarz. Il est possible de généraliser cette inégalité à un nombre indéfini d'intégrales :

Proposition 106.— (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient $p_1,\cdots,p_n$, n réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{q_1}=1$. Soit $f_1,\cdots f_n$, n fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$\int_a^b |f_1.f_2.\cdots.f_n(x)|dx \leq \sqrt[p_1]{\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}dx}.\cdots\sqrt[p_n]{\int_a^b |f_n(x)|^{p_n}dx}$$

Preuve : Si l'une des intégrales $\int_a^b |f_i(x)|^{p_i}dx$ est nulle, alors la fonction $|f_i|$ est nulle presque partout et donc il en est de même de la fonction $|f_1.f_2.\cdots.f_n|$ et il y a donc égalité dans le théorème.

On suppose maintenant qu'aucune des intégrales $\int_a^b |f_i(x)|^{p_i}dx$ ne soit nulle. La preuve de l'inégalité repose sur l'inégalité de convexité suivante : si n désigne un entier non nul, $x_1,\cdots x_n$ des réels strictement positifs et $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ des réels strictements positifs tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k=1$ alors on a

$$\prod_{k=1}^n {x_k}^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

Pour montrer cette inégalité de convexité il suffit de remarquer que la fonction ln est concave puisque sa dérivée seconde est toujours négative. Par définition de la concavité, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(x_k) \leq \ln(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k)$$

ce qui montre l'inégalité par passage à l'exponentielle.

Revenons à la preuve du théorème et considérons pour tout $k=1,\cdots,n$, les réels

$$x_k = \frac{|f_k^{p_k}(x)|}{\displaystyle\int_a^b |f_k^{p_k}(x)|dx} \quad \text{et} \quad \lambda_k=\frac{1}{p_k}$$

En appliquant l'inégalité de convexité démontrée ci-dessus, on a donc

$$|f_1(x).\cdots f_n(x)| \leq \sqrt[p_1]{\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}dx}.\cdots\sqrt[p_n]{\int_a^b |f_n(x)|^{p_n}dx}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}\frac{|f_k^{p_k}(x)|}{\int_a^b |f_k^{p_k}(x)|dx}\right)$$

Les deux membres de l'équation étant positifs, en intégrant sur $[a,b]$, on trouve l'inégalité désirée.

Proposition 107.— (Inégalité de Minkovski) *Soient p un réel tel que $1 \leq p$, f et g deux fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p dx}$$

Preuve : Si $\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt = 0$, l'inégalité est claire. On suppose donc maintenant que $\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \neq 0$. Pour commencer, remarquons que sur $[a,b]$

$$|f+g|^p = |f+g|.|f+g|^{p-1} \leq |f|.|f+g|^{p-1} + |g|.|f+g|^{p-1}$$

et donc, en intégrant, on obtient

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \leq \int_a^b |f(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1} dt + \int_a^b |g(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1} dt$$

On utilise alors l'inégalité d'Hölder, en posant $q = \frac{p}{p-1}$:

$$\int_a^b |f(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1} dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^{q(p-1)} dt} = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt}$$

$$\int_a^b |g(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1} dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^{q(p-1)} dt} = \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt}$$

et l'on a donc

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \leq \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q} \left(\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}\right)$$

et comme $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q}$, en divisant l'inégalité par $\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q}$ on trouve le résultat.

5 Intégrales dépendants d'un paramètre.

5.1 Suites d'intégrales.

On s'intérresse en premier au cas des suites de fonctions.

Théorème 108.— *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx$$

Preuve : Montrons tout d'abord que f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$, comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, en particulier il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Comme f_{n_0} est intégrable, en vertue du théorème ???, il existe deux fonctions en escalier g_ε et h_ε telles que $g_\varepsilon \leq f_{n_0} \leq h_\varepsilon$ et $\int_a^b (h_\varepsilon - g_\varepsilon)(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$.

Posons $\tilde{g}_\varepsilon = g_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ et $\tilde{h}_\varepsilon = h_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Il est clair que ces deux fonctions sont en escalier et que $\tilde{g}_\varepsilon \leq f \leq \tilde{h}_\varepsilon$. Maintenant, on a:

$$\int_a^b (\tilde{h}_\varepsilon - \tilde{g}_\varepsilon)(x)dx = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b (h_\varepsilon - g_\varepsilon)(x)dx < \varepsilon$$

Donc f est intégrable.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. D'après ???, on a donc

$$\forall n > n_0,\ |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = |\int_a^b (f_n - f)(x)dx| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon dx}{(b-a)} = \varepsilon$$

La suite $\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx$ converge donc vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 109.— (Théorème de convergence monotone) *Si $(f_n)_n$ une suite monotone d'applications continues sur $[a,b]$, converge simplement vers une fonction f continue, alors*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx$$

La preuve de ce corollaire est obtenue par le théorème suivant :

Théorème 110.— (Dini) *Soit $(f_n)_n$ une suite monotone d'applications continues sur $[a,b]$, convergent simplement vers une fonction f continue. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.*

Preuve : Pour simplifier, on suppose que la suite est croissante. On pose $D_n = f - f_n$, cette suite est une suite décroissante d'applications continues positives convergent vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, comme D_n est continue, l'ensemble $D_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est un fermé de $[a,b]$. Maintenant, du fait de la décroissance de D_n, on a $D_{n+1}^{-1}([\varepsilon, +\infty[) \subset D_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$, on a aussi $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[) = \emptyset$. Comme $[a,b]$ est compact, on en déduit (cf annexe) l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $D_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[) = \emptyset$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Les énoncés 109 et 109 sont vrais dans le cadre beaucoup plus général où les fonctions sont juste supposées intégrables. Ils découlent en fait d'un théorème très puissant, dû à Lebesgue :

