Séries de fonctions

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Cours de Licence 2&3
Bruno Deschamps
Version 1.1

Pour ceux qui jamais satisfaits veulent se tirer pour toujours
Pour ceux qui n'ont jamais osé rêver d'un nouveau jour
Pour ceux qui n'ont jamais chanté leur utopie au fond des cours
Et ceux qui sont prêts à être des guerriers de l'Amour

Revolution, Revolution

Pour ceux qui se sont révoltés sur les pavés qui bougent
Pour ceux qui se sont réveillés à l'heure du Soleil Rouge
Pour ceux qui sont tellement stressés, les mômes et les prolos
Pour ceux qui sont hyper-speedés et les guitar-heros

Revolution, Revolution, Revolution, Revolution

Ceux qui roulent dans le Métro
(dans le métro)
The man in the shadow
(in the shadow)
Le mec pur style afro
(le mec, le mec)
Des flics, des gigolos

Revolution, Revolution, Revolution, Revolution
Revolution, Revolution, Revolution, Revolution

Table des matières

0 Rappels.

0.1 Limite supérieure, limite inférieure

Dans ce premier paragraphe, les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, nous noterons $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la droite réelle à laquelle nous avons rajouté deux éléments $\pm\infty$. Nous étendons l'ordre défini sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décrétant que $+\infty$ est strictement supérieur à n'importe quel nombre réel et à $-\infty$ (resp. que $-\infty$ est strictement inférieur à n'importe quel nombre réel).

Propriété 1.— *1/ Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie non vide possède une borne supérieure et une borne inférieure. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, on note $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de A.*

2/ Si $A \subseteq \mathbb{R}$, est une partie non vide, on a

- $\sup A = +\infty \iff$ *A n'est pas majorée*
- $\sup A \in \mathbb{R} \iff$ *A est majorée*

3/ Une suite croissante (resp. décroissante) est, soit majorée (resp. minorée) et dans ces conditions elle converge dans $\mathbb{R}$, soit non majorée (resp. non minorée) et elle converge alors vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) : dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute suite monotone est convergente.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } w_n = \inf\{u_k \ : \ k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Comme on a l'inclusion $\{u_k \ : \ k \geq n+1\} \subseteq \{u_k \ : \ k \geq n\}$, la suite $(v_n)_n$ est donc décroissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$..

Définition 2.— *La "limite supérieure" (resp. "limite inférieure") de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme l'élément $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n \in \overline{\mathbb{R}}$). On la note $\limsup(u_n)$ ou parfois $\overline{\lim}(u_n)$ (resp. $\liminf(u_n)$ ou $\underline{\lim}(u_n)$).*

Exemple.— 1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\} = \sup\{-1;1\} = 1$ et $w_n = \inf\{-1;1\} = -1$. Ainsi, $\limsup u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$.

2/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (1+(-1)^n)n$. Remarquons que $u_{2k} = 4k$ et $u_{2k+1} = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \sup\{0; 2\times 2n; 2\times(2n+2); 2\times(2n+4); \ldots\} = +\infty \\ v_{2n+1} &= \sup\{0; 2\times 2n; 2\times(2n+2); 2\times(2n+4); \ldots\} = +\infty \end{aligned}$$

Ceci montre que $\limsup u_n = +\infty$. De même, on montre que $\liminf u_n = 0$ (exercice).

3/ Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$. Alors

$$v_n = \sup\left\{\frac{n+2}{n+1}, \frac{n+3}{n+2}, \ldots\right\} = \frac{n+2}{n+1}$$

Donc $\limsup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. De même, on montre que $\liminf u_n = 1$.

Proposition 3.— *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors $\liminf u_n \le \limsup u_n$.*

Preuve : En utilisant les notations de la définition, v_n et w_n sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure du même sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. L'inégalité souhaitée est obtenue en passant à la limite.

□

Théorème 4.— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique alors $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$) est la plus grande (resp. plus petite) valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Preuve : La démonstration concernant $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ est identique. Démontrons le théorème uniquement pour le cas $\limsup u_n$, le cas $\liminf u_n$ étant laissé en exercice. Posons donc $v_n = \sup\{u_k \ : \ k \ge n\}$ et $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Trois cas sont possibles : $L = +\infty$; $L \in \mathbb{R}$ et $L = -\infty$.

Cas 1: $L = +\infty$. La suite $(v_n)_n$ étant décroissante, ceci implique que $v_n = +\infty$ pour tout $n \ge 0$. Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$, ce qui montre que $+\infty$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

Cas 2: $L = -\infty$. Comme $v_n \ge u_n$, ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, et $-\infty$ est bien l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

Cas 3: $L \in \mathbb{R}$. Montrons dans un premier temps que L est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(v_n)_n$ tend vers L, donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \ge N \ |v_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

or, d'après la définition de v_N, on a

$$\exists N_2 \ge N \ \left|v_N - u_{N_2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et ainsi,

$$\left|u_{N_2} - L\right| \le \left|u_{N_2} - v_N\right| + |v_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Le réel L est donc bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Montrons maintenant qu'il s'agit de la plus grande. Considérons un réel $M > L$. Puisque $(v_n)_n$ converge vers L, on a

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N \ |v_n - L| < \frac{M-L}{2}$$

et la suite $(v_n)_n$ étant décroissante, l'égalité précédente implique alors que

$$L < v_N < L + \frac{M-L}{2} < M$$

Par définiton de v_N, on a donc

$$\forall n \ge N, \ u_n \le v_N < \frac{M+L}{2} < M$$

et le réel M ne peut donc pas être une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

□

Théorème 5.— *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique. Les assertions suivantes*

i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge,*

ii) $\limsup u_n = \liminf u_n \in \mathbb{R}$.

sont équivalentes.

Preuve : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence réelle.

□

Théorème 6.— *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergeant vers* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 0$. *Alors*

$$\limsup(u_n v_n) = \limsup u_n \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \limsup u_n$$

Preuve : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, la suite extraite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. On en déduit l'équivalence

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff \left(u_{\varphi(n)}v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

Si l'on note A (resp. B) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$), on a l'égalité $B = \{\lambda\ell \ : \ell \in A\}$. Comme $\ell > 0$, on en déduit

$$\limsup(u_n v_n) = \ell \limsup u_n$$

égalité qui conclut la démonstration.

□

Attention ! a) Généralement, $\limsup(u_n v_n) \neq \limsup u_n \limsup v_n$, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Posons

$$\begin{cases} u_{2k} &= 0 \\ u_{2k+1} &= k \end{cases} \begin{cases} v_{2k} &= k \\ v_{2k+1} &= 0 \end{cases} \begin{cases} \limsup(u_n v_n) &= 0 \\ \limsup u_n &= +\infty \\ \limsup v_n &= +\infty \end{cases}$$

b) L'inégalité $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$ est vraie, mais il n'y a pas toujours égalité. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n$, on a $u_n + v_n = 0$.

Lemme 7.— *Soit* $(u_n)_n$ *une suite à termes positifs. Alors* $\limsup \sqrt[n]{u_{n+1}} = \limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}}$.

Preuve : Supposons dans un premier temps que $\ell = \limsup \sqrt[n]{u_{n+1}} \in \mathbb{R}_+^\times$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\ \sqrt[n]{u_{n+1}} < \ell + \varepsilon$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{n}{n+1}}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que pour $n \geq N_1$, on a $u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} < (\ell+\varepsilon)^{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \varepsilon$. En particulier, $\limsup u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} \leq \ell + \varepsilon$. Cette dernière inégalité

étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} \leq \ell$.
Choisissons désormais $0 < \varepsilon < \ell$.

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_2\ \exists m \geq n\ \sqrt[m]{u_{m+1}} > \ell - \varepsilon$$

On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists N_3 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_3\ \sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)+1}} > \ell - \varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geq N_3$, on a $u_{\varphi(n)+1}^{\frac{1}{(\varphi(n)+1)}} > (\ell - \varepsilon)^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n)+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \varepsilon$. Cette suite extraite montre que $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} \geq \ell - \varepsilon$. Comme précédemment, cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} \geq \ell$, d'où l'égalité $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} = \ell$.

Les cas $\limsup u_n = 0$ et $\limsup u_n = +\infty$ sont laissés en exercice.

□

0.2 Séries numériques

Dans ce paragraphe, les suites et les séries sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

0.2.1 Premiers rappels

Définition 8.— *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle "série" de terme général u_n la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$. On note cette suite $\sum u_n$.*

Théorème 9.— [Critère de Cauchy pour les séries] *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Les assertions suivantes*

i) La série $\sum u_n$ converge,

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0\ \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$,

sont équivalentes.

Preuve : Comme $\mathbb{C}$ est complet, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ est une suite de Cauchy. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ est de Cauchy} &\iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0\ \left|S_{n+p} - S_{n-1}\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

L'équivalence cherchée découle directement de la dernière assertion.

□

Définition 10.— *La série $\sum u_n$ est dite "absolument convergente" si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 11.— *Toute série absolument convergente eſt convergente.*

Preuve : Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Le critère de Cauchy appliqué à la série $\sum |u_n|$ donne

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0\ \left|\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon\right|$$

L'inégalité triangulaire $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ implique alors que la série $\sum u_n$ satisfait bien également le critère de Cauchy. La série $\sum u_n$ eſt donc convergente.

□

Attention ! La réciproque de cet énoncé eſt fausse en général : si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, alors la série $\sum u_n$ converge (d'après le critère des séries alternées) bien que la série $\sum |u_n|$ diverge (comparaison série intégrale).

Corollaire 12.— *Si* $\sum u_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Preuve : Appliquons le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0\ \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$$

Le choix $p = 0$ dans le critère de Cauchy montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

□

D'après le corollaire 12, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. Ceci invite à une terminologie particulière :

Définition 13.— *On dit d'une série* $\sum u_n$ *qu'elle eſt "grossièrement divergente" si son terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0.

0.2.2 Critères de convergences.

<u>Critère des séries alternées.</u>

Définition 14.— *Une série* $\sum u_n$ *eſt dite "alternée" si*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-1)^n |u_n|$$

(Une série alternée eſt donc obligatoirement à valeurs réelles.)

Théorème 15.— (Critère des séries alternées) *Si* $\sum (-1)^n |u_n|$ *désigne une série alternée dont le terme* $(|u_n|)_n$ *décroit vers* 0*, alors la série* $\sum u_n$ *converge. Par ailleurs, pour tout* $n \geq 0$*, on a*

$$\left|\sum_{k\geq n+1} (-1)^k |u_k|\right| \leq |u_{n+1}|$$

Preuve : Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous avons les égalités

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}|u_{2n+3}| + (-1)^{2n+22}|u_{2n+2}| = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -|u_{2n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

qui montrent que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune, notée S. Les indices de ces deux suites extraites couvrent $\mathbb{N}$ entièrement, ce qui assure finalement que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}$ et donc

$$0 \geq S - S_{2n} \geq \sum_{k\geq 2n+1} (-1)^k|u_k| = -|u_{2n+1}| + (S - S_{2n+1}) \geq -|u_{2n+1}|$$

$$0 \leq S - S_{2n-1} \leq \sum_{k\geq 2n} (-1)^k|u_k| = |u_{2n}| + (S - S_{2n}) \leq |u_{2n}|$$

ce qui montre bien la fin du théorème.

□

<u>Transformation d'Abel.</u>

Proposition 16.— *Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites complexes. Si, pour $n \geq 0$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \ + A_n b_n$$

Preuve : Démontrons l'égalité par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité à montrer se lit $a_0 b_0 = A_0 b_0$, égalité qui eﬆ vraie.

Supposons l'égalité démontrée pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n+1$, le membre de droite vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) \ + A_{n+1} b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k-1}) \ + A_n(b_n - b_{n+1}) + A_{n+1} b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k-1}) \ + A_n b_n + b_{n+1}(A_{n+1} - A_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \ + b_{n+1} a_{n+1}
\end{aligned}$$

L'égalité eﬆ donc vérifiée au rang $n+1$, ce qui termine la démonﬆration.

□

Théorème 17.— [Théorème d'Abel] *Gardons les notations de la proposition précédente. Si l'on suppose que*

- *la suite* $(A_n)_n$ *est bornée,*
- *la suite* $(b_n)_n$ *converge vers* 0,
- *la série* $\sum (b_{n+1} - b_n)$ *converge absolument.*

alors la série $\sum a_n b_n$ *converge.*

Preuve : La suite $(A_n)_n$ étant bornée et la suite $(b_n)_n$ convergeant vers 0, on en déduit que $(A_n b_n)_n$ converge vers 0. Ainsi, d'après la proposition 16, on a

$$\sum a_n b_n \text{ converge} \iff \sum A_n(b_n - b_{n-1}) \text{ converge}$$

Considérons $M > 0$ un majorant de la suite $(A_n)_n$: pour tout entier n, $A_n \le M$. La série $\sum M(b_n - b_{n-1})$ convergeant absolument, le critère de Cauchy implique que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ \forall p \ge 0\ \sum_{k=n}^{n+p} |M(b_n - b_{n-1})| < \varepsilon$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, l'entier N donné par la condition de Cauchy vérifie également

$$\forall n \ge N\ \forall p \ge 0\ \left|\sum_{k=n}^{n+p} A_n(b_n - b_{n-1})\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |A_n||b_n - b_{n-1}| \le \sum M|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon$$

La série $\sum A_n(b_n - b_{n-1})$ vérifie donc la condition de Cauchy. Cette dernière série converge donc, tout comme la série $\sum a_n b_n$.

□

Exemple 18.— Si $(\lambda_n)_n$ désigne une suite réelle, décroissante et convergeant vers 0 alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \lambda_n e^{in\theta}$ est convergente.

Montrons ce fait en utilisant le théorème d'Abel : si l'on pose $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \lambda_n$, alors on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} e^{i\theta} - 1 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et donc

$$|A_n| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

ce qui assure que la suite $(A_n)_n$ est bornée. La suite $(b_n)_n$ converge vers 0 par hypothèse et comme on a de plus

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k - b_{k-1}| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \lambda_0 - \lambda_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda_0$$

on peut donc appliquer le théorème d'Abel qui assure alors que la série $\sum \lambda_n e^{in\theta}$ est bien convergente.

Remarque.— Le choix $\theta = \pi$ donne la convergence de la série $\sum (-1)^n \lambda_n$. L'exemple précédent est donc une généralisation du critère des séries alternées.

Application.— La série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{\log n}$ converge si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. En effet, en posant $\lambda_n = \frac{1}{\log n}$, la suite $(\lambda_n)_n$ décroît vers 0. L'exemple 18 implique alors que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{\log n}$ converge. Ainsi, les séries $\mathscr{R}e\left(\sum \frac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ et $\mathscr{I}m\left(\sum \frac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ convergent donc également, ce qui montre que les séries $\sum \frac{\cos(n\theta)}{\log n}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$ convergent.

<u>Critère de d'Alembert.</u>

Théorème 19.— *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positif : pour tout entier n, $u_n > 0$.*

- *Si* $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Preuve : Supposons dans un premier temps $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1$. Posons $v_n = \sup\left\{\frac{u_{k+1}}{u_k} \ : \ k \geq n\right\}$. Posons $\varepsilon = \frac{\lambda - \limsup \frac{u_{n+1}}{u_n}}{2} > 0$. La suite $(v_n)_n$ décroît vers $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ v_n < \lambda$$

Ainsi $\frac{u_{k+1}}{u_k} < \lambda$ pour $k \in [\![N, n]\!]$. Les termes intervenant dans ces inégalités étant strictement positifs, les inégalités peuvent être multipliées entre elles.

$$\frac{u_{n+1}}{u_N} = \prod_{k=N}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \lambda^{n-N+1}$$

Cette inégalité implique

$$\forall n \geq N \ u_n < \frac{u_N}{\lambda^{N-1}} \lambda^n$$

Comme $\lambda < 1$, la série $\sum \lambda^n$ converge, convergence qui implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Intéressons-nous désormais au cas où $\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ \liminf u_n > \lambda > 1$$

Comme précédemment, on montre

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ u_n > \frac{u_N}{\lambda^{N-1}}\lambda^n$$

La divergence grossière de la série $\sum \lambda^n$ (pour $\lambda > 1$) implique alors la divergence grossière de la série $\sum u_n$.

$\square$

Exemple.— La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. En effet, en posant $u_n = \frac{1}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$.

<u>Critère de Cauchy.</u>

Théorème 20.— *Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs : $u_n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

- *Si* $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Preuve : Supposons dans un premier temps $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \sqrt[n]{u_n} < \lambda < 1$.

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \sqrt[n]{u_n} < \lambda$$

En particulier,

$$\forall n \geq N\ u_n < \lambda^n$$

Comme $\lambda < 1$, la série $\sum \lambda^n$ converge, tout comme la série $\sum u_n$ en utilisant le critère de comparaison des séries à termes positifs.
Supposons désormais $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \sqrt[n]{u_n} > \lambda > 1$. Définissons $\varphi(-1) = -1$. Pour chaque entier n, il existe un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $\sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)}} > \lambda$, autrement dit $u_{\varphi(n)} > \lambda^{\varphi(n)} \geq \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci permet de construire une suite extraite de $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0.

$\square$

Exemple.— Intéressons-nous à la série $\sum \left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}$. On a

$$\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}} = \exp\left(\frac{(n^3+2n^2)}{n}\log\left(\cos\frac{1}{2n}\right)\right)$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{2n} \to 0$. Le développement limité à l'ordre 2 de cos en 0 permet d'écrire

$$\cos\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow \log\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow (n^2+2n)\log\left(\cos\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{8} + o(1)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}}\right) = e^{-\frac{1}{8}} < 1$$

Le critère de Cauchy implique alors que la série $\sum \left(\cos \frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}$ converge.

<u>PRODUIT AU SENS DE CAUCHY.</u>

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes. Il faut donner un sens à la série produit $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$. Une idée retenue par Cauchy consiste à regarder le cas particulier où $a_n = \alpha_n X^n$, $b_n = \beta_n X^n$ et $c_n = \gamma_n X^n$, où $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\beta_n \in \mathbb{C}$ et $\gamma_n \in \mathbb{C}$. Le coefficient γ_n est alors la somme des produits $\alpha_k \beta_{n-k}$, où $0 \leq k \leq n$. Il s'agit de la définition que nous retiendrons pour définir la série produit.

Définition 21.— *On appelle "produit au sens de Cauchy" des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série $\sum c_n$, où*

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On note $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

Exemple.— Posons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Le critère des séries alternées montre que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Cependant,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

Or pour $0 \leq k \leq n$, on a $0 < k+1 \leq n+1$ et $0 < n-k+1 \leq n+1$, donc $0 < \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq n+1$. Ainsi,

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

La suite c_n ne tendant pas vers 0, la série produit $\sum c_n$ diverge grossièrement.

Théorème 22.— *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. Soit $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ le produit au sens de Cauchy de ces deux séries. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la série $\sum c_n$ converge et l'on a*

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$$

.

Preuve : Cas particulier où $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}$. En effet, pour $n \geq 0$, on a

$$A_n B_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k b_j$$

et, comme tous les termes sont positifs, on en déduit que

$$C_n = \sum_{k+j\le n} a_k b_j \le A_n B_n \le \sum_{k+j\le 2n} a_k b_j = C_{2n}$$

Les suites $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ sont croissantes et convergentes par hypothèse. Notons $\alpha = \lim_{n\to+\infty} A_n$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} B_n$. L'encadrement $C_n \le A_n B_n$ implique alors $C_n \le \alpha\beta$. La suite $(C_n)_n$ étant croissante et majorée, elle converge. L'inégalité $C_{2n} \ge A_n B_n$ implique $\lim_{n\to+\infty} C_n \ge \alpha\beta$, inégalité qui montre $\lim_{n\to+\infty} C_n = \alpha\beta$.

Cas général : Posons $\widetilde{a}_n = |a_n|$, $\widetilde{b}_n = |b_n|$ et $\widetilde{c}_n = |c_n|$. Définissons également $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\widetilde{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k$, $\widetilde{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{b}_k$ et $\widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{c}_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|C_n - A_n B_n| = \left| \sum_{\substack{0\le k,j\le n\\ k+j>n}} a_k b_j \right| \le \sum_{\substack{0\le k,j\le n\\ k+j>n}} \widetilde{a}_k \widetilde{b}_j = \widetilde{A}_n \widetilde{B}_n - \widetilde{C}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le cas particulier, ce qui termine la démonstration.

□

<u>Sommes permutées.</u>

Théorème 23.— *On considère une suite $(\lambda_n)_n$ de complexes et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une permutation. Si la série $\sum \lambda_n$ converge absolument alors il en est de même de la série $\sum \lambda_{\sigma(n)}$ et l'on a $\sum_{n\ge 0} \lambda_{\sigma(n)} = \sum_{n\ge 0} \lambda_n$.*

Preuve :

□

Attention ! L'hypothèse d'absolue convergence est capitale dans ce théorème, par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\ln(2) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} + \cdots \\
&\ne \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} + \cdots\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

De manière plus générale, on a la propriété suivante :

Proposition 24.— *Si* $\sum a_n$ *désigne une série semi-convergente de réels, alors pour tout* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$*, il existe une permutation* σ_ℓ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma_\ell(n)} = \ell$.