Théorème 111.— (Théorème de convergence dominé) *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications intégrables sur $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f intégrable. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty < M$, alors*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Nous admettrons ici ce résultat. Sa preuve utilise en fait la théorie de l'intégration que Lebesgue développa pour généraliser celle de l'intégrale de Riemann. Dans cet énoncé, l'hypothèse de domination ($\|f_n\|_\infty < M$) n'est pas du tout anecdotique. Pour illustrer ce propos, on peut considérer la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ f_n(x) & = & 2n - 2n^2 x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) & = & 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \end{array}$$

les fonctions f_n sont continues et convergent simplement vers 0 qui est continue, et pourtant la suite $\int_0^1 f_n(x)dx$ est constante égale à 1. Elle ne converge donc pas vers 0 comme le théorème aurait pu le laisser espérer, la raison tient au fait que les fonctions f_n ne sont pas uniformément bornées.

5.2 Continuité sous le signe $\int$.

On considère dans cette partie ainsi que dans la suivante un ouvert A de $\mathbb{R}$ et le segment $[a,b]$.

Théorème 112.— *Soit $\varphi : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une application (de deux variables) continue. Alors :*

1) Pour tout $x_0 \in A$, l'application partielle $t \to \varphi(x_0, t)$ est intégrable. On peut donc définir une application $f : A \to \mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in A,\ f(x) = \int_a^b \varphi(x,t)dt$$

2) f est continue en tout point de A.

Preuve : Le point 1) est évident puisque l'application partielle en x_0 associée à φ est continue, donc intégrable d'après ???.

Pour ce qui est de la continuité de f sur A, on prend $x_0 \in A$ et un voisinage compact $K \subset \mathbb{R}$ de a qui est inclus dans A (ce qui est toujours possible). L'ensemble $K \times [a,b]$ est donc un compact de $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Heine, φ est uniformément continue sur $K \times [a,b]$. Donc:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall (x,t) \in K \times [a,b]\ \forall (x', t') \in K \times [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} |x - x'| \leq \alpha \\ |t - t'| \leq \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow |\varphi(x,t) - \varphi(x', t')| \leq \varepsilon$$

En prenant $x' = x_0$ et $t' = t$, on a:

$$|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t)| \leq \varepsilon$$

donc en intégrant sur $[a,b]$, on obtient,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in A,\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < (b-a)\varepsilon$$

c'est-à-dire f continue en x_0.

5.3 Dérivabilité sous le signe $\int$.

Théorème 113.— *Soit $\varphi : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une application (de deux variables) continue telle que la première dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ existe et soit continue sur $A \times [a,b]$. Comme précédement, on définit $f(x) = \int_a^b \varphi(x,t)dt$. Alors :*

1/ Pour tout $x_0 \in A$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a,b]$.

2/ La fonction f est dérivable en tout point et $f'(x) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt$.

Preuve :

Application au calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. On considère la fonction

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$, donc la fonction

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (théorème???). Maintenant, φ admet une dérivée partielle première en tout point:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2}e^{-x^2-t^2}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$, donc f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$$

Si l'on effectue le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

Considérons maintenant la fonction $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$. D'après la proposition???, g est dérivable et:

$$g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

on a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+g'(x) = 0$$

c'est-à-dire

$$(1)\quad \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+g(x) = f(0)+g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

(la dernière égalité s'obtenant en remarquant que $\arctan(x)$ est une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$)

Maintenant, $\forall t\in[0,1],\ 1+t^2\geq 1$ donc $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\leq e^{-x^2}$, donc en vertu de la prop???,

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\leq e^{-x^2}$$

ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De (1), on en déduit que g admet $\frac{\pi}{4}$ pour limite en $+\infty$ et donc que la fonction $x\to\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ admet une limite en $+\infty$ (limite que l'on note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$). On a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5.4 Théorème de Fubbini.

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre réels et f une application de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $x_0 \in [a,b]$, l'application partielle $f(x_0,y)$ de $[c,d] \to \mathbb{R}$ eﬆ intégrable, on définit $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Si F eﬆ intégrable, on écrit

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Maintenant, on peut s'intéresser à l'opération contraire: si pour tout $y_0 \in [c,d]$, l'application partielle $f(x,y_0)$ de $[a,b] \to \mathbb{R}$ eﬆ intégrable, on définit $G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Si G eﬆ intégrable, on écrit:

$$\int_c^d G(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Une queﬆion naturelle eﬆ de savoir si ces deux quantités sont égalent.

Théorème 114.— (Fubini) *Si f eﬆ une fonction continue, alors les deux fonctions F et G décrites plus haut sont intégrables et l'on a*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

On note plus fréquement, $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$, cette "intégrale double".

Preuve : La fonction $x \to \int_c^d f(x,y)dy$ eﬆ continue en vertu du théorème de continuité sous le signe somme, idem pour $x \to \int_a^b f(x,y)dx$. Ces deux fonctions sont donc intégrables. Considérons les quatres fonctions auxiliaires suivantes:

$$\varphi(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx$$
$$\psi(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$
$$u(x,t) = \int_c^t f(x,y)dy$$
$$v(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

L'exiﬆence de φ, ψ et u eﬆ assurée par le théorème de continuité sous le signe somme. D'après le théorème???, la fonction u admet une dérivée partielle par rapport à t valant $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$. Cette fonction eﬆ continue, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $\varphi(t) = \int_a^b u(t,x)dx$ eﬆ dérivable et $\varphi'(t) = \int_a^b f(x,t)dx$.

$v(y)$ eﬆ une fonction continue, donc $\psi(t)$ eﬆ dérivable (th???), de dérivée $\psi'(t) = v(t) = \int_a^b f(x,t)dx$.