Preuve :

□

<u>Sommes doubles.</u>

Théorème 25.— (Fubini) *On considère une suite doublement indicée* $(\lambda_{n,l})_{n,l}$ *de complexes. Si l'on suppose que*

• *pour tout* $n \geq 0$*, la série* $\sum_l \lambda_{n,l}$ *converge absolument,*

• *la série* $\sum_n \sum_{l=0}^{+\infty} |\lambda_{n,l}|$ *converge,*

alors,

• *pour tout* $l \geq 0$*, la série* $\sum_n \lambda_{n,l}$ *converge absolument,*

• *la série (des limites)* $\sum_l \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{n,l}|$ *converge,*

et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \lambda_{n,l} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{n,l} = \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{n+l=h} \lambda_{n,l}$.

Preuve :

□

0.3 Holomorphie.

Définition 26.— *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert. Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et soit* $z_0 \in \Omega$*. On dit que* f *est "holomorphe" en* z_0 *si*

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda$$

On note alors $f'(z_0) = \lambda$*. On dit également que* f *est "dérivable au sens complexe" ou plus simplement "dérivable" en* z_0.

Si f *est holomorphe en tout point de* Ω*, on dit que* f *est "holomorphe sur* Ω*". Dans ces conditions, l'application définie sur* Ω *par* $z \mapsto f'(z)$ *est appelée la "dérivée" de* f.

Théorème 27.— *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide. Soit* $z_0 \in \Omega$*. Soient* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *deux fonctions holomorphes en* z_0*. Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. *La fonction* $\alpha f + g$ *est holomorphe en* z_0 *et*

$$(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$$

2. *La fonction* $f \times g$ *est holomorphe en* z_0 *et*

$$(f\times g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

3. *Supposons* $f(z_0) \neq 0$. *Alors il existe* $\rho > 0$ *tel que* f *ne s'annule pas sur* $B(z_0, \rho)$. *La fonction* $\dfrac{1}{f}$ *(définie au moins sur* $B(z_0,\rho)$*) est alors holomorphe en* z_0 *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Preuve : Les démonstrations sont identiques au cas réel. Elles sont donc laissée en exercice. Afin de donner une idée des démonstrations, nous nous intéresserons au point 2. Soit $z \in \Omega$, $z \neq z_0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z)}{z-z_0} + \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= g(z)\underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} f'(z_0)} + f(z_0)\underbrace{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} g'(z_0)} \xrightarrow[z\to z_0]{} g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\end{aligned}$$

L'égalité à démontrer est donc vraie.

□

Théorème 28.— [Composée de fonctions holomorphes] *Soient* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *et* $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ *deux ouverts non vides. Soit* $z_0 \in \Omega$. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant* $f(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$ *et soit* $g : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$. *Supposons également que* f *est holomorphe en* z_0 *et que* g *est holomorphe en* $f(z_0)$. *Alors* $g \circ f$ *est holomorphe en* z_0 *et*

$$(g\circ f)'(z_0) = g'\circ f(z_0) \times f'(z_0) = g'(f(z_0)) \times f'(z_0)$$

Preuve : La démonstration est identique au cas réel. Elle est donc laissée en exercice.

□

1 Suites et séries de fonctions.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera identiquement $|.|$ la valeur absolu ou le module suivant que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Etant donné $x_0 \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon > 0$, on notera $B(x, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{K}/ \ |x - x_0| < \varepsilon\}$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon ε. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette boule est l'intervalle ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette boule est le disque ouvert de centre x_0 et de rayon ε.

1.1 Convergences simple, uniforme.

1.1.1 Définitions, exemples.

Définition 29.— *Etant données $X \subset \mathbb{K}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une application, on appelle "norme infinie" de f sur X, l'élément*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|/\ x \in X\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Exemples 30.— 1/ Si $X =]0, +\infty[$ et $f(x) = 1/x$ alors $\|f\|_\infty = +\infty$.

2/ Si X est un segment et f est continue, alors $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

Lemme 31.— *Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

1/ $\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$.

2/ $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|.\|f\|_\infty$.

3/ $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Avec les conventions :

- $a \leq +\infty$ *pour tout* $a \in [0, +\infty]$.
- $a + +\infty = +\infty$ *pour tout* $a \in [0, +\infty]$.
- $\lambda. + \infty = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in]0, +\infty]$.
- $0. + \infty = 0$.

Preuve : 1/ Si $f \equiv 0$ alors $\{|f(x)|/\ x \in X\} = \{0\}$ et donc $\|f\|_\infty = 0$. Réciproquement, comme pour tout $x \in X$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$, on a bien $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$.

2/ Pour tout $x \in X$, $|\lambda f(x)| = |\lambda|.|f(x)| \leq |\lambda|.\|f\|_\infty$. On a donc $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|.\|f\|_\infty$.

Supposons que $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$. Par caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que $\|f\|_\infty - \varepsilon < |f(x_\varepsilon)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui implique que

$$|\lambda|.\|f\|_\infty - \varepsilon|\lambda| \leq |\lambda f(x_\varepsilon)| \leq \|\lambda f\|_\infty$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $|\lambda|.\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$.

Si maintenant $\|f\|_\infty = +\infty$, alors la fonction f n'est pas bornée sur X. Il en est donc de même de λf (avec $\lambda \neq 0$) et donc $\|\lambda f\|_\infty = +\infty$. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

3/ Pour tout $x \in X$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x)+g(x)|/\ x \in X\}$, il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble qui est, par définition la borne supérieure : $\|f+g\|_\infty$.

□

Définition 32.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que :*

a) La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers le réel $f(x)$.

b) La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge 0.

On peut traduire de manière équivalente ces deux types de convergence de la façon suivante :

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \iff \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On voit alors que :

Proposition 33.— *Si une suite $(f_n)_n$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction f alors elle converge simplement vers cette même fonction.*

Exemple 34.— On considère $X = [0,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n(x) = n^\alpha x(1 - nx + |1 - nx|)$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle et elle converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$.

1.1.2 Propriétés.

Théorème 35.— (Critère de Cauchy uniforme) *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. La suite (f_n) converge uniformément (vers une certaine fonction) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p,q \geq N,\ \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Preuve : Supposons qu'il y ait convergence uniforme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$. On a alors, pour tout $p, q \geq N$

$$\|f_p - f_q\|_\infty = \|(f_p - f) - (f_q - f)\|_\infty \leq \|(f_p - f)\|_\infty + \|(f_q - f)\|_\infty \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Réciproquement, si pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, pour tous $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$, alors pour tout $x \in X$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

mais comme $(f_p)_p$ converge simplement vers f, on en déduit, par passage à la limite que, pour tout $x \in X$

$$\lim_p |f_p(x) - f_q(x)| = |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui implique que, pour tout $q \geq N$, $\|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

□

On écrit parfois le critère de Cauchy uniforme sous la forme équivalente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall k \geq 0,\ \|f_{n+k} - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

<u>Interversion de limites.</u>

Exemple 36.— On pose $X = [0,1[$ et, pour tout $n \geq 0$, $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par ailleurs, pour tout $n \geq 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = 1$. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_n f_n \right) \neq \lim_n \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

Théorème 37.— (Interversion de limites) *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une fonction f et $x_0 \in \overline{X}$. Si, pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n possède une limite λ_n en x_0, alors*

a) La suite $(\lambda_n)_n$ converge (vers $\lambda \in \mathbb{K}$).

b) La fonction f possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

En d'autres termes, on a donc

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_n f_n \right) = \lim_n \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

Preuve : a) Pour tout $x \in X$, on a

$$\lambda_{n+k} - \lambda_n = (\lambda_{n+k} - f_{n+k}(x)) - (\lambda_n - f_n(x)) + (f_{n+k}(x) - f_n(x))$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k \geq 0$, $\|f_{n+k} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ et donc, pour $n \geq N$, $k \geq 0$ et x$\in X$, on a

$$|\lambda_{n+k} - \lambda_n| \leq |\lambda_{n+k} - f_{n+k}(x)| - |\lambda_n - f_n(x)| + \varepsilon$$

Par hypothèse, $\lambda_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ et $\lambda_{n+k} = \lim_{x \to x_0} f_{n+k}(x)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in B(x_0, \alpha) \cap X$, $|\lambda_{n+k} - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon$ et $|\lambda_n - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Pour le choix d'un tel x, on a alors $|\lambda_{n+k} - \lambda_n| \leq 3\varepsilon$. La suite $(\lambda_n)_n$ est donc de Cauchy ce qui assure qu'elle converge.

b) Pour $x \in X$ et $n \geq 0$, on écrit

$$(f(x) - \lambda) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda)$$

Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ et il existe N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$. Prenons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors, pour tout $x \in X$,

$$|f(x) - \lambda| \leq \varepsilon + |f_n(x) - \lambda_n| + \varepsilon$$

Par ailleurs, $\lambda_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ et il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in B(x_0, \alpha) \cap X$, $|\lambda_n - f_n(x)| \leq \varepsilon$. On vient donc de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in B(x_0, \alpha) \cap X$, $|f(x) - \lambda| \leq 3\varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

□

Proposition 38.— (Interversion de limites en $+\infty$) *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications de $]a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. Si, pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n possède une limite $\lambda_n \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, alors*

a) La suite $(\lambda_n)_n$ converge (vers $\lambda \in \mathbb{R}$).

b) La fonction f possède une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$.

Preuve : Exercice

□

Corollaire 39.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f alors f est continue.*

Preuve : Une fonction continue est une fonction qui possède en tout point une limite.

□

Proposition 40.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une fonction f et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X. Si la suite $(f_n(u_n))_n$ converge alors il en est de même de la suite $(f(u_n))_n$ et $\lim\limits_n f_n(u_n) = \lim\limits_n f(u_n)$.*

Preuve : Par définition, on a $|f(u_n) - f_n(u_n)| \leq \|f - f_n\|_\infty$ et comme $(\|f - f_n\|_\infty)_n$ converge vers 0 par hypothèse, on en déduit que la suite $(f(u_n) - f_n(u_n))_n$ converge aussi vers 0. Puisque la suite $(f_n(u_n))_n$ converge, il en est alors nécessairement de même de la suite $(f(u_n))_n$ et l'on a $\lim_n f_n(u_n) = \lim_n f(u_n)$

□

<u>Convergence uniforme et dérivabilité. Cas réel.</u>

Exemples 41.— 1/ On pose $X = \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais la suite $(f_n^{'})_n$ ne converge même pas simplement.

2/ On pose $X = [-1,1]$ et, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ et $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$. La suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction $f(x) = \left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ qui n'est pas dérivable en 0 et pourtant, pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n est dérivable sur I et $f_n^{'}(0) = 0$.

Théorème 42.— *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que*

1/ Il existe $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))_n$ converge.

2/ La fonction f_n est dérivable pour tout $n \geq 0$.

3/ La suite de fonctions $(f_n^{'})_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I.

Alors, la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I et uniformément sur tout segment S inclus dans I vers une fonction f et cette fonction f est dérivable et vérifie $f^{'} = g$.

Preuve : Fixons un segment $S \subset I$ qui contient a et notons $\ell = \ell(S)$ la longueur du segment S.

Soient $n, k \geq 0$ des entiers et $x \in S$. Par application du théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $f_{n+k} - f_n$, il existe $\lambda \in S$ tels que

$$(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(a) - f_n(a)) = (x-a)(f_{n+k} - f_n)'(\lambda) = (x-a)(f'_{n+k}(\lambda) - f'_n(\lambda))$$

ce qui permet d'écrire

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+k}(a) - f_n(a)| + |x-a|\left|(f'_{n+k}(\lambda) - f'_n(\lambda))\right| \leq |f_{n+k}(a) - f_n(a)| + \ell\|f'_{n+k} - f'_n\|_\infty$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N_1 (resp. N_2) tel que, pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_1$) et tout $k \geq 0$, on a $|f_{n+k}(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$ (resp. $\|f'_{n+k} - f'_n\|_\infty \leq \varepsilon$). Ainsi, pour tout $x \in S$, tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ et tout $k \geq 0$, on a $|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon(1+\ell)$, ce qui implique $\|f_{n+k} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon(1+\ell)$. La suite $(f_n)_n$ converge donc bien uniformément sur S vers une fonction f.

Fixons un élément $x_0 \in S$, $n, k \geq 0$ des entiers et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f_{n+k} - f_n$, on sait que pour tout $x \in S$, il existe $\lambda_x \in S$ tels que

$$|(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| = |(x-x_0)(f_{n+k} - f_n)'(\lambda_x)| \leq |(x-x_0)|.\|f'_{n+k} - f'_n\|_\infty$$

Prenons un entier N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$ et tout $k \geq 0$, on ait $\|f'_{n+k} - f'_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N_0$, tout $k \geq 0$ et tout $x \in S$,

$$|(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon|(x-x_0)|$$

La suite $(f_{n+k}(x))_k$ converge vers $f(x)$ et donc, par passage à la limite, on a pour tout $n \geq N_0$ et tout $x \in S$,

$$\lim_k |(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| = |(x-x_0)(f_{n+k} - f_n)'(\lambda_x)| = |(f(x) - f_n(x)) - (f(x_0) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon|(x-x_0)|$$

Pour $x \in S$ et $n \geq N_0$, on a alors

$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)g(x_0)| \leq |(f(x) - f(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))| + |f_n(x) - f_n(x_0) + (x-x_0)f'_n(x_0)| + |x-x_0|.|f'_n(x_0) - g(x_0)|$$

Puisque $(f'_n(x_0))_n$ converge vers $g(x_0)$ il existe $p \geq N_0$ tel que, pour tout $n \geq p$, on ait $|f'_n(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout $x \in S$,

$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)g(x_0)| \leq |f_p(x) - f_p(x_0) + (x-x_0)f'_p(x_0)| + 2\varepsilon|x-x_0|$$

Maintenant, la fonction f'_p est dérivable en x_0, il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap S$, $|f_p(x) - f_p(x_0) + (x-x_0)f'_p(x_0)| \leq \varepsilon|x-x_0|$. On a alors, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap S$ avec $x \neq x_0$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)} - g(x_0)\right| \leq 3\varepsilon$$

ce qui assure finalement que f est bien dérivable en x_0 de dérivée $g(x_0)$.

□

Convergence et intégration. Cas réel.

Exemples 43.— 1/ On considère un dénombrement $(\alpha_n)_n$ de $\mathbb{Q}$ (i.e. une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$). Pour $n \geq 0$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(\alpha_0) = f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_n) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \{\alpha_0, \cdots, \alpha_n\}$.

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction caractéristique des rationnels $1_{\mathbb{Q}}$. Chaque fonction f_n est intégrable (c'est une fonction en escalier) et pourtant la fonction limite $1_{\mathbb{Q}}$ ne l'est pas.

2/ On fixe $\alpha > 0$ et l'on considère, pour $n \geq 1$, la fonction "chapeau"

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n^\alpha x & \text{si } x \in [0,1/n] \\ n^\alpha(2/n - x) & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{si } x \in [2/n, 1] \end{array} \right. \end{array}$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = n^{\alpha-1}$. Ainsi,

- si $\alpha < 1$, on a $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt$.
- si $\alpha = 1$, $\lim_n \int_0^1 f_n(t)dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt$.
- si $\alpha > 1$, la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right)_n$ ne converge pas.

Théorème 44.— *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications définies sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si chaque fonction f_n est intégrable et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est aussi intégrable et*

$$\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)$$

Preuve : Fixons un $\varepsilon > 0$ et considérons un indice $N \geq 0$ tel que $\|f - f_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$, $f_N(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f(x) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Par hypothèse, la fonction f_N est intégrable et il existe donc deux fonctions en escalier e_1 et e_2 sur $[0,1]$ vérifiant $e_1 \leq f_N \leq e_2$ et $\int_a^b e_2(x) - e_1(x)dx \leq \varepsilon/2$. Les fonctions en escalier $f_1(x) = e_1(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et $f_2(x) = e_2(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ vérifient donc $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_a^b f_2(x) - f_1(x)dx \leq \varepsilon$. Ceci étant valable pour tout ε, la fonction f est donc bien intégrable.

Pour le passage à la limite, on remarque que

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty \underset{n}{\rightarrow} 0$$

□

Théorème 45.— (Convergence dominée) *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications définies sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si*

- *chaque fonction f_n est intégrable.*
- *il existe un réel M tel que, pour tout indice n, $\|f_n\|_\infty \leq M$ (hypothèse de domination),*
- *la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f intégrable,*

alors

$$\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)$$

Preuve : La preuve est admise, il s'agit d'une conséquence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

□

Remarque.— Le théorème de convergence dominé semble beaucoup plus fort que le théorème 44 puisqu'il ne présuppose que la convergence simple. Il faut faire attention, néanmoins : dans l'exemple 43 l'hypothèse de domination est bien vérifiée, mais le théorème de convergence dominée est inapplicable car la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable. La grande force du théorème 44 réside dans le fait qu'une limite uniforme de fonctions intégrables est assurément intégrable.

1.2 Séries de fonctions.

Etant donnée une partie $X \subset \mathbb{K}$ et une suite $(u_n)_n$ de fonctions définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle série de fonctions de terme général $(u_n)_n$ la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ et l'on note cette suite $\sum u_n$.

Puisque les séries de fonctions sont des suites de fonctions, on dispose donc des notions de convergence simple et uniforme introduites dans le § 1.1. Lorsque $\sum u_n$ converge simplement, on note $x \longmapsto \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sa (fonction) limite.

1.2.1 Propriétés.

Les propriétés qui suivent sont directement conséquence des divers énoncés du § 1.1.2.

Théorème 46.— *Toute série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.*

Preuve : Exercice.

□

Théorème 47.— (Critère de Cauchy uniforme pour les séries) *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{K}$. La série $\sum u_n$ converge uniformément (vers une certaine fonction)* *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0, \left\| \sum_{k=n}^{k=n+p} u_n \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

Preuve : Exercice.

□

Théorème 48.— (Interversion de limites) *Soient $\sum u_n$ une série de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément et $x_0 \in \overline{X}$. Si, pour tout $n \geq 0$ la fonction u_n possède une limite λ_n en x_0, alors*

a) La série $\sum \lambda_n$ converge.

b) La fonction $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n\geq 0} u_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n$.

Preuve : Exercice.

□

Corollaire 49.— *Soient $(u_n)_n$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ est continue.*

Preuve : Exercice.

□

Proposition 50.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une fonction f et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X. Si la suite $(f_n(u_n))_n$ converge alors il en est de même de la suite $(f(u_n))_n$ et $\lim\limits_n f_n(u_n) = \lim\limits_n f(u_n)$.*

Preuve : Exercice.

□

Théorème 51.— *Soit $(u_n)_n$ une suite d'applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

1/ Il existe $a \in I$ tel que la série $\sum f_n(a)$ converge.

2/ La fonction u_n est dérivable pour tout $n \geq 0$.

3/ La série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur I.

Alors, la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et uniformément sur tout segment S inclus dans I et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ est dérivable sur I et vérifie $\left(\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n\geq 0} u_n'(x)$.

Preuve : Exercice.

□

Théorème 52.— *Soit $(u_n)_n$ une suite d'applications définies et intégrables sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'on suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une fonction intégrable et l'on a*

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)dx$$

Preuve : Exercice.

□

Finissons ce paragraphe par une caractérisation en terme de "suite des restes" de la convergence uniforme. Si l'on considère une série de fonctions $\sum u_n$ une partie $X \subset \mathbb{K}$ qui converge simplement et que l'on note $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ si limite convergeant simplement. La suite des restes $(R_n)_n$ est, par définition, donnée par $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$ où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ désigne la n-ième somme partielle. On voit immédiatement que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Nonobstant, la réciproque de cette propriété n'a pas de sens car, pour définir R_n, il faut préalablement s'assurer que $\sum u_n$ converge bien.

Proposition 53.— *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur une partie $X \subset \mathbb{K}$ et convergeant simplement. Pour que $\sum u_n$ converge uniformément, il faut et il suffit que la suite des restes $\left(\sum_{k\geq n+1} u_k\right)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur X.*

Preuve : Avec les notations précédentes, dire que $\sum u_n$ converge uniformément équivaut à dire que la suite numérique $\|S - S_n\|_\infty$ tend vers 0, or $S - S_n = R_n$ et donc $\sum u_n$ converge uniformément si et seulement si $\|R_n\|_\infty$ tend vers 0, c'est-à-dire si et seulement si $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

□

1.2.2 Convergence normale.

Définition 54.— *On dit d'une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur $X \subset \mathbb{K}$ qu'elle converge "normalement" si la série numérique des normes infinies $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.*

Théorème 55.— *Si $\sum u_n$ désigne une séries de fonctions alors on a les implications suivantes :*

$$\sum u_n \text{ converge normalement} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge uniformément} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge simplement}$$

Preuve : L'implication $\sum u_n$ converge uniformément $\Longrightarrow \sum u_n$ converge simplement est une conséquence immédiate de la proposition 33.