On a donc $\varphi'(t) = \psi'(t)$ et comme $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ on a donc:

$$\forall t \in [c,d],\ \varphi(t) = \psi(t)$$

Corollaire 115.— *Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux n-uplet de réels tels que $a_i < b_i$ pour tout $i = 1,\cdots,n$ et f une application continue de $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. Alors pour toute permutation $\sigma \in S_n$ de $\{1,\cdots,n\}$, on a*

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\cdots,x_n)dx_n\cdots dx_1 = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}}\cdots\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1,\cdots,x_n)dx_{\sigma(n)}\cdots dx_{\sigma(1)}$$

Preuve : Par récurrence sur n. Au rang $n = 2$, c'eſt le théorème de Fubini. Prenons $n > 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et prenons une fonction f continue sur le pavé $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ et une permutation $\sigma \in S_n$.

1) Si $\sigma(1) = 1$ alors la reſtriction de σ à $\{2, \cdots, n\}$ eſt encore une permutation.

6 Calcul des primitives.

6.1 Généralité.

Nous avons vu l'intérêt que peut réprésenter l'exiſtence et la connaissance d'une primitive d'une fonction pour le cacul de son intégrale. Nous avons aussi prouvé que les primitives d'une fonction sur un intervalle, étaient égales à une conſtante additive près. L'objet de cette partie eſt de présenter quelques méthodes pour calculer des primitives. Ces méthodes sont principalement fondées sur le principe d'intégration par partie (cf ???) et celui du changement de variable (cf ???). Plus précisement, nous utiliserons les deux résultats suivants :

Proposition 116.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Si la fonction $f'g$ admet une primitive sur I, alors la fonction fg' admet $fg - \int f'g$ pour primitive.*

Preuve : Par hypothèse la fonction $fg - \int f'g$ eſt dérivable sur I et sa dérivée vaut fg'.

Remarque 117.— Une condition suffisante d'application eſt f de classe C^1; remarquons alors que nous n'imposons rien sur la continuité de g'.

Proposition 118.— *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et φ un C^1-difféomorphisme de J dans I. Alors, si la fonction $f \circ \varphi.\varphi'$ (de J dans $\mathbb{R}$) admet F pour primitive sur J, la fonction f admet $F \circ \varphi^{-1}$ pour primitive sur I. (On dit que l'on a opéré le changement de variable $x = \varphi(t)$)*

Preuve : Par hypothèse $F \circ \varphi^{-1}$ eſt dérivable et sa dérivée en $x \in I$ vaut

$$(F \circ \varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))).\varphi'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) = f(x)$$

Exemples: Evaluons par ???, une primitive de $\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en posant $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x$. Il vient donc:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + cst$$

Evaluons maintenant par ???, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$. Pour cela remarquons que la fonction $\varphi(t) = \cos(t)$ eſt un C^1-difféomorphisme de $]0, \pi[$ dans $]-1, 1[$. Opérons donc le changement de variable $x = \cos(t)$. Nous sommes donc amené à calculer une primitive de $\dfrac{-\sin(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}$ sur $]0, \pi[$. Or

$$\int \frac{-\sin(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}dt = \int -1.dt = -t + cst$$

On en déduit donc que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + cst$$

Dans la pratique, on omettra souvent de mentionner l'intervalle sur lequel on travail quand celui-ci eſt implicite.

Quand on "calcule" une primitive, on veut en fait donner un forme explicite des primitives. Mais qu'est-ce qu'une forme explicite ? Le cas de la fonction $\ln(x)$ est assez révélateur : nous savons bien que la fonction $x \to 1/x$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, elle admet donc des primitives. Il est simple de prouver qu'aucune fraction rationnelle à coefficients réels, n'est primitive de cette fonction. Dans un certain sens, la fonction $x \to 1/x$ n'a donc pas de primitive explicite (a partir du moment ou l'on considère que les fonctions explicites, sont les fractions rationnelles à coefficients réels). On est donc obligé de donner un nom à cette fonction: le logarithme. Une fois acceptée cette nouvelle fonction, on vient de voir dans l'exemple précédent que $\ln(x)$ admettait une primitive explicite: $x\ln(x)-x$, mais cette fonction n'est toujours pas une fraction rationnelle.

A la lueur de ces remarques, on peut donc tenter de définir la notion de primitive "explicite": étant donné une famille de fonctions de référence, on dira qu'une fonction a une primitive explicite si elle a une primitive qui peut s'écrire comme combinaison finie de sommes, de produits, de rapports et de compositions de fonctions faisant partie de la famille de référence. Généralement quand on parle de primitive explicite, on considère pour famille de référence les fonction x^α, $\ln(x)$ et e^x. On rajoute parfois les fonctions trigonométriques réciproques (c'est dans cette situation que nous travaillerons). Montrer qu'une fonction n'admet pas de primitive explicite, est souvent d'une grande difficultée. Par exemple, Liouville à prouver que la fonction $x \to e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive explicite (sa preuve fait appelle à la théorie de Galois différentielle).

6.2 Méthodes.

6.2.1 Fractions rationnelles.

On s'interresse ici aux primitives des fractions rationnelles réelles. C'est a dire au primitives des fonctions F s'écrivants, sur leur domaine de définition, sous la forme $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels (c'est un corps). Nous allons démontrer le théorème suivants:

Théorème 119.— *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et U un intervalle ouvert où est défini F. Il existe deux fractions rationnelles réelles, G et H et une famille finie $I_1, \cdots I_n$ de polynômes de degré 1 telles que*

$$\forall x \in U,\ \int F(t)dt = G(x) + \ln|H(x)| + \sum_{k=1}^{n} \arctan(I_k(x))$$

Nous allons en fait être beaucoup plus précis et donner une méthode pour calculer explicitement les fractions G, H et les polynômes I_k.

Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. Le théorème de d'Alembert-Gauss, assure notament que le polynôme Q est de la forme:

$$Q(x) = A\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{m}(a_jX^2+b_jX+c_j)^{\beta_j}$$

avec n et m des entiers positifs (on convient que quand les des deux est nul, le produit considéré vaut 1), $A \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i, et $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}^3$ avec $\Delta_j = b_j^2 - 4a_jc_j < 0$ pour tout j, α_i et α_j entier strictement supérieurs à 0 pour tout i et tout j.

Le théorème de décomposition en éléments simple des fractions rationnelles permet d'écrire:

$$F(x) = E(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{\alpha_i}\frac{\omega_{i,t}}{(X-\lambda_i)^t} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{\beta_i}\frac{u_{j,t}x+v_{j,t}}{(a_jX^2+b_jX+c_j)^t}$$

Avec E le polyôme qui représente la partie entière de la division suivant les puissances croissantes de P par Q et $\omega_{i,t}, u_{j,t}, v_{j,t}$ des réels (Les sommes sont considérées nulles si $n = 0$ ou si $m = 0$).

Soit U un intervalle ouvert où eſt définit F. On va chercher des primitives de F en calculant termes à termes des primitives sur U des éléments simples apparaissants dans la décomposition de F. Nous sommes donc en présence de trois types de fonctions dont il nous faut trouver des primitives sur U:

1/ Un polynôme: $E(x)$.

2/ Des fractions du types: $\dfrac{k}{(x-a)^n}$ avec n entier, k réel et a réel n'appartenant pas à U.

3/ Des fractions du types: $\dfrac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec n entier p et q réels et a, b, c un triplet de réels tels que $b^2 - 4ac < 0$.

Voyons dans chaque cas comment faire:

1/ Trouver une primitive d'un polynôme ne pose pas de problème...

2/ Deux cas se présentent:

2.1/ $n = 1$, alors on a, par exemple,

$$\int \frac{k\,dt}{t-a} = \ln|t-a|$$

2.2/ $n > 1$, alors on a, par exemple,

$$\int \frac{k\,dt}{(t-a)^n} = \frac{-k}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$$

3/ (C'eſt le cas délicat...) On commence par réécrire $px+q$ sous la forme $r(2ax+b)+k)$ c'eſt-à-dire en faisant apparaitre la dérivée de ax^2+bx+c plus une conſtante. On a alors:

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} = r\frac{ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{k}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ceci eſt toujours possible: En effet si $p = 0$ alors on pose $r = 0$ et $k = q$. Si $p \neq 0$ alors, on pose $r = p/2a$ et $k = q - (rp)/2a$. On eſt alors amené a calculer deux ſtyles de primitives:

$$3.1/ \int \frac{2at+b}{(at^2+bt+c)^n}dt \quad et \quad 3.2/ \frac{k}{(at^2+bt+c)^n}dt$$

3.1/ Il faut diſtingué:

3.1.1/ $n = 1$, alors on a, par exemple:

$$\int \frac{2at+b}{(at^2+bt+c)}dt = \ln|at^2+bt+c|$$

3.1.2/ $n > 1$, alors on a, par exemple:

$$\int \frac{2at+b}{(at^2+bt+c)^n}dt = \frac{1}{(1-n)}.\frac{1}{(at^2+bt+c)^{n-1}}$$

3.2/ On commence par écrire le polynôme $at^2+bt+c = a((t+\dfrac{b}{2a})^2+(\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2})$. La quantité, $(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$ eſt ſtrictement positive (car le polynôme eſt irréductible). On obtient donc:

$$at^2+bt+c = a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\left(\left(\frac{t+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right)^2+1\right)$$

On opère alors le changement de variable $x = \dfrac{t + \dfrac{b}{2a}}{\sqrt{\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}}}$ et on est amené à calculer les primitives

$$P_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Ces primitives se calculent par récurrence.

Prenons $n \geq 1$, alors:

$$P_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = P_{n+1} + \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

On calcule la dernière primitive par intégration par partie:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = -\frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{1}{2n} P_n$$

La suite de fonction P_n s'obtient donc par la relation de récurrence:

$$P_1(x) = \arctan(x) \quad P_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} P_n(x)$$

Ainsi:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \arctan(x)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{4(x^2+1)} + \frac{3}{8} \arctan(x)$$

6.2.2 Fonctions trigonométriques.

6.2.3 Intégrales abéliennes.

Soit $A(X,Y)$ et $B(X,Y)$ deux fractions rationnelles à deux indeterminées (i.e le quotient de deux polynômes à deux variables). Soit $P(X,Y)$ un polynôme a deux variable. Soit f une fonction définie par:

$$f(X) = \frac{A(X,Y)}{B(X,Y)}, \ avec \ P(X,Y) = 0$$

Toute primitive d'une telle fonction, s'appelle "intégrale abélienne".

Il n'est généralement pas facile de calculer de telle primitive. On peut toutefois remarquer que si la courbe d'équation $P(X,Y) = 0$ admet une paramétrisation il est parfois possible de conclure.

On se place dans le cas où il existe deux fonctions a et b d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall t \in U, \ P(a(t), b(t)) = 0$$

Si on suppose que a est un ^{1}-difféomorphisme, alors, on peut effectuer le changement de variable $X = a(t)$ et trouver une primitive de $\dfrac{A(X,Y)}{B(X,Y)}$ sur $a(U)$ revient donc à trouver une primitive de

$$\frac{A(a(t), b(t))}{B(a(t), b(t))} a'(t)$$

Dans ce cas, nous sommes ramené au cas d'une fraction rationnelle.