Supposons que $\sum u_n$ converge normalement et fixons un $\varepsilon > 0$. La série $\sum \|u_n\|_\infty$ étant convergente, par application du critère de Cauchy sur les suites numériques, on en déduit qu'il existe un indice N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$\sum_{k=n}^{k=n+p} \|u_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

Maintenant, pour tout $x \in X$, on a

$$\left|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_n(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{k=n+p} |u_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{k=n+p} \|u_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 0, \left\|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_n\right\|_\infty \leq \varepsilon$$

Le critère de Cauchy uniforme est ainsi vérifié et $\sum u_n$ converge bien uniformément sur X.

□

La hiérarchie entre les types de convergence établie dans ce théorème est stricte. En effet, on connait déjà des exemples de cas où il y a convergence simple sans qu'il y ait convergence uniforme. Donnons un exemple de série convergeant uniformément mais pas normalement : prenons $X = [0,1]$ et, pour $n \geq 0$, considérons la fonction u_n définie par

$$\begin{cases} u_n(x) = 0 & \text{si } x \neq 1/n \\ u_n(1/n) = 1/n \end{cases}$$

et $\sum u_n$ la série associée. Puisque

$$\left\|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_k\right\|_\infty = \frac{1}{n}$$

on voit que le critère de Cauchy uniforme est vérifié et donc que $\sum u_n$ converge uniformément. Par ailleurs, on a $\sum \|u_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n}$ qui est une série divergente. Il n'y a donc pas convergence normale.

1.2.3 Formule sommatoire d'Abel.

On cherche ici à appliquer la transformation d'Abel et notamment le théorème 17 dans le cadre de la convergence uniforme des séries de fonctions.

Théorème 56.— *Soient X une partie de $\mathbb{K}$, $(\lambda_n)_n$ une suite de fonctions définies X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions définies X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si les hypothèses suivantes*

- *Les sommes partielles des u_n sont uniformément bornées :*

$$\exists \mu > 0\ \forall 0 \leq p < q,\ \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k(x) \right\|_\infty \leq \mu$$

- *La suite $(\lambda_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.*
- *Pour tout $x_0 \in X$, la suite numérique $(\lambda_n(x_0))_n$ est positive et décroissante.*

sont vérifiées, alors la série de fonctions $\sum \lambda_n u_n$ converge uniformément sur X.

Preuve : Pour $0 \leq p < q$, posons $U_{p,q}(x) = \sum_{k=p+1}^{q} u_k(x)$ (on convient que $U_{p,p}(x) = 0$). Pour tout $k \geq p+1$, on a $u_k(x) = U_{p,k}(x) - U_{p,k-1}(x)$ si bien que l'on a (formule sommatoire d'Abel)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k(x) u_k(x) &= \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k(x) U_{p,k}(x) - \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k(x) U_{p,k-1}(x) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k(x) U_{p,k}(x) - \sum_{k=p}^{q-1} \lambda_{k+1}(x) U_{p,k}(x) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q-1} (\lambda_k(x) - \lambda_{k+1}(x)) U_{p,k}(x) + \lambda_q(x) U_{p,q}(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left| \sum_{k=p+1}^{k=q-1} \lambda_k(x) u_k(x) \right| \leq \mu \sum_{k=p+1}^{q-1} (\lambda_k(x) - \lambda_{k+1}(x)) + \mu\lambda_q(x) = \mu(\lambda_{p+1}(x) - \lambda_q(x)) + \mu(\lambda_q(x) = \mu\lambda_{p+1}(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse sur $(\lambda_n)_n$, il existe un indice N tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in X$, $0 \leq \lambda_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{\mu}$ et ainsi

$$\forall q > p \geq n_0\ \forall x \in X,\ \left| \sum_{k=p}^{k=q-1} \lambda_k(x) u_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

La série $\sum \lambda_n u_n$ converge uniformément sur X.

□

Application.— On reprend l'exemple 18, en posant $X = [\eta, 2\pi - \eta]$ (avec $\eta \in]0, \pi[$) et en considérant $u_n(x) = e^{inx}$. On a alors, pour tout $x \in X$,

$$U_{p,q}(x) = \sum_{k=p+1}^{q} e^{ikx} = \frac{e^{i(q+1)x} - e^{i(p+1)x}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(q+1/2)x} - e^{i(p+1/2)x}}{2i\sin(x/2)}$$

et l'on en déduit que $\|U_{p,q}\|_\infty \leq \dfrac{1}{\sin(\eta/2)}$. On en déduit donc que la série $\sum \lambda_n(x)e^{inx}$ converge uniformément sur X dés que $(\lambda_n)_n$ vérifie les conditions du théorème, par exemple lorsque $\lambda_n(x) = x/n$ ou $\lambda_n(x) = (x/2\pi)^n$.

1.2.4 Produit au sens de Cauchy.

Définition 57.— *Etant données deux séries de fonctions $\sum a_n$ et $\sum b_n$ définies sur une partie $X \subset \mathbb{K}$, on appelle "produit au sens de Cauchy" de ces séries, la série de fonctions $\sum c_n$ où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$.*

Théorème 58.— *Avec les notations précédentes, si les série de fonctions $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent simplement, alors $\sum |c_n|$ (et donc le produit au sens de Cauchy $\sum c_n$) converge simplement aussi.*

Si les séries de fonctions $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent normalement, alors il en est de même de la série produit au sens de Cauchy $\sum c_n$.

Preuve : La première partie est une conséquence immédiate du théorème 22. Pour la convergence normale, notons $\sum \gamma_n$ la série produit au sens de Cauchy de $\sum \|a_n\|_\infty$ et $\sum \|b_n\|_\infty$. Par application du théorème 22, la série $\sum \gamma_n$ converge mais comme, par inégalité triangulaire, on a

$$\sum \|c_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_n b_{n-k}\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_n\|_\infty \|b_{n-k}\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} \gamma_n$$

par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \|c_n\|_\infty$ converge bien.

□

Attention ! Le théorème ci-dessus n'est pas valable pour la convergence uniforme. En effet, sur $[0,+\infty[$ considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} f_0(x) & = & x+1 \\ f_n(x) & = & \dfrac{-1}{n(n+1)} & \text{pour } n \geq 1 \text{ (fonction constante)} \end{cases}$$

Puisque la n-ième somme partielle vaut $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x + \dfrac{1}{n+1}$, on voit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction identité $x \longmapsto x$. Considérons à présent le produit au sens de Cauchy $\left(\sum f_n\right)^2$ qui est absolument convergent puisque produit de séries absolument convergentes (théorème 58 ci-dessus). Si l'on pose $(\sum f_n)^2 = \sum g_n$, alors le calcul montre que $g_0(x) = (x+1)^2$, $g_0(x) = -(x+1)$ et, pour tout $n \geq 2$,

$$g_n(x) = -2\frac{(x+1)}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{(n-k)(n+1-k)} = \frac{-2}{n(n+1)} x + \lambda_n$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$. La série $\sum g_n$ ne peut converger uniformément puisque, pour tout $n \geq 2$ et tout $p \geq 0$, on a

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} g_k \right\|_\infty = \left\| -2x \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} \right)}_{>0} + \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k \right\|_\infty = +\infty$$

et donc le critère de Cauchy uniforme ne saurait être vérifié.

2 Séries entières.

2.1 Définition et structures algébriques.

Définition 59.— *On appelle "série entière" (sur $\mathbb{K}$) toute série de fonctions monomiales, c'est-à-dire toute série de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{K}$ et où z est une variable dans $\mathbb{K}$.*

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on note plus souvent la variable par la lettre x et l'on réserve la notation z lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1.1 Algèbre des séries entières.

La structure de corps de $\mathbb{K}$ permet de définir plusieurs opérations sur l'ensemble des séries entières :

• Addition : $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n$.

• Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda . \sum a_n z^n = \sum \lambda a_n z^n$.

• Produit (au sens de Cauchy) : $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n_k}$.

Théorème 60.— *Muni de ces trois lois de compositions, l'ensemble $\mathbb{K}[[z]]$ des séries entière a une structure de $\mathbb{K}$-algèbre commutative et unitaire, c'est-à-dire que $\mathscr{A}$ est à la fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un anneau (commutatif et unitaire) et que l'on a*

$$\left(\lambda \sum a_n z^n\right)\left(\mu \sum b_n z^n\right) = (\lambda\mu)\left[\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right)\right]$$

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[[z]]$ sont exactement les séries entières $\sum a_n z^n$ telles que $a_0 \neq 0$.

Preuve : Le début de la preuve est laissé en exercice. Considérons une série $S = \sum a_n z^n$. On a

$$\begin{aligned}
S \text{ est inversible} &\iff \text{il existe une série entière } S = \sum b_n z^n \text{ telle que } ST = 1 \\
&\iff \exists (b_n)_n,\ \left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n_k}\right) z^n = 1 \\
&\iff \exists (b_n)_n,\ \left\{\begin{array}{rcl}
a_0 b_0 &=& 1 \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 &=& 0 \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &=& 0 \\
&\vdots& \\
a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 &=& 0 \\
&\vdots&
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On voit alors que, si S est inversible; nécessairement $a_0 \neq 0$ car $a_0 b_0 = 1$. Réciproquement, si $a_0 \neq 0$ alors le système infini précédent permet de calculer une suite $(b_n)_n$ adéquate, en posant $b_0 = a_0^{-1}$, $b_1 = -a_0^{-1}(a_1 b_0)$ et, par récurrence, $b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$.

□

Définition 61.— *Etant donnée une série entière $S = \sum a_n z^n$, on appelle "valuation" de S l'élément*

$$v(S) = \min(n \geq 0/\ a_n \neq 0) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

La valuation des séries entières eſt une application qui jouit des propriétés suivantes :

Proposition 62.— *Si S et T sont deux séries entières alors*

a) $v(S) = +\infty \Longleftrightarrow S = 0$.

b) $v(ST) = v(S) + v(T)$.

c) $v(S+T) \geq \min(v(S), v(T))$ (et il y a égalité dés que $v(S) \neq v(T)$).

Preuve : Exercice.

□

2.1.2 Composition de séries entières.

On se donne une série entière $S = \sum a_n z^n$ et l'on suppose que $v(S) \geq 1$, c'eſt-à-dire que $a_0 = 0$. Pour un entier $p \geq 0$, on note $S^p = \sum a_n^{(p)} z^n$ la puissance p-ième de S (le produit au sens de Cauchy de S par elle-même, p fois). D'après la proposition 62, on a alors $v(S_p) \geq p$, c'es-à-dire que $a_0^{(p)} = a_1^{(p)} = \cdots = a_{p-1}^{(p)} = 0$. Si l'on considère un polynôme $P(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et que l'on calcule $P(S) = b_0 + b_1 S + \cdots + b_n S^n$ (qui eſt une série entière) en développant que les termes en z^k de $P(S)$ sont obtenus exclusivement par le développement de $b_0 + b_1 S + \cdots + b_i S^k$. On peut donc donner du sens à $P(S)$ quand on remplace, pour P, la qualité d'être polynôme par celle d'être série entière.

Définition 63.— *Soient $S = \sum a_n z^n$ et $T = \sum b_n z^n$ deux séries entières. On suppose que $a_0 = 0$ et, pour tout entier $p \geq 0$, on pose $S^p = \sum a_n^{(p)} z^n$. La série composée $T \circ S$ eſt, par définition, la série entière*

$$T \circ S = b_0 + \sum \left(\sum_{p=1}^{n} b_p a_n^{(p)} \right) z^n = b_0 + \sum \left(\sum_{p \geq 1} b_p a_n^{(p)} \right) z^n$$

Exemple.— Si l'on considère la série entière $S = \sum z^{n+1}$, on a alors $S \circ S = \sum 2^n z^{n+1}$. (Exercice)

2.2 Rayon de convergence.

2.2.1 Lemme d'Abel.

Proposition 64.— (Lemme d'Abel) *Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ pour lequel la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eſt bornée. Alors pour tout $z_1 \in K$ vérifiant $|z_1| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z_1^n$ converge absolument (CVA). En conséquence de quoi, l'ensemble de réels $\{r \geq 0\ :\ (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eſt borné$\}$ eſt un intervalle de la* *forme* $[0,\alpha]$ *ou* $[0,\alpha[$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. *Dans ces conditions, on a*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \alpha \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > \alpha \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

Preuve : Soit $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $|z_1| < |z_0|$. On a alors $\left|\frac{z_1}{z_0}\right| < 1$ et $\left|a_n z_1^n\right| = \left|a_n z_0^n\right| \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$. La série $\sum \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ est convergente, donc la série $\sum \left|a_n z_1^n\right|$ est également convergente, ce qui montre la première partie du Lemme d'Abel.

Notons $I = \{r \geq 0 \ : \ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné}\}$. Remarquons que $0 \in I$, de sorte que $I \neq \emptyset$. Soit $r \in I$. Si $0 \leq r' < r$, on applique le résultat de la première partie (avec $z_0 = r'$) pour en déduire que la série $\sum \left|a_n r'^n\right|$ converge. Cette dernière série étant convergente, on a $\left|a_n r'^n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier la suite $(|a_n r'^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $r' \in I$. Ainsi, I est un intervalle de la forme $[0,\alpha]$ ou $[0,\alpha[$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supposons désormais que $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $|z| > \alpha$. Alors $|z| \notin I$ et la suite $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Ainsi, $|a_n z^n| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Supposons finalement que $|z| < \alpha$.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ |z| < \lambda < \alpha$$

L'ensemble I étant un intervalle, on a $\lambda \in I$. Ainsi $(|a_n \lambda^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme $|z| < \lambda$, on en déduit $\sum a_n z^n$ CVA, ce qui termine la démonstration.

$\square$

Définition 65.— *L'élément* $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *apparaissant dans le lemme d'Abel s'appelle le "rayon de convergence" de la série* $\sum a_n z^n$. *Sur l'ensemble* D *des* $z \in \mathbb{K}$ *vérifiant* $|z| < \alpha$, *la série entière définit donc une fonction. Cet ensemble* D *s'appelle le "disque de convergence" de la série* $\sum a_n z^n$. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D =]-\alpha,\alpha[$ *est un intervalle ouvert centré en* 0 *(si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $I = \mathbb{R}$ *sinon) et si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D = B(0,\alpha)$ *est la boule ouverte de rayon* α *et centrée en* 0 *(si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $I = \mathbb{C}$ *sinon).*

Remarque.— On ne peut a priori rien dire quant à la convergence sur le cercle $\{|z| = \alpha\}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exemple.— Intéressons-nous à la série $\sum \frac{z^n}{n}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $|z_0| > 1$, alors $\left|\frac{z_0^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Le rayon de convergence R de la série vérifie donc $R \leq 1$. Si $|z_0| < 1$, alors $\left(\left|\frac{z_0^n}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, $R \geq 1$.

On en déduit donc $R = 1$. Étudions la nature de la série sur le cercle de convergence. Soit $z_0 \in \mathscr{S}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. Si $z_0 = 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Si $z_0 \neq 1$, alors $z_0 = e^{in\theta}$ où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. L'exemple 18 utilisant le théorème d'Abel (théorème 17) implique alors que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Remarque.— Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

2.2.2 Règles de calcul.

Théorème 66.— (Hadamard) *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Alors*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ *et* $\frac{1}{+\infty} = 0$*).*

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{C}^\times$. D'après le critère de Cauchy,

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|a_n z_0^n|} < 1 &\implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ \limsup \sqrt[n]{|a_n z_0^n|} > 1 &\implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement} \end{aligned}$$

Or $\sqrt[n]{|a_n z_0^n|} = |z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ et z_0 est fixé. Les implications précédentes se récrivent donc

$$\begin{aligned} |z_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} &\implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ |z_0| > \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} &\implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement} \end{aligned}$$

L'égalité $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ découle alors de ces implications.

$\square$

Théorème 67.— *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $a_n \neq 0$ *et si la suite* $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_n$ *converge dans* $[0, +\infty]$*, alors*

$$R = \frac{1}{\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Preuve : Puisque $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, le critère de d'Alembert appliqué à la série numérique $\sum \left|a_n z_0^n\right|$, pour $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé, donne

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\left|a_{n+1} z_0^{n+1}\right|}{\left|a_n z_0^n\right|} < 1 &\implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge absolument} \\ \lim_n \frac{\left|a_{n+1} z_0^{n+1}\right|}{\left|a_n z_0^n\right|} > 1 &\implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement} \end{aligned}$$

Maintenant, on a $\lim_n \left(\frac{\left|a_{n+1} z_0^{n+1}\right|}{\left|a_n z_0^n\right|} \right) = |z_0| \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. On en déduit donc que

$$|z_0| < \frac{1}{\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \implies \sum a_n z_0^n \text{ converge absolument}$$
$$|z_0| > \frac{1}{\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement}$$

ce qui achève la démonstration.

□

2.3 Séries entières à rayons strictement positifs.

2.3.1 Convergence uniforme.

Théorème 68.— *On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$.*

1/ La série $\sum a_n z^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact $K \subset B(0,R)$.

2/ S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$, tel que $\sum a_n z_0^n$ converge absolument, alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur la boule fermée $B_f(0,R)$.

Preuve : 1/ L'application $z \longmapsto |z|$ est continue et comme K est compact, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $z_0 \in K \subset B(0,R)$ tel que $|z| \leq |z_0|$ pour tout $z \in K$. Sur K, on a donc $\|a_n z^n\|_\infty = |a_n z_0^n|$ et comme $|z_0| < R$, d'après le lemme d'Abel (proposition 64), $\sum \|a_n z^n\|_\infty$ converge bien.

2/ Même preuve en remarquant que sur $B_f(0,R)$, on a $\|a_n z^n\|_\infty = |a_n z_0^n|$.

□

Corollaire 69.— *Toute série entière définit une fonction continue à l'intérieur de son disque de convergence.*

Preuve : Soit $z_0 \in B(0,R)$ et $\varepsilon = \dfrac{R - |z_0|}{2} > 0$. La boule fermée $B_f(z_0, \varepsilon)$ est un compact inclus dans $B(0,R)$ qui est, en plus, un voisinage de z_0. D'après le théorème précédent, il y a convergence uniforme de $\sum a_n z^n$ sur $B_f(z_0,\varepsilon)$ et comme chaque fonction $z \mapsto a_n z^n$ est continue en z_0, le théorème 49 prouve alors que $\sum a_n z^n$ est continue en z_0.

□

2.3.2 Formule et inégalités de Cauchy.

Théorème 70.— (Formule de Cauchy) *On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$.*

Pour $z \in B(0,R)$, on note $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a alors, pour tout $r \in]0,R[$ et tout indice $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$$

Preuve : Puisque $B_f(0,r)$ est un compact inclus dans $B(0,R)$, le théorème 68 assure que $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $B_f(0,r)$. En appliquant le théorème 52, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\sum_{k\geq 0} a_k r^k e^{i(k-n)t}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\geq 0} a_k r^{k-n}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}a_n\int_0^{2\pi}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{k\geq 0,\ k\neq n} a_k r^{k-n}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt \\
&= a_n + \frac{1}{2\pi}\sum_{k\geq 0,\ k\neq n} a_k r^{k-n}\left[\frac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)}\right]_0^{2\pi} = a_n
\end{aligned}$$

□

Corollaire 71.— (Inégalités de Cauchy) *On garde les hypothèses et notations du théorème 70. Si l'on note $M_f(r) = \max_{|z|\leq r}|f(z)|$, alors*

$$|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}$$

Preuve : On a $|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M_f(r)dt = \frac{M_f(r)}{r^n}$.

□

Si $R = +\infty$ et que la fonction f est bornée en module (disons par M) alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

ce qui assure que $a_n = 0$. Une conséquences des inégalités de Cauchy est donc le

Corollaire 72.— (Théorème de Liouville) *Une fonction entière (i.e. une fonction définie par une série entière de rayon infini) est bornée si et seulement si elle est constante.*

2.3.3 Propriétés algébriques.

Théorème 73.— *Soient $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon $R_1 > 0$ (resp. $R_2 > 0$) et de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (resp. $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$) et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. On a alors*

1. *la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1 et*

$$\forall z \in B(0,R_1) \ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda f(z)$$

2. *la série entière $\sum (a_n + b_n)z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1,R_2)$ et*

$$\forall z \in B(0,\min(R_1,R_2)) \ \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)z^n = f(z) + g(z)$$

   Si, de plus, $R_1 \neq R_2$ alors $R = \min(R_1,R_2)$.

3. *La série entière, produit au sens de Cauchy, $\sum c_n z^n = \left(\sum \lambda a_n z^n\right)\left(\sum \lambda b_n z^n\right)$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1,R_2)$ et*

$$\forall z \in B(0,\min(R_1,R_2)) \ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z)g(z)$$

Preuve :

1. Remarquons que $\left|\lambda a_n z_0^n\right| = |\lambda|\left|a_n z_0^n\right|$. Ainsi, la suite $\left(\lambda a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à la condition nécessaire et suffisante que la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

2. Si $|z_0| < \min(R_1,R_2)$, alors les séries numériques $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent. Ainsi, la série numérique $\sum (a_n + b_n)z_0^n$ converge également, d'où l'inégalité $R \geq \min(R_1,R_2)$. Supposons désormais $R_1 \neq R_2$. Quitte à échanger f et g, on peut supposer $R_1 < R_2$. Soit z_0 vérifiant $R_1 < z_0 < R_2$. Alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement tandis que $\sum b_n z_0^n$ diverge. On en déduit que $\sum (a_n + b_n)z_0^n$ diverge grossièrement, c'est-à-dire $R \leq R_1$ et par suite $R = R_1$.

3. Soit $|z_0| < \min(R_1,R_2)$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent normalement sur $\overline{B(0,|z_0|)}$. Ainsi, les série $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent absolument. Le théorème 22 donne alors la convergence de la série $\sum c_n z_0^n$ vers $f(z_0)g(z_0)$.

□

Remarque.— En ce qui concerne la somme de séries entières, lorsque $R_1 = R_2$, on ne peut rien dire quant au rayon de convergence. Par exemple, les séries $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{-z^n}{n}$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1 tandis que leur somme $\sum 0 \cdot z^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Théorème 74.— [Théorème de substitution] *Soit* $\sum a_n z^n$ *(resp.* $\sum b_n z^n$*) une série entière de rayon* $R_1 > 0$ *(resp.* $R_2 > 0$*) et de somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *(resp.* $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$*). Supposons que* $f(0) = 0$*. La fonction* f *étant continue en* 0*, on peut choisir* $R_3 > 0$ *tel que* $R_3 \leq R_1$ *et que*

$$\forall z \in B(0, R_3), |f(z)| < \frac{R_2}{2}$$

Considérons alors $f(z)^n = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p^{(n)} z^p$ *(produit au sens de Cauchy n fois de la série associée à* f *avec elle-même). Posons* $c_0 = b_0$ *et pour* $p \geq 1$*,*

$$c_p = \sum_{n=1}^{p} b_n a_p^{(n)} = b_1 a_p^{(1)} + b_2 a_p^{(2)} + \cdots + b_p a_p^{(p)}$$

La fonction $g \circ f$ *est développable en série entière de rayon* $\geq R_3$ *en* 0 *et*

$$\forall z \in B(0, R_3),\ g \circ f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} b_n a_p^{(n)} \right) z^p$$

Preuve : Remarquons dans un premier temps que f est continue en 0. En choisissant $\varepsilon = \frac{R_2}{2}$ et en remarquant que l'ensemble des boules ouvertes forme une base d'ouverts de la topologie de $\mathbb{C}$, on déduit

$$\exists 0 < R_3 \leq R_1\ \forall z \in B(0, R_3),\ \ |f(z)| < \frac{R_2}{2}$$

Pour $n \geq 0$, considérons les polynômes $h_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ et $g_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$. La convergence uniforme de g sur $B(0, \rho)$ (pour tout $\rho < R_2$) implique $\lim_{n \to +\infty} g_n(f(z)) = g(f(z))$. Il suffit donc de montrer que $\lim_{n \to +\infty} |h_n(z) - g_n(f(z))| = 0$. Dans ce but on définit pour $k \in \mathbb{N}$, $M_{f^k}(\rho) := \sup_{|z| < \rho} |f(z)|^k = M_f(\rho)^k$ (la dernière égalité découle de la croissance de l'application $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$). Pour $\sigma < R_2$ et pour $\rho < R_3$, les inégalités de Cauchy nous donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \leq n,\ |b_n| \leq \frac{M_g(\sigma)}{\sigma^n} \text{ et } \left| a_n^{(k)} \right| \leq \frac{M_f(\rho)^k}{\rho^n}$$

Ainsi, pour tout $z \in B(0, \rho)$, on a

$$g_n \circ f(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (f(z))^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{q=k}^{+\infty} a_q^{(k)} z^q$$

Comme $\overline{B(0, \sigma)} \subseteq B(0, R_2)$ et $\overline{B(0, \rho)} \subseteq B(0, R_3)$, toutes les séries considérées convergent uniformément. L'égalité reste donc vraie pour tout $z \in B(0, \rho)$ lorsqu'on intervertit les deux signes somme.

$$\begin{aligned} g_n\circ f(z) &= b_0+\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\min(q,n)} a_q^{(k)}b_k\right)z^q = b_0+\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{q} a_q^{(k)}b_k\right)z^q+\sum_{q=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)}b_k\right)z^q \\ &= h_n(z)+\sum_{q=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)}b_k\right)z^q \end{aligned}$$

Or, pour $z\in B(0,\rho)$, $\left|a_q^{(k)}\right|\leq \dfrac{M_f(\rho)^k}{\rho^q}$. Comme $M_f(\rho)\leq \frac{R_2}{2}<R_2$, on peut choisir σ vérifiant $M_f(\rho)<\sigma<R_2$. Dans ces conditions, pour tout $z\in B(0,\rho)$, on a

$$|g_n\circ f(z)-h_n(z)| = \left|\sum_{q=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)}b_k\right)z^q\right|$$

On remarque alors que pour $q\geq n+1$ fixé

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)}b_kz^q\right| &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{M_f(\rho)^k}{\rho^q}\cdot\frac{M_g(\sigma)}{\sigma^k}|z|^q = M_g(\sigma)\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^q\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{M_f(\rho)}{\sigma}\right)^k \\ &< M_g(\sigma)\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^q\frac{1}{1-\frac{M_f(\rho)}{\sigma}} \qquad \left(\text{car } 0<\frac{M_f(\rho)}{\sigma}<1\right) \end{aligned}$$

En reportant dans l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} |g_n\circ f(z)-h_n(z)| &< \sum_{q=n+1}^{+\infty}\frac{M_g(\sigma)}{1-\frac{M_f(\rho)}{\sigma}}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^q = \frac{M_g(\sigma)}{1-\frac{M_f(\rho)}{\sigma}}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{|z|}{\rho}} \qquad \left(\text{car } 0<\frac{|z|}{\rho}<1\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

□

2.3.4 Théorème d'Abel-Dirichlet.

Théorème 75.— (d'Abel-Dirichlet) *Soit* $S=\sum a_nz^n$ *une série entière complexe de rayon de convergence* $0<R<+\infty$*. S'il existe un complexe* $|z_0|=R$ *telle que* S *converge en* z_0 *alors la série* S *converge uniformément sur le segment* $[0,z_0]=\{tz_0/\ t\in[0,1]\}$.

Preuve : Quitte à faire $z\to R\dfrac{z}{z_0}$, on peut se ramener au cas $z_0=R$. Pour $x\in[0,R]$ et des indices $m<n$ et $p<q$, on pose

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= \sum_{i=p+1}^{q} a_ix^i=\sum_{i=p+1}^{q} a_iR^iy^i \text{ en ayant posé } y=\frac{x}{R}\in[0,1] \\ S_{m,n} &= \sum_{j=m+1}^{n} a_jR^j \end{aligned}$$

En effectuant la sommation d'Abel, on voit alors que pour $p \geq m$, on a

$$A = \sum_{i=p+1}^{q} S_{m,i} y^i - \sum_{i=p}^{q-1} S_{m,i} y^{i+1} = S_{m,q} y^q - S_{m,p} y^{p+1} + \sum_{i=p+1}^{q-1} S_{m,i}(y^i - y^{i+1})$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque, par hypothèse, $\sum a_n R^n$ converge, il existe un indice n_0 tel que

$$n > m \geq n_0 \Longrightarrow |S_{m,n}| \leq \varepsilon$$

Compte-tenu du fait que $y \in [0,1]$ et donc que $y^i - y^{i+1} \leq 0$, en appliquant l'inégalité triangulaire, on voit que, si $q > p \leq m \leq n_0$, on a

$$|A| \leq \varepsilon y^q + \varepsilon y^{p+1} + \varepsilon \sum_{i=p+1}^{q-1} (y^i - y^{i+1}) = \varepsilon y^q + \varepsilon y^{p+1} + \varepsilon(y^{p+1} - y^q) = 2\varepsilon y^{p+1} \leq 2\varepsilon$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in [0, R]$, on voit donc que $\sum a_n x^n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[0, R]$.

□

Corollaire 76.— *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $0 < R < +\infty$*. Si la série* $\sum a_n R^n$ *est convergente, alors*

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$$

Preuve : D'après le théorème 75, la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0, R]$ et la fonction $x \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est donc continue sur $[0, R]$ (corollaire 39).

□

Exemple.— Le corollaire du théorème d'Abel-Dirichlet permet donc de passer à la limite au bord du disque de convergence d'une série entière sans se soucier d'autre chose que la série converge ponctuellement sur le point du bord. Par exemple, on a $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (par application du critère des séries alternées), on en déduit donc que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$$

Remarque.— La réciproque du corollaire 76 est fausse en général, la limite de la série entière peut très bien exister en R^- sans que la série soit convergente en R. Par exemple, on a $\lim_{x \to 1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z x^n = 1/2$, mais $\sum (-1)^n$ diverge. Il existe néanmoins des réciproques dans certains cas particuliers (voir exercice sur les théorèmes de Tauber).

2.4 Dérivation, intégration.

2.4.1 Dérivation et formule de Taylor.

Lemme 77.— *Soit $\sum a_n z_n$ une série entière réelle de rayon de convergence R. Alors la série $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ (appelée "série dérivée") a pour rayon de convergence R.*

Preuve : Notons R' le rayon de CV de la série $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. En utilisant le critère d'Hadamard, on a

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad\qquad R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}}$$

Or $\sqrt[n]{n+1} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(n+1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} &= \limsup\left(\sqrt[n]{n+1}\cdot\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}\cdot\limsup\sqrt[n]{|a_{n+1}|} \qquad \text{(d'après le théorème 6)}\\ &= \limsup\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\end{aligned}$$

Le lemme 7 donne alors l'égalité des deux rayons de convergence.

□

Théorème 78.— *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière réelle (resp. complexe) de rayon de convergence $R > 0$. Pour $z \in I =]-R, R[$ (resp. $z \in B = B(0,R)$) notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est dérivable (resp. holomorphe) sur I (resp. B). De plus,*

$$\forall z \in I \text{ (resp. } B), \; f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$

Preuve : Considérons la série entière de la variable réelle $\sigma(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| t^n$. Cette série a pour rayon R. Appliquons le théorème 51 de dérivation des séries de fonctions de la variable réelle : la fonction σ est dérivable sur $]-R, R[$ de dérivée

$$\sigma'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)|a_{n+1}|t^n$$

Soit $z_0 \in B(0,R)$. Pour $z \in B(0,R)$, on a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\left(\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}\right)$$

Or, en posant $z = z_0 + h$, pour $n \geq 2$ on a

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{(z_0+h) - z_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k z_0^{n-k}}{h} - \frac{z_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z_0^{n-k}$$

D'où

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z_0^{n-k}$$

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z_0|^{n-k} = \frac{(|z_0| + |h|)^n - |z_0|^n}{|h|} - n|z_0|^{n-1}$$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{(|z_0| + |h|)^n - |z_0|^n}{|h|} - n|z_0|^{n-1} \right)$$

$$= \frac{\sigma(|z_0| + |h|) - \sigma(|z_0|)}{|h|} - \sigma'(|z_0|)$$

Faire $z \to z_0$ revient, par définition à faire $|h| \to 0$. Ainsi,

$$\frac{\sigma(|z_0| + |h|) - \sigma(|z_0|)}{|h|} - \sigma'(|z_0|) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

limite qui montre que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$$

d'où la conclusion recherchée.

□

Corollaire 79.— *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière réelle (resp. complexe) de rayon* $R > 0$ *et de somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Alors* f *est indéfiniment dérivable (resp. holomorphe) sur* $I =]-R, R[$ *(resp.* $B = B(0,R)$*). De plus, pour tout* $p \geq 0$ *et tout* $z \in I$ *(resp.* B*), on a*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+p)!}{m!} a_{m+p} z^m = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$$

Preuve : Exercice.

□

Corollaire 80.— *En gardant les même hypothèses que ci-dessus, pour tout* $p \geq 0$, *on a* $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. *Ainsi, on obtient le développement de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

valable pour tout $z \in B(0,R)$.

Preuve : Exercice.

□

2.4.2 Intégration.

L'application, à l'envers des énoncés du § précédent, donne l'énoncé suivant :

Proposition 81.— *Si $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors la série "primitive" $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est aussi de rayon R et l'on a, pour tout $z \in B(0,R)$,*

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \right)' = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Dans le cas de la variable réelle, on obtient alors le théorème d'intégration suivant :

Corollaire 82.— *Si $\sum a_n x^n$ désigne une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f, alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]-R,R[$, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(b^n - a^n) = \left[\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right]_a^b$$

Preuve : Exercice.

□

2.5 Zéros isolés.

Théorème 83.— (dit des zéros isolés) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $a_n \neq 0$. Alors*

$$\exists 0 < \rho < R \; \forall z \in B(0,\rho) \setminus \{0\}, \;\; f(z) \neq 0$$

Preuve : Notons $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \; : \; a_n \neq 0\}$ (la valuation de la série entière associée à f). On a

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0} + a_{n_0+1} z^{n_0+1} + \cdots = a_{n_0} z^{n_0} \left(1 + \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} z + \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} z^2 + \dots \right)$$

Posons g la série entière $g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k$. La série entière g a également pour rayon de convergence R (cela se voit en utilisant par exemple le critère d'Hadamard). Le théorème

?? montre que g est continue sur $B(0,R)$. Ainsi, $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 1$. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et appliquons le critère de continuité à g en 0.

$$\exists \rho > 0\ \forall z \in B(0,R)\ \left(|z| < \rho \implies |g(z) - g(0)| < \frac{1}{2}\right)$$

En fixant $\rho > 0$ comme ci-dessus, pour tout $z \in B(0,\rho)$, on a $|g(0)| - |g(z)| \leq |g(z) - g(0)| < \dfrac{1}{2}$ et $|g(z)| > \dfrac{1}{2}$. La fonction g ne s'annule donc pas sur $B(0,\rho)$. De plus, la fonction $z \mapsto a_{n_0} z^{n_0}$ ne s'annule pas sur $B(0,\rho) \setminus \{0\}$. La fonction f ne s'annule donc pas sur $B(0,\rho) \setminus \{0\}$.

□

Rappel.— Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est un point d'accumulation de la partie A s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes (exercice).

i) Pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap B(z_0, \varepsilon)$ contient au moins 2 éléments.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap B(z_0, \varepsilon)$ contient une infinité d'éléments.

iii) Il existe une suite injective $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = z_0$.

Corollaire 84.— *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ de somme $f(z) = \sum a_n z^n$ et $\Gamma \subseteq B(0,R)$ une partie telle que $f|_\Gamma \equiv 0$. Si 0 est point d'accumulation de Γ, alors $a_n = 0$ pour tout entier n.*

Preuve : Il s'agit simplement de la contraposée du théorème 83.

□

Corollaire 85.— *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ et de somme $f(z) = \sum a_n z^n a$ et $g(z) = \sum b_n z^n$. Posons $R = \min(R_1, R_2)$. Les assertions suivantes*

i) $\forall z \in B(0,R),\ \ f(z) = g(z)$,

ii) $\exists 0 < \rho < R,\ \forall z \in B(0,\rho),\ \ f(z) = g(z)$,

iii) Il existe une suite injective $(u_n)_n$ d'éléments de $B(0,R)$ convergeant vers 0 telle que $f(z_p) = g(z_p)$,

iv) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = b_n$,

v) $f = g$,

sont équivalentes. En particulier, une série entière possède un unique développement en série entière : son développement de Taylor.

Preuve : Notons $h(z) = f(z) - g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) z^n$, de rayon $\geq R$. Notons $\mathscr{Z} = \{z \in B(0,R)\ :\ h(z) = 0\}$. En appliquant de théorème 83 à la fonction h, on obtient les implications $iv) \implies v) \implies i) \implies ii) \implies iii)$.

$iii) \implies iv)$: le réel 0 est un point d'accumulation de $\mathscr{Z}$. D'après le corollaire 84, on a $a_n - b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, d'où le point iv).

2.6 Développement en série entière.

2.6.1 Fonction développable en série entière.

Définition 86.— *On considère une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{K}$. On dit de f qu'elle est "développable en série entière au point $z_0 \in D$" (ou plus simplement "d.e.s.e en z_0"), s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et un réel $0 < r < R$ tel que, pour tout $z \in B(z_0, r)$ on ait*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Une telle écriture s'appelle un "développement en série entière" de f en z_0 (ou plus simplement "le d.e.s.e en z_0").

Proposition 87.— *Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur un ouvert D de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si f et g sont d.e.s.e en un point $z_0 \in D$, alors*

1/ il en est de même des fonctions

a) $z \longmapsto \lambda f(z) + g(z)$.

b) $z \longmapsto f(z).g(z)$.

c) $z \longmapsto 1/f(z)$ au voisinage de z_0 si $f(z_0) \neq 0$.

2/ a) Il existe un voisinage de z_0 tel que f soit indéfiniment dérivable (holomorphe).

b) Pour tout $p \geq 0$ la fonction $f^{(p)}$ est d.e.s.e en z_0. Plus précisément, si pour tout $z \in B(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

alors pour tout $z \in B(z_0, r)$ on a

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} (z - z_0)^n$$

c) Le d.e.s.e de f en z_0 est unique et vaut $\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$.

Preuve : 1.a,b. sont conséquences directes du théorème 73.

Pour le 1.c., par hypothèse, il existe $\rho > 0$ tel que $B(z_0, \rho) \subset D$ et tel que pour tout $z \in B(z_0, \rho)$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$. En particulier, f est continue sur $B(z_0, \rho)$ et donc, si l'on suppose $f(z_0) \neq 0$ (i.e. $a_0 \neq 0$), alors il existe $0 < \rho_0 \leq \rho$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(z_0, \rho_0)$ (voir le théorème 83 à venir). La fonction $1/f$ a donc bien un sens au voisinage de z_0.

Ecrivons alors $f(z) = a_0 + g(z)$ où $g(z) = \sum_{n\geq 1} a_n (z - z_0)^n$. La série entière $G = \sum_{n\geq 1} a_n u^n$ a un rayon de convergence $\geq \rho_0$ et la série entière $I(z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{u^n}{a_0^{n+1}}{}^{n}$ a pour rayon de convergence $|a_0|$. On a alors

$$I(u) = \frac{1}{a_0 + u} \text{ pour } u \in B(0, |a_0|) \text{ et } G(z - z_0) = g(z) \text{ pour } z \in B(z_0, \rho_0)$$

Comme $G(0)=0$, on peut considérer la série composée $I \circ G$ et le théorème de substitution **??** assure alors qu'il existe $\rho_1 \le \rho_0$ tel que

$$(1/f)(z) = \frac{1}{a_0 + g(z)} = I \circ G(z - z_0)$$

pour tout $z \in B(z_0, \rho_1)$.

Les points 2.a,b. sont conséquences immédiates du corollaire 79.

Si l'on considère, sur $B(0,r)$, la fonction $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ alors on sait que $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ (corollaire 85). Comme $f(z) = g(z-z_0)$, on a, par dérivation de fonctions composées, $f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z-z_0)$ et donc $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(z_0)$. Le fait que le d.e.s.e soit unique est aussi conséquence du corollaire 85.

□

Théorème 88.— *Si $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon $R > 0$ alors la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est d.e.s.e en tout point de la boule $B(0,R)$.*

Preuve : Soit $z_0 \in B(0,R)$ et $0 < \rho < R - |z_0|$. Considérons la série entière $g(w) = z_0 + w$ qui est de rayon infini. Il suffit de montrer que f est développable en série entière $\sum c_n w^n$ autour de $w = 0$. Or

$$w \in B(0,\rho) \implies g(w) \in B(0,R)$$

La fonction composée $f \circ g$ est donc bien définie sur $B(0,\rho)$. La fonction f étant une série entière, l'égalité $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est vérifiée dès que $|z| < R$. Ainsi, en posant $z = z_0 + w$,

$$\forall w \in B(0,\rho)\ f \circ g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + w)^n \tag{1}$$

Intéressons-nous aux sommes partielles et définissons les fonctions

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \text{ et } h_m(w) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p = \sum_{p=0}^{m} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} w^p$$

On a

$$f_m \circ g(w) = \sum_{n=0}^{m} a_n (z_0+w)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_0^{n-p} w^p \right) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=p}^{m} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p$$

de sorte que

$$h_m(w) - f_m \circ g(w) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p$$

Soit $|z_0|+\rho<r<R$. Remarquons que $\binom{n}{p}z_0^{n-p}$ est le coefficient d'ordre p du développement en série entière de $g(w)^n$. En utilisant l'égalité $M_{g^n}(\rho)=M_g(\rho)^n=(|z_0|+\rho)^n$, les inégalités de Cauchy impliquent

$$\begin{aligned}
|h_m(w)-f_m\circ g(w)| &\leq \sum_{p=0}^{m}\left(\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{M_f(r)}{r^n}\frac{M_g(\rho)^n}{\rho^p}\right)|w|^p=\sum_{p=0}^{m}M_f(r)\left(\sum_{n=m}^{+\infty}\left(\frac{M_g(\rho)}{r}\right)^n\right)\left(\frac{|w|}{\rho}\right)^p\\
&=\sum_{p=0}^{m}M_f(r)\left(\frac{M_g(\rho)}{r}\right)^m\frac{1}{1-\frac{M_g(\rho)}{r}}\left(\frac{|w|}{\rho}\right)^p=M_f(r)\left(\frac{M_g(\rho)}{r}\right)^m\frac{1}{1-\frac{M_g(\rho)}{r}}\sum_{p=0}^{m}\left(\frac{|w|}{\rho}\right)^p\\
&\leq M_f(r)\left(\frac{M_g(\rho)}{r}\right)^m\frac{1}{1-\frac{M_g(\rho)}{r}}\frac{1}{1-\frac{|w|}{\rho}}
\end{aligned}$$

En choisissant $0<\tilde{\rho}<\rho$, pour $w\in B(0,\tilde{\rho})$, on obtient

$$|h_m(w)-f_m\circ g(w)|\leq M_f(r)\left(\frac{M_g(\rho)}{r}\right)^m\frac{1}{1-\frac{M_g(\rho)}{r}}\frac{1}{1-\frac{\tilde{\rho}}{\rho}}$$

Or $\dfrac{M_g(\rho)}{r}<1$. L'inégalité précédente implique alors, pour $w\in B(0,\tilde{\rho})$

$$\lim_{m\to+\infty}h_m(w)=\lim_{m\to+\infty}f_m\circ g(w)$$

Comme la suite de fonctions $(f_m\circ g)_{m\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers $f\circ g$ sur $B(0,\tilde{\rho})$, le résultat découle de la limite précédente.