Exemple: Cherchons $\int \frac{dX}{XY}$ avec la relation $X^3 + Y^3 = 3XY$ (le folium de Descarte).

Cette courbe (le folium) admet la paramétrisation:

$$X = \frac{3t}{1+t^3}, \ Y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

On pose donc $X = \frac{3t}{1+t^3}$, donc $dX = 3\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt$, et notre intégrale devient après changement de variable :

$$\int (\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{3})dt$$

c'est-à-dire $-1/6(4t + t^{-2})$

6.3 Primitives usuelles.

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
e^{ax} avec $a \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{ax}}{a} + C$
$\text{ch}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{\text{sh}(ax)}{a} + C$
$\text{sh}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{\text{ch}(ax)}{a} + C$
$\cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{\sin(ax)}{a} + C$
$\sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$-\frac{\cos(ax)}{a} + C$
x^a avec $a \in \mathbb{R}/\{1\}$	$]0, +\infty[$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\arcsin(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsh}(\frac{x}{a}) = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,+\infty[$	$\mathrm{argch}(\frac{x}{a}) = \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[$	$-\mathrm{argch}(\frac{-x}{a}) = \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[;\ ]a,+\infty[$	$\frac{1}{2a}\ln(\frac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert})+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\frac{1}{2a}\ln(\frac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert})+C\ (=\frac{1}{a}\mathrm{argth}\frac{x}{a}+C)$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+C$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$]k\pi,(k+1)\pi[$	$-\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln(\lvert\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$	$]0,+\infty[;\ ]-\infty,0[$	$-\ln(\lvert(\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$	$\mathbb{R}$	$2\arctan(e^x)+C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$x\ln(x)-x+C$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x\arctan(x)-\ln(\sqrt{1+x^2})+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arccos(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\operatorname{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$x\operatorname{argsh}(x)-\sqrt{1+x^2}+C$
$\operatorname{argch}(x)$	$[1,+\infty[$	$x\operatorname{argch}(x)-\sqrt{x^2-1}+C$
$\operatorname{argth}(x)$	$]-1,1[$	$x\operatorname{argth}(x)+\ln(\sqrt{1-x^2})+C$

7 Calculs approchés d'intégrales.

7.1 Interpolation polynomiale.

7.1.1 Méthode des rectangles.

Proposition 120.— *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{24}.M_2$$

où $M_2=\sup\limits_{a\leq t\leq b}|f''(t)|$.

Preuve :

Corollaire 121.— *Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ alors, pour tout entier $n\geq 1$, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{24n^2}.M_2$$

où $M_2=\sup\limits_{a\leq t\leq b}|f''(t)|$.

Preuve :

7.1.2 Méthode des trapèzes.

Proposition 122.— *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}.M_2$$

où $M_2 = \sup_{a\leq t\leq b} |f''(t)|$.

Preuve :

Corollaire 123.— *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eșt une application de classe $\mathscr{C}^2$ alors, pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}.M_2$$

où $M_2 = \sup_{a\leq t\leq b} |f''(t)|$.

Preuve :

7.2 Formule d'Euler - Mac-Laurin.

7.2.1 Polynômes et nombres de Bernoulli.

Il exiște bien des façons d'introduire les polynôme de Bernoulli, nous présentons ici l'approche qui nous parait la plus arithmétique.

Soit n et p deux entier. On pose pour $n > 1$:

$$S_n^p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p$$

Les premières sommes sont bien connues:

$$S_n^0 = n-1,\ S_n^1 = \frac{n(n-1)}{2},\ S_n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

En réindexant la somme, on a

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^p = 1 + \sum_{k=1}^{n-2}(k+1)^p = 1 + \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{p} C_p^i k^i = 1 + \sum_{i=0}^{p} C_p^i \sum_{k=1}^{n-2} k^i = 1 + \sum_{i=0}^{p} C_p^i S_{n-1}^i$$

Comme $S_n^p - S_{n-1}^p = (n-1)^p$, on a donc:

$$n^p - 1 = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i S_n^i$$

Cette formule permet de calculer, par récurrence les sommes S_n^p. Par exemple, on a $n^4 - 1 = S_n^0 + 4S_n^1 + 6S_n^2 + 4S_n^3$, donc $S_n^3 = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$. Cette formule permet aussi de juștifier le résultat suivant :

Lemme 124.— *Pour tout entier p, il exiște un unique polynôme $Q_p \in \mathbb{Q}[X]$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n^p = Q_p(n)$$

La démonstration de ce lemme est immédiate, il suffit de définir la famille de polynômes $(Q_n)_n$ par la relation de récurrence suivante :

$$Q_0(X) = X - 1,\ Q_n(X) = \frac{X^{n+1} - 1 - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k Q_k(X)}{n+1}$$

Voici les premiers de ces polynômes:

$$Q_0(X) = X - 1$$
$$Q_1(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$$
$$Q_2(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)$$
$$Q_3(X) = \frac{1}{4}X^2(X-1)^2$$
$$Q_4(X) = \frac{1}{30}X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1)$$
$$Q_5(X) = \frac{1}{12}X^2(X-1)^2(2X^2-2X-1)$$
$$Q_6(X) = \frac{1}{42}X(X-1)(2X-1)(3X^4-6X^3+3X+1)$$

Etudions maintenant ces polynômes.

Proposition 125.— *Les polynômes $(Q_n(X))_n$, vérifient les propriétés suivantes:*

1) Pour tout n, $Q_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ et $d^\circ Q_n = n+1$. Le terme de plus au degré de Q_n est $\frac{1}{n+1}$.