□

Lors de la démonstration précédente, nous avons déterminé les coefficients du Développement en Série Entière de f en z_0 : l'égalité $w=z-z_0$ donne le d.e.s.e

$$f(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}c_p(z-z_0)^p \text{ avec } c_p=\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}a_nz_0^{n-p}=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$$

2.6.2 Critère de développabilité. Cas réel.

On considère ici une fonction $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Si f est d.e.s.e en $x_0\in I$, alors la proposition 87.2. assure que f est localement $\mathscr{C}^\infty$ en x_0. Pour autant cette dernière condition n'est pas suffisante pour assurer que f est d.e.s.e en x_0 (voir exercices). On sait, par ailleurs, que si f est d.e.s.e en x_0 alors son d.e.s.e est unique et est égal à sa série de Taylor en x_0. On voit donc que l'on a

f est d.e.s.e en x_0 $\Longleftrightarrow$ il existe $\alpha>0$ tel que

- la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$
- la série entière $\sum\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ est de rayon de convergence $\geq\alpha$
- pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$, on a $\lim_n\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n\right)=0$

On en déduit le critère suffisant suivant :

Proposition 89.— *Avec les notations précédentes, pour que f soit d.e.s.e en x_0, il suffit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

- *la fonction f soit $\mathscr{C}^\infty$ sur $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,*
- *il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on ait $\|f^{(n)}\|_\infty^{I_\alpha} \leq \mu$.*

Preuve : La formule de Taylor avec reste intégrale assure que, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \mu \int_0^1 (1-t)^n dt = \mu \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

□

2.6.3 Critère de développabilité. Cas complexe.

Un des objets de l'analyse complexe est de faire le lien entre dérivabilité simple (holomorphie) et développabilité en série entière. Le résultat le plus significatif de la théorie est le suivant : *étant donnée un fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ et un point $z_0 \in D$, on a l'équivalence*

$$f \text{ est d.e.s.e en } z_0 \iff f \text{ est holomorphe sur un voisinage de } z_0$$

La preuve de ce résultat nécessite des outils qui sortent du cadre de ce cours, mais le résultat mérite d'être signaler pour montrer que l'analyse complexe possède des propriétés étonnantes par rapport à l'analyse réelle. Par exemple, avec ce résultat, on voit assez facilement qu'une fonction de la variable complexe f, définie sur un ouvert D, est holomorphe si et seulement si elle est indéfiniment holomorphe, ce qui n'est définitivement pas le cas pour la variable réelle.

2.6.4 Développements usuels.

Dans la pratique pour trouver l'éventuel d.e.s.e d'une fonction en un point, on se ramène par translation en 0.

Développement de $x \longmapsto \ln x, \arctan x$: Puisque, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$$

on trouve, par primitivation que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\ln(1-x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

De même, par substitution par $-x^2$ et primitivation, on trouve que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n} \\ \arctan x &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Développement de $x \longmapsto e^x$: Par application directe de la proposition 2.6.4, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Développements de $x \longmapsto \sin x, \cos x, \mathrm{sh} x, \mathrm{ch} x$: En utilisant les formules d'Euler $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et ce qui précède, on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} x &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \mathrm{sh} x &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Développement de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$: On considère un réel α non entier et, pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$$

Puisque $\binom{\alpha}{n+1}/\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha-n}{n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 1$, par application de la règle de d'Alembert, on voit que le série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ est de rayon $R = 1$. En dérivant sur $]-1,1[$, il vient

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = 1 + \sum_{n\geq 1}\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right)x^n = \sum_{n\geq 0}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x)$$

En résolvant l'équation différentielle (avec la condition $f(0) = 1$), on voit que finalement, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$$

Pour $\alpha = 1/2$, on a pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(2k-1)2k}{2k}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}.\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2}{4^n n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2}{4^n n}\binom{2n-2}{n-1}x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \cdots$$

Pour $\alpha = -1/2$, un calcul similaire donne $\binom{1/2}{n} = (-1)^n \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ et donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n$$

<u>*Développement de* $x \longmapsto \arcsin x, \arccos x, \operatorname{argsh} x$</u> : En utilisant le développement précédent, on trouve en substituant par x^2 que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n} \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}
\end{aligned}$$

En intégrant, on trouve alors que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsh} x &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}x^{2n+1} \\
\arcsin x &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}x^{2n+1} \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

3 Fonctions analytiques.

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions, exemples.

Définition 90.— *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est "analytique" sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et il existe $0 < \rho < R$ tels que*

$$\forall z \in B(0,\rho)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

On dit également que f est "localement développable en série entière" en tout point de Ω.

Dans la définition précédente, la série entière $\sum a_n z^n$ associée à f et au point z_0 est unique d'après le principe des zéros isolés.

Exemple 91.— Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$. Alors la fonction f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n && \text{si } |z-z_0| < |1-z_0| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n && \text{si } z \in B(z_0, |1-z_0|) \end{aligned}$$

Le développement de f en série entière en z_0 est donc valable pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, ce qui montre que f est bien analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Théorème 92.— *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω. Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, f est indéfiniment dérivable au sens complexe en z_0. De plus,*

$$\forall z_0 \in \Omega\ \exists \rho > 0\ \forall z \in B(z_0,\rho)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$. Posons $g(z) = f(z+z_0)$, de sorte que l'on se ramène au voisinage de 0 :

$$z + z_0 \in B(z_0,\rho) \iff z \in B(0,\rho)$$

Les corollaires 80 et 85 donnent alors

$$\exists \rho > 0\ \forall z \in B(0,\rho)\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Soit $h : z \mapsto z - z_0$. Alors h est indéfiniment dérivable et $f = g \circ h$. Comme $h'(z) = 1$, on montre par récurrence $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(0)$. Ainsi

$$\forall z \in B(z_0,\rho)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

égalité qui termine la démonstration.

□

Théorème 93.— *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$ *et de somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Alors* f *est analytique sur* $B(0,R)$.

Preuve : Il s'agit d'une conséquence du théorème 88

□

3.1.2 Algèbre des germes.

Intéressons-nous désormais aux opérations (somme, produit, composition, inverse) de fonctions analytiques.

Théorème 94.— *Soient* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *deux fonctions analytiques sur* Ω. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. *La fonction* $\lambda f + g$ *est analytique sur* Ω.
2. *La fonction* $f \times g$ *est analytique sur* Ω.

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ telles que

$$\forall z \in B(z_0, R_1)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\forall z \in B(z_0, R_2)\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Soit $0 < \rho \leq \min(R_1, R_2)$. En utilisant le théorème 73, on obtient :

$$\forall z \in B(z_0, \rho)\ (\lambda f + g)(z) = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

$$\forall z \in B(z_0, \rho)\ f \times g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

où c_n est le coefficient devant le terme de valuation n dans le produit au sens de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Ces égalités terminent la démonstration.

□

Théorème 95.— *Soient* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ *deux fonctions analytiques. Supposons que* $f(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$. *Alors la fonction* $g \circ f$ *est analytique sur* Ω. *Plus précisément, soit* $\sum a_n z^n$ *(resp.* $\sum b_n z^n$*) une série entière de rayon* $R_1 > 0$ *(resp.* $R_2 > 0$*) et soit* $0 < \rho_1 < R_1$ *(resp.* $0 < \rho_2 < R_2$*) tel que*

$$\forall z \in B(z_0, \rho_1)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\left(\textit{resp.}\ \ \forall w \in B(f(z_0), \rho_2)\ \ g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (w - f(z_0))^n \right)$$

La fonction f étant continue en z_0, choisissons $0 < \rho_3 \le \rho_1$ tel que pour tout $z \in B(z_0, \rho_3)$, $f(z) \in B(f(z_0), \rho_2)$. Alors

$$\forall z \in B(z_0, \rho_3)\ g \circ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{où}\ \ c_n = \sum_{p=1}^{n} b_p a_n^{(p)}$$

les coefficients $a_n^{(p)}$ étant définis par $(f(z) - f(z_0))^p = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} a_n^{(p)} (z - z_0)^n$.

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R_1 > 0$ et soit $0 < \rho_1 \le R_1$ tels que

$$\forall z \in B(z_0, \rho_1)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Soit $\sum b_n z^n$ de rayon $R_2 > 0$ et soit $0 < \rho_2 < R_2$ tels que

$$\forall w \in B(f(z_0), \rho_2)\ g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (w - f(z_0))^n$$

La fonction f étant continue en z_0,

$$\exists \rho_3 \le \rho_1\ \forall z \in B(z_0, \rho_3)\ f(z) \in B(f(z_0), \rho_2)$$

Pour $z \in B(z_0, \rho_3)$, nous avons donc

$$g \circ f(z) = g\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n\right)^m \quad (\text{car } f(z) \in B(f(z_0), \rho_2))$$

La fin de la démonstration est alors identique à la fin de la démonstration du théorème 74.

□

Théorème 96.— *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si l'on considère la partie $\Omega' = \{z \in \Omega\ :\ f(z) \neq 0\}$ alors, Ω' est un ouvert et la fonction $\dfrac{1}{f} : \Omega' \to \mathbb{C}$ est analytique sur Ω'.*

Preuve : La fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue, et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}(\{0\})$ est fermé. Par ailleurs, Ω est ouvert, donc $\Omega' = \Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$ est ouvert.

Soit $z_0 \in \Omega'$. La fonction f étant analytique, il existe $\rho > 0$ et il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R \ge \rho$ tels que pour tout $z \in B(z_0, \rho)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Par hypothèse, $a_0 = f(z_0) \neq 0$ et l'on peut donc écrire

$$f(z) = a_0 \left(1 + \sum_{n \ge 1} \frac{a_n}{a_0} (z - z_0)^n\right) = a_0 (1 + g(z)),\ g(z_0) = 0$$

La fonction g étant continue en 0, il existe $\exists \rho_1 > 0$ tel que, pour tout $z \in B(z_0, \rho_1)$ on ait $|g(z)| < 1$. Considérons alors $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et posons

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \Omega_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1}{1+u} \end{array}$$

La fonction θ est analytique sur Ω_0 et pour tout $u \in B(0,1)$ on a $\theta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$. En utilisant le théorème 95, on a alors

$$\forall z \in B(z_0, \rho_1)\ \theta \circ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

or $\theta \circ g(z) = \dfrac{1}{1+g(z)} = \dfrac{a_0}{f(z)}$ et ainsi,

$$\forall z \in B(z_0, \rho_1)\ \frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{a_0} (z - z_0)^n$$

La fonction f est donc développable en série entière autour de z_0. Le choix de $z_0 \in \Omega'$ étant quelconque, ceci montre bien que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est analytique sur Ω'.

□

Exemple 97.— Soit f la fonction d'expression $f(z) = \dfrac{1}{z}$, fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C}^{\times}$. Intéressons-nous, pour $z_0 \in \Omega$, au développement en série entière de f au voisinage de z_0. On a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}$$

et donc, si $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{z_0^n} (z - z_0)^n$. Or, $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| < 1 \iff |z - z_0| < |z_0| \iff z \in B(z_0, |z_0|)$ et le développement ainsi trouvé est donc valable sur $B(z_0, |z_0|)$.

Notations.— L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}[z]$. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}(z)$. Ainsi, $\mathbb{C}(z) = \left\{ \dfrac{P}{Q}\ :\ P \in \mathbb{C}[z], Q \in \mathbb{C}[z] \right\}$.

Théorème 98.— *Pour tout $R \in \mathbb{C}(z)$, la fonction $z \mapsto R(z)$ est analytique sur son domaine de définition.*

Preuve : Un polynôme est une série entière de rayon $R = +\infty$. Un polynôme est donc analytique sur $\mathbb{C}$ (cf théorème 93). D'après le théorème précédent, une fraction rationnelle est analytique dès que son dénominateur ne s'annule pas, i.e. sur son domaine de définition.

□

3.2 Prolongement analytique

3.2.1 Rappels sur la connexité.

Définition 99.— *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{D}$ est :*

• *"convexe" si pour tous $a, b \in \mathcal{D}$, le segment $[a,b] = \{ta + (1-t)a/\ t \in [0;1]\}$ d'extrémités a et b est inclus dans $\mathcal{D}$,*

• *un ensemble "étoilé" par rapport à $z_0 \in \mathcal{D}$ si $\forall z \in \mathcal{D}\ [z_0, z] \subseteq \mathcal{D}$,*

• *"faiblement convexe" si pour tous $a, b \in \mathcal{D}$ il existe une suite finie de points $z_1, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{D}$ tels que*

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq \mathcal{D}$$

i.e. a et b sont les extrémités d'une ligne brisée de $\mathcal{D}$,

• *"connexe par arcs" si pour tous $a, b \in \mathcal{D}$, il existe une application continue $\alpha : [0;1] \to \mathcal{D}$ telle que $\alpha(0) = a$ et $\alpha(1) = b$ (une telle application α s'appelle un chemin de D d'origine a et d'extrémité b),*

• *"connexe" si pour tout ouvert $U_1 \subseteq \mathbb{C}$ et pour tout ouvert $U_2 \subseteq \mathbb{C}$,*

$$[(D \subseteq U_1 \cup U_2) \ \wedge \ (U_1 \cap U_2 = \emptyset)] \implies [(D \subseteq U_1) \ \vee \ (D \subseteq U_2)]$$

Remarque 100.— $\mathcal{D}$ est connexe si, et seulement si pour tout couple (F_1, F_2) de fermés de $\mathbb{C}$,

$$[(D \subseteq F_1 \cup F_2) \ \wedge \ (F_1 \cap F_2 = \emptyset)] \implies [(D \subseteq F_1) \ \vee \ (D \subseteq F_2)]$$

Définition 101.— *Soit X un espace topologique. Soit $A \subseteq X$. Le sous-ensemble A est dit "connexe" si pour tout couple d'ouverts U_1, U_2 de X vérifiant $A \subseteq U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, on a $A \subseteq U_1$ ou $A \subseteq U_2$.*

Proposition 102.— *Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $A \subseteq X$ est connexe, alors $f(A) \subseteq Y$ est connexe. Autrement dit, l'image continue d'un connexe est connexe.*

Preuve : Supposons que A est connexe et notons $B = f(A)$. Soient V_1, V_2 deux ouverts de Y tels que $B \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. L'application f étant continue, $U_1 = f^{-1}(V_1)$ et $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sont deux ouverts de X. Remarquons également que $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = U_1 \cup U_2$ (exercice). Ces considérations impliquent $A \subseteq U_1 \cup U_2$. De plus l'égalité $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ donne l'égalité $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. L'ensemble A étant connexe, on a donc par exemple $A \subseteq U_1$. Ainsi $B = f(A) \subseteq f(U_1) \subseteq V_1$ et par conséquent, B est connexe.

□

Théorème 103.— *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Alors*

$\mathcal{D}$ convexe $\implies$ $\mathcal{D}$ étoilé $\implies$ $\mathcal{D}$ faiblement convexe $\implies$ $\mathcal{D}$ connexe par arc $\implies$ $\mathcal{D}$ connexe

et aucune des réciproques n'est vraie en général.

Preuve : connexe par arcs $\implies$ connexe. Démontrons la contraposée de cette implication. Supposons donc que $\mathcal{D}$ n'est pas connexe. Il existe alors deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{C}$ vérifiant

$\mathcal{D} \subseteq F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $\mathcal{D} \cap F_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{D} \cap F_2 \neq \emptyset$. Soit $z_1 \in \mathcal{D} \cap F_1$ et soit $z_2 \in \mathcal{D} \cap F_2$. Supposons désormais par l'absurde qu'il existe un chemin continu $\alpha : [0,1] \to \mathcal{D}$ tel que $\alpha(0) = z_1$ et $\alpha(1) = z_2$. Notons $A = \alpha([0,1])$. Comme $z_1, z_2 \in A$ et comme $A \subseteq \mathcal{D}$, on a $A \subseteq F_1 \cup F_2$, $A \cap F_1 \neq \emptyset$, $A \cap F_2 \neq \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Ceci montre que A n'est pas connexe. Or $[0,1]$ est connexe et α est continue, donc en vertu de la proposition 102, A est connexe, ce qui contredit la déduction précédente. Ainsi, il n'existe aucun chemin continu contenu dans $\mathcal{D}$ et reliant z_1 à z_2, et $\mathcal{D}$ n'est pas connexe par arcs.

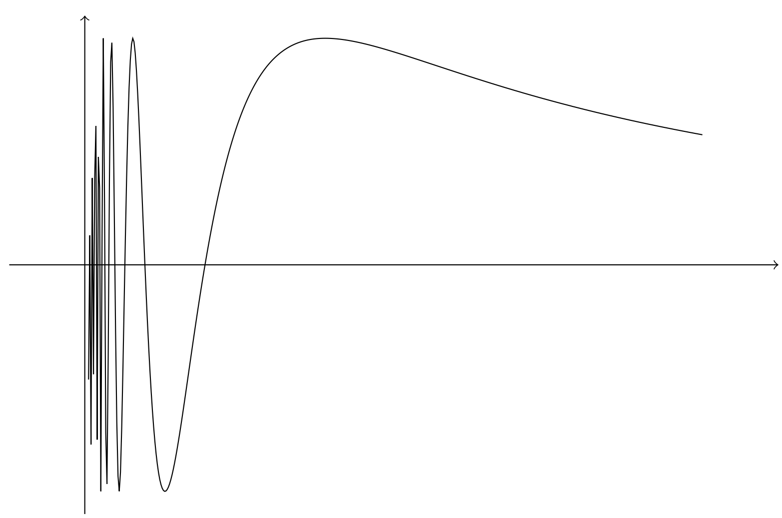
faiblement convexe $\implies$ connexe par arcs. Une ligne brisée peut être vue comme une application continue $\alpha : [0,1] \to \mathcal{D}$.

étoilé $\implies$ faiblement connexe. Supposons que $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à z_0. Soient $z, z' \in \mathcal{D}$. La ligne brisée constituée du segment $[z, z_0]$ suivi du segment $[z_0, z']$ est une ligne brisée inclue dans $\mathcal{D}$ reliant z à z'.

convexe $\implies$ étoilé. Exercice.

□

Exemple 104.— Exemple de connexe non connexe par arc : $\left\{x + i\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ : \ x \in \mathbb{R}_+^\times\right\} \cup [-i;i]$.



Lemme 105.— *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Les assertions suivantes*

i) $\mathcal{D}$ est convexe,

ii) $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à tous ses points,

sont équivalentes.

Preuve : i) $\implies$ ii). Clair.

ii) $\implies$ i). Soient $z, z' \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à z, on a $[z, z'] \subseteq \mathcal{D}$, d'où le fait que $\mathcal{D}$ est convexe.

□

Théorème 106.— *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Les assertions suivantes* *i) U est faiblement convexe,*

ii) U est connexe par arc,

iii) U est connexe,

sont équivalentes.

Preuve : i) $\implies$ ii) $\implies$ iii). Voir le théorème 103

iii) $\implies$ i). Soit $a \in U$. Il s'agit de montrer que pour tout $z \in U$, il existe une ligne brisée inclue dans U reliant z à a. Notons donc

$$\begin{aligned} U_0 &= \{z \in U \ : \text{ il existe une ligne brisée (dans } U) \text{ reliant } z \text{ à } a\} \\ U_1 &= \{z \in U \ : \text{ on ne peut pas relier } z \text{ à } a \text{ à l'aide d'une ligne brisée (dans } U)\} \end{aligned}$$

On vérifie alors aisément

$$U_0 \cap U_1 = \emptyset \text{ et } U_0 \cup U_1 = U$$

Montrons désormais que U_0 est ouvert. Soit $z_0 \in U_0$. Notons $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]$ une ligne brisée reliant $a = a_0$ à $z_0 = a_n$. Comme U est ouvert, fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U$. Remarquons que la boule $B(z_0, \varepsilon)$ est convexe. En effet, soient $b, c \in B(z_0, \varepsilon)$ et soit $\lambda \in [0;1]$. Alors la distance de z_0 à $\lambda b + (1-\lambda)c$ est

$$\begin{aligned} |\lambda b + (1-\lambda)c - z_0| &= |\lambda(b - z_0) + (1-\lambda)(c - z_0)| \\ &\leq \lambda|b - z_0| + (1-\lambda)|c - z_0| && (\text{car } \lambda \leq 0 \text{ et } (1-\lambda) \geq 0) \\ &\leq (\lambda + 1 - \lambda)\max\{|b - z_0|, |c - z_0|\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Cette inégalité montre bien que $\lambda b + (1-\lambda)c \in B(z_0, \varepsilon)$, i.e. que $B(z_0, \varepsilon)$ est convexe. Montrons désormais que $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U_0$. Soit $z \in B(z_0, \varepsilon) \subseteq U_0$. La boule $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U_0$ étant convexe, on a $[z_0, z] \subseteq B(z_0, \varepsilon) \subseteq U$, de sorte que la ligne brisée $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n] \cup [z_0, z]$ est une ligne brisée (dans U) reliant a à z, ce qui montre que $z \in U_0$ et par conséquent que U_0 est ouvert.

Montrons que U_1 est ouvert. Soit $z_0 \in U_1$. Comme U est ouvert, fixons $\varepsilon > 0$ pour lequel $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U$. Comme précédemment, on a $[z, z_0] \subseteq U$. Raisonnons par l'absurde : s'il existait une ligne brisée (dans U) reliant a à z, alors en ajoutant le segment $[z, z_0]$ à cette ligne brisée on obtiendrait une ligne brisée reliant a à z_0, ce qui contredit $z_0 \in U_1$. Ainsi, $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U_1$ et U_1 est ouvert.

Comme U est connexe, on en déduit que l'on a soit $U \subseteq U_0$, soit $U \subseteq U_1$. Or $a \in U_0$, donc $U_0 \neq \emptyset$. Ainsi, $U_1 = \emptyset$ et $U \subseteq U_0$, ce qui montre que U est faiblement connexe.

□

Définition 107.— *On appelle "domaine" de* $\mathbb{C}$ *tout partie non vide, ouverte et connexe de* $\mathbb{C}$.

Exemple 108.— $\mathbb{C}$ est un domaine, une boude ouverte est un domaine.

3.2.2 Principe du prolongement analytique

Théorème 109.— [Principe du prolongement analytique] *Soient* $\mathcal{D}$ *un domaine,* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *et* $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *deux fonctions analytiques. Les assertions suivantes*

i) $f = g$,

ii) $\exists U \subseteq \mathcal{D}$ *ouvert,* $U \neq \emptyset$ $f|_U = g|_U$*,*

iii) $\exists K \subseteq \mathcal{D}$ *possédant un point d'accumulation dans* $\mathcal{D}$ $f|_K = g|_K$*,*

iv) il existe une suite injective $(z_q)_{q\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{D}$ *convergeant dans* $\mathcal{D}$ *telle que pour tout* $q \in \mathbb{N}$ *on a* $f(z_q) = g(z_q)$*,*

sont équivalentes.

Preuve : i) $\implies$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ iv). Clair.

iv) $\implies$ i). Choisissons une suite injective $(z_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vérifiant (iv). Notons $a = \lim\limits_{q\to+\infty} z_q \in \mathcal{D}$. Les fonctions f et g sont analytiques sur $\mathcal{D}$:

$$\exists \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_1 > 0\ \exists \sum c_n z^n \text{ de rayon } R_2 > 0\ \exists 0 < \rho \leq \min\{R_1, R_2\}$$
$$B(a,\rho) \subseteq \mathcal{D} \text{ et } \forall z \in B(a,\rho)\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n \text{ et } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Posons $h = f - g$. Alors
$$\forall z \in B(a,\rho)\ h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - c_n)(z-a)^n$$

Comme $h(z_q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, le principe des zéros isolés (plus précisément le corollaire 84) implique que $h|_{B(a,\rho)} = 0$. Ainsi, $f|_{B(a,\rho)} = g|_{B(a,\rho)}$.

Montrons désormais que f et g coïncident sur $\mathcal{D}$. Soit $b \in \mathcal{D}$. Soit $\varphi : [0;1] \to \mathcal{D}$ une ligne brisée reliant a à b : $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Soit

$$E = \left\{ t \in [0,1]\ :\ f|_{[0,t]} = g|_{[0,t]} \right\}$$

$E \neq \emptyset$ car $0 \in E$. De plus, E est un intervalle : en effet, si $t_1, t_2 \in E$, $t_1 < t_2$ et si $s \in \,]t_1, t_2[$, alors $f|_{[0,t_2]} = g|_{[0,t_2]}$ implique $f|_{[0,s]} = g|_{[0,s]}$, autrement dit $s \in E$. Notons alors $t_0 = \sup E$. Comme f et g sont continues, $f(t_0) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} g(t) = g(t_0)$, d'où l'on conclut $t_0 \in E$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $t_0 < 1$. Notons alors $\delta = \varphi(t_0) \in \mathcal{D}$.

$$\exists \sum b'_n z^n \text{ de rayon } R'_1 > 0\ \exists \sum c'_n z^n \text{ de rayon } R'_2 > 0\ \exists 0 < \rho' \leq \min\{R'_1, R'_2\}$$
$$B(\delta,\rho') \subseteq \mathcal{D} \text{ et } \forall z \in B(\delta,\rho')\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b'_n (z-\delta)^n \text{ et } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n (z-\delta)^n$$

Or φ est continue en t_0 :
$$\exists \eta > 0\ \varphi(]t_0 - \eta, t_0 + \eta[) \subseteq B(\delta, \rho')$$

Notons alors que $\varphi(]t_0-\eta, t_0])$ possède un point d'accumulation et que $f|_{\varphi(]t_0-\eta,t_0])} = g|_{\varphi(]t_0-\eta,t_0])}$. Un raisonnement identique à celui mené précédemment montre que $f|_{B(\delta,\rho')} = g|_{B(\delta,\rho')}$. Les fonctions f et g sont donc identiques sur l'intervalle $]t_0, t_0+\eta[$, ce qui contredit le fait que $t_0 = \sup E$. Ainsi $t_0 = 1$ et $f(b) = g(b)$.

□

3.3 Principe du maximum

Définition 110.— *Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in A$. On dit que f possède un "maximum local" (resp. un "minimum local") en a si*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall z \in A \cap B(a, \varepsilon) \ |f(z)| \leq |f(a)|$$
$$(\textit{resp. } \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall z \in A \cap B(a, \varepsilon) \ |f(z)| \geq |f(a)|)$$

Théorème 111.— *Soit $\mathcal{D}$ un domaine. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si f possède un maximum local sur $\mathcal{D}$, alors f est constante.*

Preuve : Soit $\lambda \in \mathcal{D}$ le point en lequel f possède un maximum local. $\mathcal{D}$ étant un domaine, le principe du prolongement analytique implique qu'il suffit de montrer que f est constante sur un voisinage de λ. La fonction f étant analytique, il existe une série entière, que l'on notera $\sum c_n z^n$ de rayon $R > 0$, et il existe $0 < r \leq R$ tels que $B(\lambda, r) \subseteq \mathcal{D}$ et

$$\forall z \in B(\lambda, r) \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - \lambda)^n$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas constante. Notons $k_0 = \inf\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ : \ c_k \neq 0\}$. Remarquons dans un premier temps $c_0 \neq 0$. En effet, si $c_0 = 0$, alors $f(\lambda) = 0$ et le fait que f possède un maximum local en λ implique que f est nulle dans un voisinage de 0, ce qui contredit le fait que f n'est pas localement constante. Écrivons alors

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_{k_0}(z-\lambda)^{k_0} + c_{k_0+1}(z-\lambda)^{k_0+1} + \dots \\ &= c_0 \Big(1 + \mu (z-\lambda)^{k_0} \left(1 + (z-\lambda) g_1(z)\right)\Big) \\ \text{où } \ \mu = \frac{c_{k_0}}{c_0} \ &\text{ et } \ g_1(z) = \frac{c_{k_0+1}}{c_{k_0}} + \frac{c_{k_0+2}}{c_{k_0}}(z-\lambda) + \dots \end{aligned}$$

La fonction g_1 est analytique sur $B(\lambda, r)$ (d'après le théorème 93). Cette dernière fonction est donc continue et par conséquent bornée sur tout compact K. Choisissons $K = \overline{B\left(\lambda, \frac{r}{2}\right)}$ et notons M un majorant de g sur K :

$$\forall z \in \overline{B\left(\lambda, \frac{r}{2}\right)} \ |g_1(z)| \leq M$$

Soit $r' \leq \dfrac{r}{2}$ vérifiant $r'M \leq \frac{1}{2}$. Écrivons $\mu = |\mu| e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $0 < \rho < r'$, on s'intéresse au complexe $z = \lambda + \rho e^{-i\frac{\alpha}{k_0}} \in B(\lambda, r')$. On a

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |c_0| \left|1 + \mu(z-\lambda)^{k_0} \left(1 + (z-\lambda) g_1(z)\right)\right| \\ &\geq |c_0| \Big(\left|1 + \mu (z-\lambda)^{k_0}\right| - \left|\mu (z-\lambda)^{k_0+1} g_1(z)\right| \Big) && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= |c_0| \Big(1 + |\mu| \rho^{k_0} - |\mu| \rho^{k_0} \left|\rho g_1(z)\right|\Big) \\ &\geq |c_0| \left(1 + |\mu|\rho^{k_0} - \frac{|\mu|\rho^{k_0}}{2}\right) && \text{(d'après le choix de } r'\text{)} \\ &= |c_0| \left(1 + \frac{|\mu|\rho^{k_0}}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette inégalité implique donc $|f(z)| > |f(\lambda)|$, ce qui contredit le fait que λ soit un maximum relatif.

$\square$

Théorème 112.— [Théorème de d'Alembert-Gauss, dit "théorème fondamental de l'algèbre"] *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit, tout polynôme complexe non constant admet (au moins) une racine.*

Preuve : Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, où $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) \neq 0$. Le théorème 93 implique que P est analytique sur $\mathbb{C}$. Le théorème 96 implique alors que $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est également analytique sur $\mathbb{C}$. L'inégalité triangulaire appliquée n fois de suite donne l'inégalité

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - (|a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\
&= |a_n z^n| \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} - \cdots - \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^n}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, autrement dit que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$. De plus, $A = f(0) = \dfrac{1}{a_0} \neq 0$. Ainsi,

$$\exists R > 0 \ \forall |z| > R \ |f(z)| \leq A$$

La partie $K = \overline{B(0,R)}$ est compacte et f est continue. Ainsi, f est bornée sur K et elle atteint son maximum en un point que nous noterons λ.

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \overline{B(0,R)} \ |f(z)| \leq |f(\lambda)| \\
&\forall z \notin \overline{B(0,R)} \ |z| > R \implies |f(z)| \leq A = |f(0)| \leq |f(\lambda)|
\end{aligned}$$

Ainsi, λ est un maximum absolu de f. Le principe du maximum implique alors que f est constante, ce qui contredit le fait que P ne soit pas constant.

$\square$

3.4 Fonctions exponentielle et trigonométriques.

3.4.1 Définition de l'exponentielle, premières propriétés.

La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$ (d'Alembert).

Définition 113.— *On appelle fonction exponentielle, notée* exp *ou* $z \mapsto e^z$, *la fonction définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

La fonction exponentielle est une fonction entière.

Lemme 114.— *La fonction* exp *est holomorphe et, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $\exp'(z) = \exp(z)$.

Preuve : En tant que fonction entière, la fonction exp est analytique sur $\mathbb{C}$ (théorèmes 93 et 92) , d'où l'on déduit l'holomorphie de la fonction exp. De plus, le théorème 81 implique

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{1}{(n+1)!}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

□

Théorème 115.— *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.*

Preuve : On a $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $e^{z'} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}$. On note $\sum c_n$ le produit au sens de Cauchy des séries $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{z'^n}{z!}$, on a donc $c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$. Les deux séries $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{z'^n}{z!}$ étant absolument convergentes, le théorème 22 assure que la série $\sum c_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{z!}$ et l'on a donc

$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$$

Par ailleurs,

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z^k z'^{n-k}\right)$$

d'où l'égalité annoncée.

□

Corollaire 116.— *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.*

Preuve : On a $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$.

□

3.4.2 Etude de l'exponentielle réelle.

On considère la restriction de la fonction exponentielle à la droite numérique $\mathbb{R}$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Proposition 117.— *On a les propriétés suivantes :*

a) f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$.

b) f est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)} = f$.

c) f définit une bijection strictement croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$.

Preuve : a) Pour $x \geq 0$ on a $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1$. Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \in]0;1]$. Ainsi, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$.

b) La fonction exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$, sa restriction à $\mathbb{R}$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ également.

b) $f'(x) = e^x > 0$ d'après (**??**). La fonction f est donc strictement croissante (et continue). Cette fonction opère donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} e^x, \lim_{x\to+\infty} e^x\right[$. Pour $x \geq 0$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 + x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$.

□

3.4.3 Propriétés.

Proposition 118.— *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

b) $|e^z| = e^{\mathscr{R}ez}$.

c) $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Preuve : a) $\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$.

b) $|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathscr{R}ez} = \left(e^{\mathscr{R}ez}\right)^2$. Donc $|e^z| = e^{\mathscr{R}ez}$.

c) $|e^z| = 1 \iff e^{\mathscr{R}ez} = 1 \iff \mathscr{R}ez = 0$ (car $x \mapsto e^x$ réalise une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$)

□

Théorème 119.— $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ *est un morphisme de groupes.*

Preuve : Il s'agit de la traduction de théorème 115.

□

3.4.4 Etude du noyau de l'exponentielle.

Considérons le *groupe unitaire* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$ et intéressons-nous au noyau de exp :

$$\ker(\exp) = \{z \in \mathbb{C} / \ e^z = 1\}$$

Si $z \in \ker(\exp)$ alors la proposition 118 implique que $z \in i\mathbb{R}$ ce qui nous amène à considérer l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$$

Cette application φ est un morphisme de groupe (toujours d'après le théorème 119). De plus, $\ker(\exp) = i\ker(\varphi)$. Nous allons donc nous intéresser à $\ker\varphi$. Rappelons la

Proposition 120.— *Soit Γ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Alors soit Γ est dense (i.e. $\overline{\Gamma} = \mathbb{R}$), soit il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\Gamma = \alpha\mathbb{Z}$.*

Preuve : Intéressons-nous à la partie de $\mathbb{R}$ suivante : $A =]0, +\infty[\cap \Gamma$. Soit $\alpha = \inf A \in \mathbb{R}_+$. Deux cas peuvent se présenter : $\alpha > 0$ et $\alpha = 0$.
Cas 1 : $\alpha > 0$. Montrons que dans ce cas $\Gamma = \alpha\mathbb{Z}$. Montrons dans un premier temps $\alpha \in \Gamma$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha \notin \Gamma$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, $]\alpha, \alpha+\varepsilon[\cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit $\gamma_1 \in]\alpha, 2\alpha[\cap \Gamma$ et choisissons $\gamma_2 \in]\alpha, \gamma_1[\cap \Gamma$. Dans ce cas $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < \alpha$ et $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Gamma$ contredisent la définition de α. Ainsi, $\alpha \in \Gamma$.
Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$. Quitte à remplacer γ par $-\gamma$, on peut supposer $\gamma > 0$. Notons $n = \left\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \right\rfloor$. L'inégalité $n \leq \frac{\gamma}{\alpha} < n+1$ implique $n\alpha \leq \gamma < (n+1)\alpha$. Nous obtenons alors les inégalité $0 \leq \gamma - n\alpha < \alpha$. Or $\gamma - n\alpha \in \Gamma$. La définition de α implique donc $\gamma - n\alpha = 0$, i.e. $\gamma \in \alpha\mathbb{Z}$.
Cas 2 : $\alpha = 0$. Montrons alors que Γ est dense. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer $x > 0$ (le cas $x = 0$ étant résolu par le fait $0 \in \Gamma$). Soit $\varepsilon > 0$ et montrons que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit $\gamma \in]0, \varepsilon[\cap \Gamma$. Notons $n = \left\lfloor \frac{x}{\gamma} \right\rfloor$. On a

$$\begin{cases} n \leq \dfrac{x}{\gamma} < n+1 \\ 0 < \gamma < \varepsilon \end{cases} \implies n\gamma \leq x < (n+1)\gamma < n\gamma + \varepsilon \leq x + \varepsilon$$

ce qui montre $\gamma \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \Gamma$ et termine la démonstration.

□

Ainsi, en tant que sous-groupe de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\ker\varphi$ est, soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (où $\alpha \geq 0$).

Le cas où $\ker\varphi$ est dense est exclu. En effet, l'application φ est continue et elle coïncide avec l'application $x \mapsto 1$ sur $\ker\varphi$. Si $\ker\varphi$ était dense, ces deux applications seraient égales sur $\mathbb{R}$ tout entier et l'on aurait donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \sum_{n \geq 0} \frac{(i)^n}{x!} x^n = 1$$

ce qui nierait l'unicité du d.e.s.e de φ.

Il existe donc un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\ker\varphi = \alpha\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $\alpha \neq 0$ (i.e. φ non injective) en considérant la fonction "cosinus" $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\cos(t) = \mathscr{Re}(\varphi(t))$. L'égalité $|\varphi(t)| = 1$ implique que $\cos(t) \in [-1;1]$ et l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos t = \mathscr{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\right) = \mathscr{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

(en particulier cos est donc $\mathcal{C}^\infty$). Pour $x = 2$, on a

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

qui est visiblement la somme d'une série alternée. En notant S_n la somme partielle d'indice n de cette série, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} \leq \cos(2) \leq S_{2n}$$

et, en particulier $\cos(2) \leq S_4 = -\frac{1}{3}$. On voit donc que $\cos(2) < 0$, mais comme $\cos(0) = 1$ et que cos est une fonction continue, on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un réel $\omega \in]0,2[$ tel que $\cos(\omega) = 0$. Puisque $|\varphi(\omega)| = 1$ et que $\mathscr{R}e(\varphi(\omega)) = 0$, on a nécessairement $\varphi(\omega) = \pm i$ et donc $\varphi(4\omega) = \varphi(\omega)^4 = (\pm i)^4 = 1$. L'élément 4ω est donc un réel non nul élément de $\ker\varphi$, ceci prouve que $\alpha \neq 0$.

Définition 121.— *On appelle "pi" l'unique réel positif, noté π, tel que 2π soit un générateur du noyau de l'exponentielle (i.e. $\alpha = 2\pi$ avec les notations précédentes).*

Le réel π est donc caractérisé par $\pi > 0$ et $\ker(\exp) = 2\pi\mathbb{Z}$. Il mesure le défaut d'injectivité de la fonction exponentielle :

Proposition 122.— *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a*

$$e^z = e^{z'} \iff (\exists k \in \mathbb{Z}\ z' = z + 2ik\pi)$$

.

Remarquons que $e^{i\pi} = -1$ puisque $\left(e^{i\pi}\right)^2 = e^{2i\pi} = 1$ et que $\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

3.4.5 Théorème du relèvement.

Théorème 123.— [dit du relèvement] *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{C}^\times$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = |f(a)|e^{i\theta_0}$. Il existe une unique application continue $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\theta(a) = \theta_0$ et*

$$\forall x \in [a,b]\ f(x) = |f(x)|e^{i\theta(x)}$$

Cette application θ est en fait $\mathcal{C}^1$.