2) Pour tout $n \geq 1$, $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.

3) La famille de polynômes $(Q_n(X))_{n\geq 1}$ est l'unique famille de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ qui vérifie les propriétés suivantes:

a) $d^\circ Q_n = n+1$
b) $Q_n(X) - Q_n(X-1) = (X-1)^n$
c) $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$

4) Pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $Q_n^{'}(X) + a_n = nQ_{n-1}(X)$.

5) Pour tout $n \geq 1$, $Q_n(1-X) = (-1)^{n+1}Q_n(X)$.

6) Les polynômes Q_{2p} s'annullent en $1/2$ et nul part ailleur sur $]0,1[$.

7) Les polynômes Q_{2p+1} sont de signe constant sur $[0,1]$.

8) $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} \neq 0$, le signe de a_{2p} est égal au signe de Q_{2p-1} sur $]0,1[$ et ce signe est $(-1)^p$.

Preuve : Les propriétés 1) et 2) se déduisent immédiatement de la relation de récurrence.

Pour 3) il est déjà clair que la famille $(Q_n(X))_{n\geq 1}$ vérifie ces propriétés. Soit $(P_n(X))_{n\geq 1}$, une famille de polynômes vérifiant a),b),c). Formons alors les polynômes $H_n = Q_n - P_n$, on a:

$$H_n(X) - H_n(X-1) = Q_n(X) - Q_n(X-1) - P_n(X-1) + P_n(X) = 0$$

Donc H_n est un polynôme constant, mais $H_n(0) = Q_n(0) - P_n(0) = 0$ donc $H_n = 0$ et par suite $P_n = Q_n$.

Pour 4), on remarque que la relation est vraie au rang $n = 1$, en effet il suffit de poser $a_1 = -1/2$. Si on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang $n-1$, alors d'après la relation de récurrence, on a au rang n:

$$\begin{aligned} Q_n'(X) &= X^n - \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k Q_k'(X) \\ &= X^n - \tfrac{1}{n+1}(1+\sum_{k=1}^{n-1} kC_{n+1}^k Q_{k-1}(X)) - \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k C_{n+1}^k \\ &= X^n - \tfrac{-1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k C_{n+1}^k}{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)C_{n+1}^{k+1}Q_k(X) \end{aligned}$$

De même, on a $nQ_{n-1}(X) = X^n - 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-2} C_n^k Q_k(X)$ et ainsi:

$$\begin{aligned} nQ_{n-1}(X) - Q_n'(X) &= -\tfrac{n+\sum_{k=1}^{n-1} a_k C_{n+1}^k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-2}(\tfrac{k+1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} - C_n^k)Q_k(X) \\ &= -\tfrac{n+\sum_{k=1}^{n-1} a_k C_{n+1}^k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-2}(C_n^k - C_n^k)Q_k(X) \\ &= -\tfrac{n+\sum_{k=1}^{n-1} a_k C_{n+1}^k}{n+1} \end{aligned}$$

La proposition eſt donc démontrer, remarquons au passage que cela nous permet de définir la suite $(a_n)_n$ par la récurrence suivante:

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_n = -\frac{n+\sum_{k=1}^{n-1} C_{n+1}^k a_k}{n+1}$$

Pour 5) étudions la famille $\tilde{Q}_n(X) = (-1)^{n+1}Q_n(1-X)$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\tilde{Q}_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ et $d^\circ \tilde{Q}_n(X) = n+1$. De plus $\tilde{Q}_n(0) = \tilde{Q}_n(1) = 0$. Enfin

$$\tilde{Q}_n(X) - \tilde{Q}_n(X-1) = (-1)^{n+1}(Q_n(1-X) - Q_n(2-X)) = -(-1)^{n+1}(1-X)^n = (X-1)^n$$

Donc d'après le 3), $\tilde{Q}_n(X) = (-1)^{n+1}Q_n(1-X) = Q_n(X)$.

Pour montrer 6) et 7) commencons par prouver que $a_{2p+1} = 0$. Remarquons d'abord que d'après le 5), $Q_{2p}(1/2) = 0$ et comme $Q_{2p+1}(X) = Q_{2p+1}(1-X)$, on a $Q_{2p+1}'(X) = -Q_{2p+1}'(1-X)$; Donc $Q_{2p+1}'(1/2) = 0$. Par conséquent, comme $Q_{2p+1}'(X) = a_{2p+1} + Q_{2p}(X)$, on en déduit en prenant $X = 1/2$ que $a_{2p+1} = 0$. Prouvons maintenant par récurrence que pour $p > 0$, Q_{2p} ne s'annule qu'en 1/2 sur $]0,1[$. Au rang $p = 1$, $Q_2 = \frac{1}{2}X(X-1)(2X-1)$.

Si au rang $p > 0$ la propriété eſt vraie, alors d'après ce qui précède $Q_{2p+1}' = (2p+1)Q_{2p}$. Donc Q_{2p+1}' ne s'annulle qu'en 1/2, comme cette fonction eſt continue et que $Q_{2p+1}(0) = Q_{2p+1}(1) = 0$, on en déduit que Q_{2p+1} eſt monotone sur $[0,1/2]$ et sur $[1/2,1]$, croissante sur l'un et décroissante sur l'autre (par conséquent Q_{2p+1} ne s'annulle pas sur $]0,1[$ et eſt donc de signe conſtant).

Par double dérivation, on trouve $Q_{2p+2}'' = (2p+2)(2p+1)Q_{2p}$. Donc Q_{2p+2}'' ne s'annulle qu'en 1/2 sur $]0,1[$. Deux situations se présentent alors pour Q_{2p+2}':

Q_{2p+2} valant 0 en 0 et en 1 et n'étant pas conſtante, Q_{2p+2}' s'annulle sur $]0,1[$. On obtient donc les deux cas de figure possibles:

Dans tout les cas Q_{2p+2} ne s'annulle qu'en 1/2 sur $]0,1[$.