Preuve : Définissons l'application $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Écrivons $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où $f_1(x) = \mathscr{R}e(f(x))$ et $f_2(x) = \mathscr{I}m(f(x))$. On a $|f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, les applications f_1 et f_2 sont également de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Or $f_1(x)^2 + f_2(x)^2 > 0$ (car $f(x) \neq 0$), donc $x \mapsto \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. L'application g est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Remarquons que

$$\forall x \in [a,b]\ |g(x)| = \sqrt{g_1(x)^2 + g_2(x)^2} = 1$$

Existence : posons $\theta(x) = \theta_0 - i\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt$. Écrivons $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, où $g_1(t) = \mathscr{R}eg(t)$ et

$g_2(t) = \mathscr{I}m g(t)$. On a $g'(t) = g_1'(t) + ig_2'(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{(g_1'(t)+ig_2'(t))(g_1(t)-ig_2(t))}{g_1(t)^2+g_2(t)^2}\\ &= g_1(t)g_1'(t)+g_2(t)g_2'(t)+i\left(g_1(t)g_2'(t)-g_1'(t)g_2(t)\right) \qquad \left(\text{car } g_1(t)^2+g_2(t)^2=1\right)\\ &= \frac{1}{2}\Big(g_1(t)^2+g_2(t)^2\Big)'+i(g_1(t)g_2'(t)-g_1'(t)g_2(t))\\ &= i\left(g_1(t)g_2'(t)-g_1'(t)g_2(t)\right)\end{aligned}$$

Ceci montre bien $\dfrac{g'(t)}{g(t)} \in i\mathbb{R}$ pour tout $t \in [a,b]$. Ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt \in i\mathbb{R}$, ce qui implique $\theta(x) \in \mathbb{R}$. L'application $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant $\theta(a) = \theta_0$ est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et vérifie $\theta'(x) = -i\dfrac{g'(x)}{g(x)}$. Par conséquent, l'application $x \mapsto e^{i\theta(x)}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\begin{aligned}\left(e^{i\theta(x)}\right)' &= i\theta'(x)e^{i\theta(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}e^{i\theta(x)}\\ \left(\frac{e^{i\theta(x)}}{g(x)}\right)' &= \frac{\left(e^{i\theta(x)}\right)'g(x)-e^{i\theta(x)}g'(x)}{g(x)^2}\\ &= \frac{g'(x)e^{i\theta(x)}-g'(x)e^{i\theta(x)}}{g(x)^2} = 0\end{aligned}$$

Donc

$$\exists c \in \mathbb{C}\ \forall x \in [a,b]\ e^{i\theta(x)} = cg(x)$$

Le choix $x = a$ donne

$$e^{i\theta_0} = e^{i\theta(a)} = cg(a) = c\frac{f(a)}{|f(a)|} = ce^{i\theta_0}$$

d'où l'on conclut $c = 1$. Ainsi,

$$\left(\forall x \in [a,b]\ \frac{f(x)}{|f(x)|} = g(x) = e^{i\theta(x)}\right) \iff \left(\forall x \in [a,b]\ f(x) = |f(x)|e^{i\theta(x)}\right)$$

ce qui montre l'existence de θ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$).

Unicité : soient $\theta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\theta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\theta_1(a) = \theta_0 = \theta_2(a)$ et telles que

$$\forall x \in [a,b]\ f(x) = |f(x)|e^{i\theta_1(x)} = |f(x)|e^{i\theta_2(x)}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [a,b]\ e^{i(\theta_1(x)-\theta_2(x))} = 1$$

Les propositions 118 et 122 impliquent

$$\forall x \in [a,b]\ \exists k(x) \in \mathbb{Z}\ \theta_1(x)-\theta_2(x) = 2k(x)\pi$$

L'application $k : [a,b] \to \mathbb{Z}$ est continue. Le segment $[a,b]$ étant connexe, l'image $k([a,b])$ est connexe dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, $k([a,b])$ est un singleton :

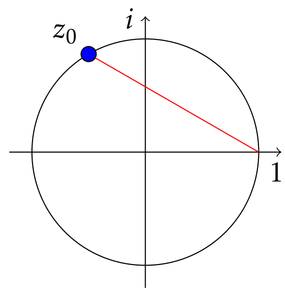
$$\exists \ell \in \mathbb{Z}\ \forall x \in [a,b]\ k(x) = \ell$$

Ceci montre $\theta_1(x) = \theta_2(x) + \ell$. En évaluant en $x = a$, on obtient $\ell = 0$, d'où l'unicité.

□

Corollaire 124.— *Pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = e^{i\theta}$.*

Preuve : Supposons dans un premier temps $z_0 \neq -1$.



Introduisons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tz_0 + (1-t) \end{array}$$

En posant $\theta_0 = 0$, on a bien $f(0) = |f(0)|e^{i\theta_0}$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \neq 0$. Le théorème de relèvement donne l'existence d'une application continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0,1]\ f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$$

Ainsi, $z_0 = f(1) = |f(1)|e^{i\theta(1)} = e^{i\theta(1)}$, ce qui termine le cas $z_0 \neq -1$.
Si $z_0 = -1$, la remarque suivant la proposition 122 donne l'égalité $-1 = e^{i\pi}$.

□

Lors de l'étude du noyau de exp, nous avons introduit la fonction cosinus. Introduisons également la fonction sinus.

Définition 125.— *Les fonctions* cos *et* sin *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x = \mathscr{R}e(e^{ix}) \ \ et \ \ \sin x = \mathscr{I}m(e^{ix})$$

Corollaire 126.— *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si ces deux nombres réels vérifient $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.*

Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Soit $z_0 = a + ib$. Comme $|z_0| = 1$, le corollaire précédent assure l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, d'où le corollaire.

□

Corollaire 127.— *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ *est surjective.*

Preuve : Soit $w \in \mathbb{C}^\times$. Écrivons $w = |w| w_0$, où $w_0 \in \mathbb{U}$. Le corollaire 124 implique l'existence de $y \in \mathbb{R}$ tel que $w_0 = e^{iy}$. Comme $|w| \in \mathbb{R}_+^\times$, la proposition 117 implique l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $|w| = e^x$. Finalement,

$$w = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

où $z = x + iy$.

□

3.4.6 Fonctions trigonométriques associées.

Définition 128.— *Définissons les fonction* cos, sin, ch, sh *sur* $\mathbb{C}$ *en posant, pour* $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\mathrm{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

La définition de cosinus donnée ici étend bien évidemment la définition précédant la définition 121.

Proposition 129.— cos, sin, ch, sh *sont des fonction entières (en tant que somme de fonctions entières) :*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\mathrm{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proposition 130.—

$$\forall z \in \mathbb{C}\ e^z = \mathrm{ch} z + \mathrm{sh} z;\ e^{iz} = \cos z + i \sin z;\ \cos z = \mathrm{ch}(iz);\ i \sin z = \mathrm{sh}(iz);$$
$$\cos' z = -\sin z; \quad \sin' z = \cos z;\ \mathrm{ch}' z = \mathrm{sh} z;\ \mathrm{sh}' z = \mathrm{ch} z.$$

Recherchons désormais les zéros complexes de cos. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{iz} = e^{i(\pi - z)} \iff e^{i(2z-\pi)} = 1 \\ &\iff i(2z - \pi) \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z} \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{aligned}$$

Définition 131.— *Soit* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Définissons la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\sin z}{\cos z} \end{array}$$

Remarquons que la fonction tangente est analytique sur Ω (en tant que quotient de fonctions analytiques). Revenons à quelques identités vérifiées par cos et sin. Notons que $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = -1$, donc $e^{i\frac{\pi}{2}} \in \{\pm i\}$. Une étude plus poussée de la fonction $\sin|_{\mathbb{R}}$ (plus précisément le fait que $\sin' x > 0$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) montre que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, i.e. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Remarquons également $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{iz}e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-iz}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2} \\ &= \frac{i^2\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i} = -\sin z\end{aligned}$$

De plus, si $a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right) \\ \sin a \sin b &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} = -\frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, nous retrouvons la formule valable pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Étude des fonction cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \in \mathbb{R}$ et $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \in \mathbb{R}$. De plus, par définition des fonctions cosinus et sinus,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \mathscr{R}e\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \mathscr{I}m\left(e^{ix}\right)$.
Les fonctions cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. De plus, les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques (puisque $z \mapsto e^{iz}$ est 2π-périodiques).
Étudions donc ces fonctions sur $[-\pi, \pi]$. Rappelons que $\frac{\pi}{2}$ est le premier zéro positif de cos. La fonction sin est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, l'égalite $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ implique que la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La fonction cos possède donc un unique zéro sur l'intervalle $[0, \pi]$.
La définition de cos montre que cos est une fonction paire, tout comme la définition de sin montre que cette fonction est impaire. La fonction cos s'annule donc une seule fois sur l'intervalle $[-\pi, 0]$, et ce au point $-\frac{\pi}{2}$: $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. De plus, $\cos(\pi) = -1$ (car $e^{i\pi} = -1$) et $\cos(-\pi) = -1$ (par parité). Notons également $\sin(\pi) = 0 = \sin(-\pi)$ (car $e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$ par $2i\pi$-parité). De plus, $1 = \cos 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donne l'égalité $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. La fonction sin étant impaire, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Nous en déduisons le tableau de variations

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3.4.7 Argument, groupe des angles.

Théorème 132.— *Soit $z \in \mathbb{C}^\times$. Alors il existe un unique $\rho > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.*

Preuve :

Existence : la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ étant surjective, il existe $w = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^w$. Dans ce cas, $z = e^a e^{ib}$, donc $\rho = e^a > 0$ et $\theta = b$ conviennent.

Unicité : supposons que l'on ait une deuxième écriture $z = \rho' e^{i\theta'}$. On a $|z| = |\rho||e^{i\theta}| = \rho$ et $|z| = |\rho'||e^{i\theta'}| = \rho'$, d'où $\rho = \rho'$.

□

Définition 133.— *Soit On appelle "argument" d'un nombre complexe $z \neq 0$ l'ensemble de réels*

$$\mathrm{Arg} z = \left\{\theta \in \mathbb{R} \ : \ z = |z| e^{i\theta}\right\}$$

D'après le théorème précédent, $\mathrm{Arg} z \neq \emptyset$ pour $z \neq 0$.

Proposition 134.— *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $\theta_0 \in \mathrm{Arg} z$, on a*

$$\mathrm{Arg} z = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$$

Preuve : On a $\theta \in \mathrm{Arg} z \Longleftrightarrow z = |z|e^{i\theta} = |z|e^{i\theta_0} \Longleftrightarrow e^{i\theta} = e^{i\theta_0} \Longleftrightarrow e^{i(\theta-\theta_0)} = 1 \Longleftrightarrow i(\theta - \theta_0) \in 2i\pi\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \theta \in \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

□

Corollaire-Définition 135.— *Parmi les éléments de $\mathrm{Arg} z$, il en existe un unique dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ce réel s'appelle la "détermination principale de l'argument de **z**" et se note $\arg z$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z| e^{i \arg z}$.*

Point de vue algébrique.

L'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ qui est visiblement abélien abélien. On a donc $2\pi\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ et l'on appelle le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le "groupe des angles". Plus précisément, notons $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Remarquons que pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\widehat{\theta_0} = s(\theta_0) = \{\theta_0 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. De plus, sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est muni d'une loi de composition interne définie par $\widehat{\theta_0} \widehat{+} \widehat{\theta_1} = \widehat{\theta_0 + \theta_1}$ (la vérification que cette définition ne dépend pas du choix de $\theta \in \widehat{\theta_0}$ ni de celui de $\theta' \in \widehat{\theta_1}$ provient du fait $2\pi\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$).
Si $z \in \mathbb{C}^\times$, alors $\mathrm{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. De plus,

Proposition 136.— *Pour tous* $z, z' \in \mathbb{C}$, *on a* $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z)\widehat{+}\mathrm{Arg}\,(z')$.

Preuve : Soient $\theta \in \mathrm{Arg} z$, $\theta' \in \mathrm{Arg} z'$ et $\widetilde{\theta} \in \mathrm{Arg}(zz')$. Par définition, $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|e^{i\theta'}$ et $zz' = |zz'|e^{i\widetilde{\theta}}$. L'égalité $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$ montre alors que $\theta + \theta' \in \mathrm{Arg}(zz')$. Comme $\widetilde{\theta} \in \mathrm{Arg}(zz')$, on a $\widehat{\theta + \theta'} = \widehat{\widetilde{\theta}}$, i.e. $\widehat{\theta}\widehat{+}\widehat{\theta'} = \widehat{\widetilde{\theta}}$, d'où la proposition.

□

Attention ! Cette proposition n'est plus vraie lorsqu'on remplace Arg par arg. Par exemple, si l'on prend $z = z' = -i$, on a $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ mais $\pi = \arg(-1) = \arg((-i)\times(-i)) \neq \arg(-i) + \arg(-i) = -\pi$.

Pour terminer ce chapitre, rappelons que le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

est surjectif sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ et que son noyau vaut $\ker \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$. Le premier théorème d'isomorphisme implique alors que $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

4 Séries de Fourier.

4.1 Séries trigonométriques.

4.1.1 Définitions et notations.

Définition 137.— *Une série trigonométrique est une série de fonctions de la variable réelle de la forme* $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *où* $(a_n)_n$ *et* (b_n) *sont deux suites de complexes.*

Notations complexes : Compte-tenu de la formule $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, on peut noter la somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$$

en posant, pour $n\geq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n-ib_n)\\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n+ib_n)\end{aligned}$$

($c_0=a_0/2$ en convenant que $b_0=0$). La série $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ pourra donc être notée $\sum_{\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$, en convenant que

$$\sum_{\mathbb{Z}}c_ne^{inx}\text{ converge}\Longleftrightarrow\sum\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)\text{ converge}$$

Inversement, $\sum_{\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$ est associée à la série trigonométrique $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ où $(a_n)_n$ et (b_n) sont définies, pour $n\geq 1$, par

$$\begin{aligned} a_n &= c_n+c_{-n}\\ b_n &= i(c_n-c_{-n})\end{aligned}$$

Par exemple, si l'on considère une série entière $\sum a_nz^n$ de rayon $R>0$, alors $\sum a_n\rho^ne^{in\theta}$ converge dés que $\rho<R$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\sum_{n\geq 0}x^ne^{in\theta}$$

pour tout $|x|<1$ et l'on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1-xe^{-i\theta}}{1-2x\cos\theta+x^2} &= \sum_{n\geq 0}x^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\ \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} &= \sum_{n\geq 0}x^n\cos n\theta\\ \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} &= \sum_{n\geq 0}x^n\sin n\theta\end{aligned}$$

4.1.2 Critères de convergence.

Proposition 138.— *Si les séries de nombres complexes* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.

Preuve : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

et donc $\|a_n \cos nx + b_n \sin nx\|_\infty$ est majorée par le terme d'une série convergente.

□

Remarque : Vues les relations liants a_n, b_n et c_n on voit immédiatement que

$$\sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ convergent absolument} \Longleftrightarrow \sum c_n \text{ et } \sum c_{-n} \text{ convergent absolument}$$

Proposition 139.— *Si* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont des suites de réels, décroissantes, alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *est convergente en tout* $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ *et la fonction limite, sur cet ensemble, est continue.*

Preuve : C'est une conséquence de ???

□

4.1.3 Dérivation, intégration.

Par définition, la série dérivée d'une série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est la série trigonométrique

$$\sum -na_n \cos nx + nb_n \sin nx = \sum_{\mathbb{Z}} inc_n e^{inx}$$

En application directe du théorème ???, on a

Proposition 140.— *Si la série dérivée d'une série trigonométrique* S *converge uniformément sur un intervalle* I *et que* S *converge en un point* $x_0 \in I$, *alors* S *converge sur* I *vers la fonction définie par sa série dérivée.*

Pour la primitivation, il faut faire attention : la primitive formelle de la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est la série $\frac{a_0 x}{2} + \sum \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx$ qui n'est une série trigonométrique que si $a_0 = 0$. On peut toutefois appliquer le théorème ??? :

Proposition 141.— *Si la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *converge uniformément sur un segment* $[a, b]$, *alors*

$$\int_a^b \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx = \left[\frac{a_0 x}{2} \right]_a^b + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right]_a^b$$

4.1.4 Coefficients en fonction de la somme.

Proposition 142.— *Si la série* $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *converge uniformément sur* $[0, 2\pi]$ *vers une fonction* f*, alors*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Preuve : Puisqu'il y a convergence uniforme, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}e^{-int}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt \\ &= \frac{c_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt + \sum_{k\neq n} c_k \left[\frac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)}\right]_0^{2\pi} = c_n \end{aligned}$$

□

4.2 Série de Fourier d'une fonction réglée.

4.2.1 Rappels sur les fonctions réglées.

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite "réglée" s'il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f. De manière équivalente, f est réglée si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists f_\varepsilon \in \mathscr{E}([a, b]) \ \|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$$

On note $\mathcal{R}eg([a, b])$ l'ensemble des fonctions réglées sur $[a, b]$. Cet ensemble est stable pour les principales lois de composition algébriques :

Proposition 143.— *Si* f *est réglée sur* $[a, b]$*, alors* f *est bornée. L'ensemble* $\mathcal{R}eg([a, b])$ *est une sous-*$\mathbb{R}$*-algèbre de* $\mathbb{R}^{[a,b]}$ *stable par passage à la valeur absolue. En d'autres termes, si* $f, g \in \mathcal{R}eg([a, b])$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *alors* $(f + \alpha g), fg, |f| \in \mathcal{R}eg([a, b])$.

Preuve : Si f est réglée, en particulier, il existe $f_1 \in \mathscr{E}([a, b])$ $\|f - f_1\|_\infty < 1$. Donc, par l'inégalité triangulaire, on a $|\|f\|_\infty - \|f_1\|_\infty| \leq \|f - f_1\|_\infty < 1$, donc

$$\|f_1\|_\infty - 1 \leq \|f\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + 1$$

f_1 étant bornée, $\|f_1\|_\infty$ est un réel donc $\|f\|_\infty$ est un réel et f est bornée.

Soient f et g deux fonctions réglées de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) soit une suite de fonctions en escalier de $[a, b]$ qui converge uniformément vers f (resp. g). La suite $(f_n + \alpha g_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier, or $\|(f + \alpha g) - (f_n + \alpha g_n)\|_\infty \leq$

$\|f - f_n\|_\infty + |\alpha|\|g - g_n\|_\infty$. Donc la suite $(f_n + \alpha g_n)_n$ converge uniformément vers $(f + \alpha g)$ et ainsi $\mathcal{R}eg([a,b])$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

La suite de fonctions $(f_n g_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier. Remarquons que comme $(g_n)_n$ converge uniformément vers f, la suite $\|f_n)\|_\infty$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite, alors la suite $(g_n(f - f_n))$ converge uniformément vers 0 car $\|g_n(f - f_n)\|_\infty \leq M\|g_n(f - f_n)\|_\infty$. De même, puisque f est bornée, la suite $f(g - g_n)$ converge uniformément vers 0, et comme on a $(fg - f_n g_n) = g_n(f - f_n) + f(g - g_n)$, et que $\|(fg - f_n g_n)\|_\infty \leq \|g_n(f - f_n)\|_\infty + \|f(g - g_n)\|_\infty$ alors $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers (fg). Donc (fg) est réglée.

Enfin, pour tout $x \in [a,b]$, on a $\||f(x)| - |f_n(x)|\| \leq |f(x) - f_n(x)|$ et donc

$$\||f| - |f_n|\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty$$

La suite $(|f_n|)_n$ (qui est une suite de fonctions en escalier, converge uniformément vers $|f|$ et donc $|f|$ est réglée.

□

La famille des fonctions réglées constitue un exemple de famille générique de fonctions intégrables :

Proposition 144.— *Toute fonction réglée f sur $[a,b]$ est intégrable. De plus, si (f_n) est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge et*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve : Soit f réglée et (f_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n tel que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On pose alors

$$g_\varepsilon(x) = g_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ et } h_\varepsilon(x) = g_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

g_ε et h_ε sont deux fonctions en escalier telles que:

$$g_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq h_\varepsilon(x) \text{ et } \int_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))dx \leq \varepsilon$$

Donc f est intégrable. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > N,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Pour $n > N$, on a donc

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon$$

et donc $\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

□

La famille des fonctions réglées contient un grand nombre de fonctions "classiques". Par exemple :

Proposition 145.— *Toute fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$ est réglée.*

Preuve : • Cas où f est continue : d'après le théorème de Heine f est alors uniformément continue. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si p est un entier tel que $(b-a)/p < \alpha$, on considère alors la subdivision à pas régulier $s : a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ de $[a,b]$ ($a_j = a + j\frac{b-a}{p}$ pour $j = 0, \cdots, p$) et la fonction e_ε définie par, $e_\varepsilon(b) = f(b)$ et

$$e_\varepsilon(x) = f(a_j) \text{ pour tout } j = 0, \cdots, p-1 \text{ et tout } x \in [a_j, a_{j+1}[$$

Pour tout $i = 0, \cdots, p-1$ et tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$, on a donc

$$|e_\varepsilon(x) - f(x)| = |f(a_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (\text{car } |x-a_i| < \alpha)$$

et comme $e_\varepsilon(a_i) = f(a_i)$, on en déduit que $\|e_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$. La fonction e_ε étant en escalier, on en déduit finalement que f est réglée.

• Cas général : on considère une subdivision $x_0 < \cdots < x_n$ de $[a,b]$ adaptée à f. Fixons $\varepsilon > 0$, d'après le cas précédent, pour tout $i = 1, \cdots, n$, il existe e_i une fonction en escalier de $[x_{i-1}, x_i]$ telle que sur $]x_{i-1}, x_i[$ on ait

$$\|f_i(x) - e_i(x)\|_\infty < \varepsilon$$

Soit alors e, la fonction en escalier définit par $\forall i = 0, \cdots n$, $e(x_i) = f(x_i)$ et

$$\forall i = 1, \cdots, n \ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\ e(x) = e_i(x)$$

Il est clair que sur $[a,b]$ on a $\|e - f\|_\infty < \varepsilon$, le résultat en découle alors.