Pour 8) on a $Q_{2p}'(X) + a_{2p} = 2pQ_{2p-1}(X)$. On vient de voir que $Q_{2p}'(X)$ s'annullait au moins une fois sur $]0,1[$. On a donc a_{2p} qui eſt égale à une valeur de Q_{2p-1} sur $]0,1[$, donc eſt non nul et de même signe que Q_{2p-1} sur $]0,1[$.

L'étude faite au 6) 7) prouve que sur un voisinage droite de 0, Q_{2p}'' et Q_{2p} sont de signe opposés. Or $Q_{2p+1}'(X) = (2p+1)Q_{2p}(X)$ et $Q_{2p}''(X) = 2pQ_{2p-1}'(X)$, donc au voisinage droite de 0, Q_{2p+1}' et Q_{2p-1}' sont de signe opposé, comme $Q_{2p+1}(0) = Q_{2p-1}(0) = 0$, on en déduit qu'au voisinage droite de 0 ces deux fonction sont de signe contraire.

Pour évaluer ce signe, il suffit de regarder pour $p = 1$, on trouve alors que ce signe eſt bien $(-1)^p$.

Définition 126.— *On définit le p-ième nombre de Bernoulli, comme étant le rationnel* $B_p = (-1)^p a_{2p}$.
On définit le n-ième polynôme de Bernoulli, comme étant le polynôme $B_n(X)$ *définit par* $B_n(X) = Q_n'(X)$ *(*$= nQ_{n-1} - a_n$ *pour* $n > 0$*).*

Lemme 127.— *La suite* (B_n) *des polynôme de Bernoulli est entièrement définie par la relation de récurrence suivante:*

$$B_0(X) = 1;\ \forall n \geq 1,\ B_n'(X) = nB_{n-1}(X);\ \forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)$$

Les nombres B_n *de Bernoulli sont donné par*

$$B_n = (-1)^{n+1} B_{2n}(0) = (-1)^{n+1} B_{2n}(1)$$

Preuve : Il est clair que la famille des polynômes de Bernoulli vérifie bien cette relation de récurrence. Maintenant cette relation définie une seule famille de polynôme, car par récurrence B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$, mais la condition $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$ impose un choix unique pour cette primitive.

Voici la liste des premiers polynômes de Bernoulli

$$B_0(X) = 1.$$

$$B_1(X) = X - \frac{1}{2}.$$

$$B_2(X) = X(X-1) + \frac{1}{6}.$$

$$B_3(X) = (X - \frac{1}{2})X(X-1).$$

$$B_4(X) = X^2(X-1)^2 - \frac{1}{30}.$$

$$B_5(X) = (X - \frac{1}{2})X(X-1)(X(X-1) - \frac{1}{3}).$$

$$B_6(X) = X^2(X-1)^2(X(X-1) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{42}$$

Voici la liste des premiers nombres de Bernoulli[2]

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$, $B_7 = \frac{7}{6}$, $B_8 = \frac{3617}{510}$,
$B_9 = \frac{43867}{798}$, $B_{10} = \frac{174611}{330}$, $B_{11} = \frac{854513}{138}$, $B_{12} = \frac{236364091}{2730}$

Comme nous allons le voir plus loin, il y a quantité d'applications des polynômes et nombres de Bernoulli. Remarquons avant de passer à celle-ci que les polynômes de Bernoulli ne sont pas simple, leur étude présente encore de grandes zone d'ombre, citons quelques résultats recent les concernant. B_{2n+1} n'a que des racines simples et n'admet que 0, 1, 1/2 comme racines rationnelles. B_{2n} n'a pas de racines rationnelle. B_{2^n} et B_{14} sont irréductible, dans les autres cas, on ne sait presque rien sur les facteur irréductible de B_n.

[2] Bien que portant le même nom, les polynômes et les nombres de Bernoulli n'ont pas étés introduit par le même mathématicien : c'est Jacques Bernoulli (1654-1705) qui a la paternité des nombres de Bernoulli, alors que les polynômes de Bernoulli ont été introduit par son neveu Daniel Bernoulli (1700-1782). La famille de Mathématicien francais Bernoulli compte pas moins de onze membres sur trois générations, d'où la multitude de résultats portant ce nom.

7.2.2 Applications des nombres et polynômes de Bernoulli.

Nous allons maintenant chercher un équivalent simple pour la suite B_n. Intoduisons pour cela la fonction zéta de Riemann dans le domaine réel:

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Cette fonction joue un rôle centrale en théorie des nombres, elle permet notament de donner bon nombre de résultats sur la répartition des nombres premiers.
On prend $n \in \mathbb{N}^{*+}$ et $m \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer

$$\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt$$

Pour $m \geq 1$, opérons une double intégration par partie:

$$\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt = \frac{1}{2\pi n}[Q_{2m+1}(x)\sin(2\pi nx)]_0^1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}[Q'_{2m+1}(x)\cos(2\pi nx)]_0^1 - \frac{1}{4\pi^2 n^2}\int_0^1 Q''_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt$$

Par la relation ??? du lemme ???, on a $Q''_{2m+1} = (2m+1)2mQ_{2m-1}$ et $Q'_{2m+1}(1) = Q'_{2m+1}(0)$. On a donc pour $m \geq 1$:

$$\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt = -\frac{1}{4\pi^2 n^2}\int_0^1 Q_{2m-1}(t)\cos(2\pi nt)dt$$

En appliquant $m-1$ fois cette relation, on obtient:

$$\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt = -1^{m-1}\frac{(2m+1)!}{(2\pi n)^{2m}}\int_0^1 Q_1(t)\cos(2\pi nt)dt$$

Comme $\int_0^1 Q_1(t)\cos(2\pi nt)dt = -\frac{1}{4\pi^2 n^2}$, on obtient finalement pour m entier:

$$\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{(2\pi n)^{2m+2}}$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N^{2m+2}} = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m+2}}{(2m+1)!}\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\sum_{k=1}^{N}\cos(2\pi nt)dt$$

Or

$$\sum_{k=1}^{N}\cos(2\pi nt) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2N+1)\pi t - \sin\pi t}{\sin\pi t}$$

Posons $\varphi(x) = \frac{Q_{2m+1}(x)}{\sin\pi x}$, cette fonction est continuement dérivable sur $]0,1[$. Maintenant une rapide étude au voisinage de 0 et de 1, montre que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N^{2m+2}} = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m+2}}{(2m+1)!}[\int_0^1 g(t)\sin(2N+1)\pi t dt - \int_0^1 Q_{2m+1}(t)dt]$$

On a $\int_0^1 Q_{2m+1}(t)dt = \int_0^1 \frac{Q'_{2m+2}(t)}{2m+2}dt + \frac{a_{2m+2}}{2m+2} = \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}B_{m+1}$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N^{2m+2}} = \frac{1}{2}\frac{2\pi^{2m+2}}{(2m+2)!}B_{m+1} + (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m+2}}{(2m+1)!}\int_0^1 g(t)\sin(2N+1)\pi t dt$$

g étant continue, on peut intégrer par partie la dernière intégrale et on obtient:

$$\int_0^1 g(t)\sin(2N+1)\pi t dt = \frac{-1}{2N+1}[g(t)\cos(2N+1)\pi t]_0^1 + \frac{1}{2N+1}\int_0^1 g^{'}(t)\cos(2N+1)\pi t dt$$

On a donc

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 g(t)\sin(2N+1)\pi t dt = 0$$

Au total, on obtient pour $m \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2m}} = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_m$$

En particulier, on a:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

Ce qui justifie, au passage, que $\zeta(2m)$ est un nombre transcendant.[3][4]

Il est clair que $\lim_{s\to+\infty}\zeta(s) = 1$, on a donc l'équivalent:

$$B_n \underset{n}{\simeq} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

En utilisant la formule de Stirling ???, on obtient alors:

$$B_n \underset{n}{\simeq} 2\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}$$

7.2.3 La formule d'Euler - Mac-Laurin

Théorème 128.— *(Formule d'Euler - Mac-Laurin) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$, alors il existe $\xi \in]0,1[$ tel que:*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + (-1)^n\frac{B_n}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)$$

de plus,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + \int_0^1\frac{B_{2n}(t)}{(2n)!}f^{(2n)}(t)dt$$

(B_n et $B_{2n}(x)$ représentent les nombres et polynômes de Bernoulli).

Preuve :

L'application de la formule d'Euler - Mac-Laurin au calcul approché d'intégrale est trés clair, si l'on sait calculer, puis bornés les valeurs des dérivées succesives de f sur $[0,1]$. Par exemple, nous allons calculer les premières décimales de e, en remarquant que $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = e - 1$:

[3] Un nombre transcendant est un nombre complexe qui n'est pas algébrique, c'est-à-dire qu'il n'est pas racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Lindemann à montré à la fin du siecle dernier que π était transcendant, ce qui justifie notre résultat. Notons au passage qu'un nombre transcendant est irrationnel.

[4] On ne sait rien de similaire sur les valeurs de ζ en les nombres impairs. Le seul résultat connu est du à R.Apéry qui a montré, il y a quelques années, que $\zeta(3)$ était irrationnel.

La fonction $f(x) = e^x$ est C^∞ sur $[0,1]$ et pour tout $n \geq 0$, $f^{(n)} = e^x$. La formule d'Euler - Mac-Laurin devient, à l'ordre n:

$$\exists \xi_n \in]0,1[\ e-1 = \frac{1}{2}(e+1) + (e-1)\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} + (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} e^{\xi_n}$$

Comme (???) $\dfrac{B_n}{(2n)!} \underset{n}{\simeq} \dfrac{2}{(2\pi)^{2n}}$ et que pour tout $\xi \in]0,1[$, $0 < e^\xi < 3$, on déduit que $\lim_n \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \dfrac{B_k}{(2k)!} = \dfrac{e-3}{2e-2}$ et que pour tout $n \geq 1$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} - \frac{e-3}{2e-2} \right| = \frac{B_n}{(2n)!}\frac{e^{\xi_n}}{e-1} < \frac{3B_n}{(2n)!}$$

Si l'on veut trouver un rationnel qui approxime $\dfrac{e-3}{2e-2}$ à 10^{-10} près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{3B_n}{(2n)!} < 10^{-10}$. Pour $n = 7$, on a $\dfrac{3B_7}{(14)!} \simeq 4.10^{-11} < 10^{-10}$, alors le rationnel

$$A = \sum_{k=1}^{6}(-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} =$$

approxime $\dfrac{e-3}{2e-2}$ à 10^{-10} près. On a alors:

$$\left| e - \frac{3-2A}{1-2A} \right| \leq \frac{2e-2}{1-2A} 10^{-10}$$

Comme $0 < 2e-2 < 4$ et $0 < \frac{1}{1-2a} < 1$, on en déduit que le rationnel $\dfrac{3-2A}{1-2A}$, donne 9 chiffres significatif de e. Ainsi:

$$e = 2.71828183?\ a\ 10^{-9}\ pres$$

7.3 Méthode de Newton.