□

Nous terminons ce paragraphe de rappels avec une très importante caractérisation des fonctions réglées :

Théorème 146.— *Soit f une fonction sur $[a,b]$. Les propositions suivantes*

i) f est réglée sur $[a,b]$,

ii) f admet en tout point de $]a,b[$ une limite droite et une limite gauche, et admet une limite droite en a et une gauche en b,

sont équivalentes.

Preuve : On rappelle le théorème suivant[1] : si $]\alpha_i, \beta_i[_I$ est une famille d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i\in I}]\alpha_i, \beta_i[$. Alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $[a,b] \subset \bigcup_{j\in J}]\alpha_j, \beta_j[$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Pour $t \in [a,b]$, on note $f(t-0)$ la limite gauche de f en t et $f(t+0)$, la limite droite de f en t. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\forall t \in]a,b[$, il existe $\alpha_t > 0$ tel que $\forall x \in]t-\alpha_t, t[$, $|f(x) - f(t-0)| < \varepsilon$ et $\forall x \in]t, t+\alpha_t[$, $|f(x) - f(t+0)| < \varepsilon$. De même, il existe $\alpha_0 > 0$ et α_1 tel que $\forall x \in]b-\alpha_1, b[$, $|f(x) - f(1-0)| < \varepsilon$ et $\forall x \in]a, a+\alpha_0[$, $|f(x) - f(0+0)| < \varepsilon$.

La famille d'intervalles ouverts $(]t-\alpha_t, t+\alpha_t[)_{t\in]a,b[}$ vérifie $[a,b] \subset \bigcup_{t\in]a,b[}]t-\alpha_t, t+\alpha_t[\bigcup]b-\alpha_1, b[\cup]a, a+\alpha_a[$. Donc il existe $t_1, \cdots, t_{n-1}$ des points de $]a,b[$ tels que $]a,b[\subset \bigcup_{i=1,\cdots,n-1}]t_i - \alpha_{t_i}, t_i+\alpha_{t_i}[\bigcup]1-\alpha_1, 1[\cup]0, \alpha_0[$. On suppose que $a = t_0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = b$ et $t_i + \alpha_i < t_{i+1} + \alpha_{i+1}$ (il suffit de réordonner les points d'enlever les t_i tel que $]t_i - \alpha_{t_i}, t_i + \alpha_{t_i}[$ soit entièrement inclu dans un $]t_i - \alpha_{t_i}, t_i + \alpha_{t_i}[$ pour $j \neq i$ et éventuellement de prendre α_0 "plus petits"). On définit la fonction e_ε par:

Si $x \in [a, a+\alpha_0[$, $e_\varepsilon(x) = f(a+0)$.

Si $x \in [t_i + \alpha_{t_i}, t_{i+1} + \alpha_{t_{i+1}}[$ $(i = 1, \cdots, n-2)$, $e_\varepsilon(x) = f(ti+1+0)$.

Si $x \in [t_n + \alpha_{t_n}, b]$, $e_\varepsilon(x) = f(b-0)$.

e_ε est donc une fonction en escalier telle que $\|f - e_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Donc f est réglée.

$i) \Longrightarrow ii)$ Soit f une fonction réglée, et $(f_n)_n$ une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers f. Soit $x \in [a,b[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que $\forall n > N$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$. Maintenant pour tout n, f_n est en escalier, donc $\forall n \in N$, il existe $\alpha_n > 0$ et un unique $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in]x, x+\alpha_n[$, $f_n(x) = \lambda_n$. Pour $x \in [a,b[$, on a donc:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\ \exists \alpha_n > 0\ \exists! \lambda_n > 0\ tel\ que\ \forall t \in]x, x+\alpha_n[,\ |f(t) - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En utilisant l'identité remarquable $|\lambda_p - \lambda_q| \leq |f(t) - \lambda_p| + |f(t) - \lambda_q|$ on en déduit que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N, \forall q > N, |\lambda_p - \lambda_q| < \varepsilon$$

Donc la suite $(\lambda_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente. Soit λ sa limite. On a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ \exists \alpha_n > 0,\ \forall t \in]x, x+\alpha_n[\ |f(t) - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour $N = \sup(N_1, N_2)$, $n = N+1$ et $\alpha = \alpha_n$, on a en utilisant à nouveau l'inégalité triangulaire:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in]x, x+\alpha[\ |f(t) - \lambda| < \varepsilon$$

Ce qui dit bien que $\lim_{t\to x^+} f(t) = \lambda = f(x+0)$ (i.e. f a une limite droite en tout point de $[a,b[$). On démontrerait de la même façon que f a une limite gauche en tout point de $]a,b]$.

□

En particulier, le théorème des limites de fonctions monotones prouve ainsi que *toute fonction monotone sur $[a,b]$ est réglée.*

[1] Ce théorème est en fait la caractérisation, par l'axiome de Borel-Lebesgue, des ensembles compacts. Une démonstration de ce résultat pourra être trouvée dans tout bon cours de topologie.

4.2.2 Définition et notations.

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{R}eg_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et réglées (sur $[0, 2\pi]$). On se convaincra assez facilement que cet ensemble a les propriétés algébriques de la proposition 143. La proposition 142 nous invite à considérer, pour une fonction $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, la série trigonométrique

$$\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$$

avec

$$\begin{array}{rcl} c_n(f) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \\ a_n(f) & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ b_n(f) & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

et à s'interroger sur la convergence de cette série (et, le cas échéant, le lien de sa fonction limite avec la fonction f). Dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on notera

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{inx}$$

la n-ième somme partielle de cette série.

Définition 147.— *Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et $n \geq 0$, les coefficients $a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ sont appelés "n-ièmes coefficients de Fourier" de f et la série trigonométrique $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$ est appelée "série de Fourier de (ou "associée à") f".*

Remarques 148.— 1/ Si f est à valeurs réelles, alors :

- $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$.
- $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.
- $|c_n(f)|^2 = |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{4}(a_n(f)^2 + b_n(f)^2)$.

2/ Si f est paire (resp. impaire) alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n(f) & = & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos ntdt \\ b_n(f) & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left(\text{resp. } \left\{\begin{array}{rcl} a_n(f) & = & 0 \\ b_n(f) & = & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin ntdt \end{array}\right.\right)$$

3/ La proposition 142 montre que, si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, 2\pi]$, alors elle est égale à sa série de Fourier.

Proposition 149.— *Si $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, alors $\lim_n a_n(f) = \lim_n b_n(f) = \lim_{|n|} c_n(f) = 0$.*

Preuve : Vu le lien qui existe entre $a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$, il suffit de montrer que $\lim_{|n|} c_n(f) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt = 0$$

Supposons, pour commencer que f soit une fonction en escalier et considérons une subdivision adaptée $a_0 < \cdots < a_h$ à f. On a alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt = \sum_{j=0}^{h-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \lambda_j e^{int}dt$$

où λ_j est la valeur de f sur $]a_j, a_{j+1}[$. On a alors

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)dt\right| \le \sum_{j=0}^{h-1} \left|\lambda_j \left[\frac{e^{int}}{in}\right]_{a_j}^{a_{j+1}}\right| \le M.\frac{2h}{n}$$

où $M = \max(|\lambda_0|, \cdots, |\lambda_{h-1}|)$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice $N(f)$ tel que, pour tout $n \ge N(f)$, $\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt\right| \le \varepsilon$.

Passons au cas général où f est réglée. Par définition, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une fonction en escalier φ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$. En posant $f = (f - \varphi) + \varphi$, on voit que, pour tout $n \ge N(\varphi)$, on a

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt\right| \le \left|\int_0^{2\pi} (f(t)-\varphi(t))e^{int}dt\right| + \left|\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{int}dt\right| \le \int_0^{2\pi} \|f-\varphi\|_\infty dt + \varepsilon = (2\pi+1)\varepsilon$$

□

4.2.3 Théorème de Dirichlet.

Proposition 150.— (Formule sommatoire de Dirichlet) *Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et tout $n \ge 0$, on a*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\left(f(x-2\theta)+f(x+2\theta)\right)d\theta$$

Preuve : Si $x \in \mathbb{R}$ alors on a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)}du$$

Si l'on pose $\varphi_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)}$, alors par un calcul classique de somme de suite géométrique, on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(u) &= 2n+1 \text{ si } x-u \in 2\pi\mathbb{Z}\\ &= \frac{\sin\left((2n+1)\left(\frac{x-u}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)} \text{ sinon}\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la périodicité, on obtient

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(u)f(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} \varphi_n(u)f(u)du$$

et, en effectuant le changement de variables $u = x - 2\theta$, on a alors

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi_n(x-2\theta)f(x-2\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)d\theta$$

Par ailleurs, le changement de variables $\theta = -\theta$ montre alors que

$$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)d\theta = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)d\theta$$

d'où découle finalement la formule annoncée.

□

Remarque 151.— Si l'on considère la fonction $f \equiv 1$, on a alors d'une part

$$S_n(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}d\theta$$

et puisque, pour $n \neq 0$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}dt = 0$, on a d'autre part

$$S_n(f)(x) = c_0(f) = 1$$

Ceci montre que, pour tout $n \geq 0$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Corollaire 152.— *Avec les notations précédentes, si l'on fixe $x \in \mathbb{R}$, alors pour que la suite $S_n(f)(x)$ converge vers le complexe $\lambda_x \in \mathbb{C}$, il suffit qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel qu'au voisinage droite 0 épointé, on ait*

$$f(x-2\theta) + f(x+2\theta) = 2\lambda_x + \mu\theta + o(\theta)$$

autrement dit : $\displaystyle\lim_{\substack{\theta\to 0\\ \theta>0}} \frac{f(x-2\theta)+f(x+2\theta)-2\lambda_x}{\theta} = \mu \in \mathbb{C}$.

Preuve : La formule sommatoire de Dirichlet et la remarque 151 permettent d'écrire

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \lambda_x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\left(f(x-2\theta)+f(x+2\theta)\right)d\theta \\ &\qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}2\lambda_x d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \psi(\theta)\sin(2n+1)\theta d\theta \end{aligned}$$

où l'on considère la fonction 2π-périodique ψ définie par

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= \frac{[f(x-2\theta)+f(x+2\theta)]-2\lambda_x]}{\sin\theta} \text{ pour } x\in]0,\pi/2] \\ &= 0 \text{ pour } x\in]\pi/2,2\pi]\end{aligned}$$

Vue sa définition, on voit que ψ possède des limites droites et gauches en tout point de $]0,2\pi]$ et l'hypothèse du corollaire assure que $\lim_{\theta\to 0^+}\psi(\theta)=\mu$ existe. La fonction ψ est donc réglée (théorème 146) et l'on voit alors que

$$S_n(f)-\lambda_x = b_{2n+1}(\psi)\xrightarrow[\theta\to 0^+]{} 0$$

d'après la proposition 149.

□

Théorème 153.— (Dirichlet) *Si $f\in\mathcal{R}eg_{2\pi}$ vérifie qu'en tout point les prolongement droite et gauche de f sont dérivables alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$$

Preuve : Il s'agit d'une conséquence du corollaire 152 appliqué à $\lambda_x=\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ en remarquant que, si l'on note $f_d'(x^+)$ (rep. $f_g'(x^-)$) la dérivée droite (resp. gauche) du prolongement à droite (resp. à gauche) de f, alors

$$\begin{aligned}f(x-2\theta)+f(x+2\theta) &= [(f(x^-)-2\theta f_g'(x^-)+o(\theta))]+[(f(x^+)+2\theta f_d'(x^+)+o(\theta))] \\ &= 2\lambda_x+2(f_d'(x^+)-f_g'(x^-))\theta+o(\theta)\end{aligned}$$

□

Le cas est le plus pratique d'application du théorème de Dirichlet est celui des fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Si l'on rajoute à cela l'hypothèse de continuité on obtient :

Corollaire 154.— *La série de Fourier d'une fonction f continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique converge en tout point et sa somme est égale à f.*

Exemple.— (fonction créneaux) On considère la fonction 2π-périodique f, définie par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x\in]-\pi,0[\\ 1/2 & \text{si } x=-\pi,0,\pi\end{cases}$$

La fonction f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et vérifie $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet assure alors que f est égale à sa série de Fourier. On a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\geq 1\end{cases}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \frac{1-(-1)^n}{n\pi} & \text{si } n\geq 1\end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ \frac{2}{(2k+1)\pi} & \text{si } n=2k+1\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$

4.2.4 Formule de Parseval.

Sur $\mathcal{R}eg_{2\pi}$ on considère la forme sesquilinéaire ϕ définie pour $f, g \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ par

$$\phi(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

On a alors les propriétés suivantes :

• Pour tous $f, g \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ on a $\overline{\phi(f,g)} = \phi(g,f)$

• Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, $\begin{cases} g \longmapsto \phi(f,g) & \text{est une forme linéaire} \\ g \longmapsto \phi(g,f) & \text{est une forme semi-linéaire} \end{cases}$

• Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, $\phi(f,f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \in \mathbb{R}^+$. On pose alors $Q(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$.

• Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, on a $Q(f) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 dt} = \|f\|_\infty$.

• Pour tous $f, g \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ on a

$$\begin{array}{rcl} Q^2(f+g) & = & \phi(f+g, f+g) = \phi(f,f) + \phi(g,g) + \phi(f,g) + \phi(g,f) \\ & = & Q^2(f) + Q^2(g) + 2\mathcal{R}e(\phi(f,g)) \end{array}$$

et donc, si $\phi(f,g) = 0$ (i.e. f et g sont ϕ-orthogonales), on a

$$Q^2(f+g) = Q^2(f) + Q^2(g)$$

• Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Q(\lambda f) = \sqrt{\phi(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} \phi(f,f)} = |\lambda| Q(f)$$

• Pour tous $f, g \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt}$$

se traduit par

$$|\phi(f,g)| \leq Q(f)Q(g)$$

On a ainsi

$$\begin{array}{rcl} Q^2(f+g) & = & Q^2(f) + Q^2(g) + 2\mathcal{R}e(\phi(f,g)) \\ & \leq & {}^2(f) + Q^2(g) + 2|\phi(f,g)| \\ & \leq & {}^2(f) + Q^2(g) + 2Q(f)Q(g) \\ & = & (Q(f) + Q(g))^2 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$Q(f+g) \leq Q(f) + Q(g)$$

Dans la suite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction $e_k \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $e_k(x) = e^{ikx}$. Pour un entier $N \geq 0$, on notera E_N le sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}eg_{2\pi}$ engendré par la famille $e_{-N}, \cdots, e_N$.

Proposition 155.— *1/ La famille $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.*

2/ Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $c_k(f) = \phi(e_k, f)$. Ainsi, pour tout $N \geq 0$, on a

a) $S_N(f) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \phi(e_k, f)e_k \in E_N$.

b) $Q^2(S_N(f)) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$.

3/ Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, tout $N \geq 0$ et tout $g \in E_N$, on a $\phi(f - S_N(f), g) = 0$. En particulier :

a) $\phi(f - S_N(f), S_N(f)) = 0$.

b) $Q^2(f) = Q^2(f - S_N(f)) + Q^2(S_N(f))$.

Preuve : 1/ Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\phi(e_p, e_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{ipt}} e^{iqt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(q-p)t} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt & = 1 \text{ si } p = q \\ \left[\dfrac{e^{i(q-p)t}}{2i\pi(q-p)}\right]_0^{2\pi} & = 0 \text{ si } p \neq q \end{cases}$$

2/ On a $\phi(e_k, f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{e^{ikt}} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = c_k(f)$.

2.a. Conséquence immédiate.

2.b. Puisque la famille $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale, on a

$$Q^2(S_N(f)) = Q^2\left(\sum_{k=-N}^{N} \phi(e_k, f)e_k\right) = \sum_{k=-N}^{N} Q^2(\phi(e_k, f)e_k) = \sum_{k=-N}^{N} |\phi(e_k, f)|^2 Q^2(e_k) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$$

3/ D'après 1/ et 2/, pour tout $-N \leq k \leq N$, on a

$$\phi(f - S_N(f), e_k) = \phi(f, e_k) - \phi(S_N(f), e_k) = \overline{c_k(f)} - \sum_{j=-N}^{N} \overline{c_k(f)}\phi(e_j, e_k) = \overline{c_k(f)} - \overline{c_k(f)} = 0$$

et le 3/ en découle par linéarité.

3.a. Immédiat compte-tenu du fait que $S_N(f) \in E_N$.

3.b. Puisque $f - S_N(f)$ et $S_N(f)$ sont orthogonales, d'après ce qui précède, on a

$$Q^2(f) = Q^2((f - S_N(f)) + S_N(f)) = Q^2(f - S_N(f)) + Q^2(S_N(f))$$

□

Corollaire 156.— (Inégalité de Bessel) *Pour tout $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et tout $N \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve : D'après la proposition 155, on a

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = Q^2(S_N(f)) = Q^2(f) - Q^2(f - S_N(f)) \leq Q^2(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

□

La suite $\left(\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2\right)_N$ étant visiblement croissante, l'inégalité de Bessel assure qu'elle est majorée et donc convergente et que l'on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Corollaire 157.— *Si $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement.*

Preuve : On considère $0 = a_0 < \cdots < a_n = 2\pi$ une subdivision adaptée à f. Si l'on note $f^{'}$ n'importe quel prolongement aux point $a_0, \cdots, a_n$ de la dérivée de f, alors en intégrant par partie les prolongements $\mathscr{C}^1$ de f, on trouve

$$\begin{aligned}
c_n(f^{'}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{'}(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f^{'}(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[e^{-int}f(t)\right]_{a_{k-1}}^{a_k} - in\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ina_k}f(a_k) - e^{-ina_{k-1}}f(a_{k-1})\right) - inc_n(f) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} - inc_n(f) \\
&= -inc_n(f)
\end{aligned}$$

On a donc,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f^{'})| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f^{'})|^2\right)$$

et ainsi, pour $n \geq 0$,

$$|a_n(f)|, |b_n(f)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(|c_n(f^{'})|^2 + |c_{-n}(f^{'})|^2\right)$$

D'après l'inégalité de Bessel $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ convergent, ce qui est aussi le cas de $\sum \frac{1}{n^2}$, on en déduit donc que $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ convergent absolument. Ceci implique, d'après ???, que $\sum a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt$ converge normalement.

□

Théorème 158.— (Relation de Parseval) *Pour tout* $f \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$, *on a*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve : Puisque $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \lim_N \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \lim_N Q^2(S_N(f))$, on voit, en vertu de la proposition 155.3.b. que le théorème équivaut à montrer que $\lim_N Q(f - S_N(f)) = 0$.

Fixons un $\varepsilon > 0$. Puisque f est réglée, il existe une fonction en escalier g sur $[0, 2\pi]$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. On a alors

$$Q(f-g) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 dt} = \varepsilon$$

Supposons avoir une fonction $\tilde{g}$, continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, telle que $Q(g - \tilde{g}) \leq \varepsilon$. Pour $N \geq 0$, on pose $f - S_N(\tilde{g}) = (f - S_N(f)) + (S_N(f) - S_N(\tilde{g}))$. Puisque $(S_N(f) - S_N(\tilde{g})) \in E_N$, par application de la proposition 155.3/ on a $Q^2(f - S_N(\tilde{g})) = Q^2(f - S_N(f)) + Q^2(S_N(f) - S_N(\tilde{g}))$ et donc $Q(f - S_N(f)) \leq Q(f - S_N(\tilde{g}))$. En posant $f - S_N(\tilde{g}) = f - g + g - \tilde{g} + \tilde{g} - S_N(\tilde{g})$, on trouve

$$\begin{aligned} Q(f - S_N(f)) \leq Q(f - S_N(\tilde{g})) &\leq Q(f-g) + Q(g - \tilde{g}) + Q(\tilde{g} - S_N(\tilde{g})) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \|\tilde{g} - S_N(\tilde{g})\|_\infty \end{aligned}$$

D'après le corollaire 157 la suite $(S_N(\tilde{g}))_N$ converge normalement vers la fonction $\tilde{g}$ si bien qu'il existe un indice N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $\|\tilde{g} - S_N(\tilde{g})\|_\infty \leq \varepsilon$. On vient donc de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $Q(f - S_N(f)) \leq 3\varepsilon$ i.e. $\lim_N Q(f - S_N(f)) = 0$.

La fin de la preuve consiste à construire la fonction $\tilde{g}$ que nous avons utilisée.

□

4.2.5 Fonctions T-périodiques.

Si l'on considère une fonction g périodique de période $T > 0$, réglée sur $[0, T]$ alors on voit que la fonction $f : x \longmapsto g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique et réglée sur $[0, 2\pi]$. En effectuant le changement de variables $t = \frac{2\pi}{T}y$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{T} f\left(\frac{2\pi}{T}y\right)e^{-in\left(\frac{2\pi}{T}y\right)}\frac{2\pi}{T}dy = \frac{1}{T}\int_0^{T} g(y)e^{-in\frac{2\pi}{T}y}dy$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T g(y)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}y\right)dy \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T g(y)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}y\right)dy \end{aligned}$$

et la série de Fourier de g est, par définition,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum a_n(f)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n(f)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

Les propriétés analytiques (continuité, dérivabilité etc) sont les même pour f et g, si bien que, par exemple, si f est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux alors f coincide avec sa série de Fourier et cette dernière converge normalement.