Un autre critère de diagonalisabilité

♡ Aux féminazies, qui sont décidément partout,
même au jury d'un certain concours,
pour le meilleur et surtout pour le Rire...

Un petit théorème strasbourgeois qui vise à établir cette (nouvelle ?) caractérisation de la diagonalisibilité :

Proposition.— *Soient E un K-espace vecoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. On note $K[u]$ la sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ engendrée par u.*

1/ Les propositions suivantes

i) u est diagonalisable,

ii) il existe un isomorphisme de K-algèbres entre $K[u]$ et K^p pour un certain entier $p \geq 1$,

sont équivalentes.

2/ Les propositions suivantes

i) u est diagonalisable dans la clôture algébrique $\overline{K}$ de K,

$i^{'}$) u est diagonalisable dans un surcorps de K,

ii) il existe une famille finie $\{K_1, \cdots, K_q\}$ d'extensions finies et séparables de K telles que $K[u]$ soit isomorphe à $K_1 \times \cdots \times K_q$ en tant que K-algèbres,

sont équivalentes.

Dans le langage plus savant de l'algèbre commutatif, on a donc

$$u \text{ est diagonalisable dans } \overline{K} \Longleftrightarrow K[u] \text{ est une algèbre étale}$$

$$u \text{ est diagonalisable dans } K \Longleftrightarrow K[u] \text{ est une algèbre étale déployée}$$

Preuve : De manière générale, le morphisme d'évaluation en u

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P(X) & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

a pour image $K[u]$: c'est visiblement une sous-K-algèbre contenant u et, par stabilité de l'addition et du produit, on voit que toute sous-K-algèbre qui contient u contient cette image. Le noyau du morphisme d'évaluation en u étant engendré par le polynôme minimal $\Pi \in K[X]$ de u, on en déduit un isomorphisme de K-algèbre $K[u] \simeq K[X]/(\Pi)$.

Par ailleurs, lorsque l'on étend les scalaires par une extension L/K (algébrique ou non) le polynôme minimal de u en tant que L-endomorphisme reste Π. On voit donc que

$$u \text{ diagonalisable dans une extension de } K \Longleftrightarrow u \text{ diagonalisable dans } \overline{K} \Longleftrightarrow \Pi \text{ est à racines simples dans } \overline{K}$$

ce qui justifie en particulier l'équivalence $i) \Longleftrightarrow i^{'})$ du 2).

1/ $i) \Longrightarrow ii)$. Puisque u est diagonalisable, on a $\Pi(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} (X-\lambda)$. Le théorème des restes chinois assure alors, qu'en tant que K-algèbres, on a les isomorphismes

$$K[u] \simeq K[X]/(\Pi) \simeq \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} K[X]/(X-\lambda) \simeq K^{\sharp \mathrm{Spec}(u)}$$

$ii) \Longrightarrow i)$ Supposons qu'il existe des sous-algèbres $K_1, \cdots, K_p$ de $K[u]$ telles que $K_i \simeq K$ pour $i = 1, \cdots, p$ et telles que, en tant que K-algèbres, on ait $K[u] = K_1 \oplus \cdots \oplus K_p \simeq K_1 \times \cdots \times K_p$. Pour chaque indice i, puisque K_i est un corps, il contient un neutre $e_i \in K_i$ qui, étant non nul, est aussi un générateur de la K-droite vectorielle K_i : $K_i = K.e_i$. On a alors $e_i^2 = e_i$ et donc le polynôme scindé à racines simples $X(X-1)$ est annulateur de e_i : e_i est diagonalisable et, par suite, les éléments de K_i sont simultanément diagonalisables. Maintenant, pour tout $i \neq j$, $e_i e_j = e_j e_i = 0$ et donc les e_i sont simultanément diagonalisables. On en déduit finalement que la K-algèbre $K[u]$ est codiagonalisable et qu'en particulier, u est bien diagonalisable.

2/ $i) \Longrightarrow ii)$. Comme rappelé plus haut, u étant diagonalisable dans $\overline{K}$, Π est à racine simple dans $\overline{K}$, si bien que la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $K[X]$ s'écrit sous la forme $P(X) = P_1(X) \cdots P_q(X)$ où $P_1, \cdots P_q \in K[X]$ sont des polynômes irréductibles et séparables, distincts deux à deux (donc, en particulier, premiers entre eux deux à deux). L'application du théorème des restes chinois assure alors que

$$K[u] \simeq K[X]/(\Pi) \simeq \prod_{i=1}^{q} K[X]/(P_i) \simeq \prod_{i=1}^{q} K_i$$

où $K_i = K[X]/(P_i)$ est bien une extension de K, séparable et de degré fini égal à $d^\circ P_i$ (puisque P_i est irréductible et séparable).

$ii) \Longrightarrow i)$ Ecrivons $K[u] = K_1 \oplus \cdots \oplus K_q \simeq K_1 \times \cdots \times K_q$ où, pour tout $i = 1, \cdots, q$, K_i désigne une sous-K-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ qui est aussi un corps, extension finie et séparable de K. Notons $e_i \in \mathscr{L}(E)$, le neutre du corps K_i. L'extension K_i/K se considère alors en identifiant le corps K dans K_i à la droite vectorielle $K.e_i$. Par le théorème de l'élément primitif, il existe $u_i \in K_i$ tel que $K_i = K(u_i)$. Comme K_i/K est séparable, le polynôme minimal (en tant qu'élément algébrique) $\mu_i(X) = \lambda_0 e_i + \lambda_1 e_i X + \cdots + \lambda_{n_i} e_i X^{n_i}$ de u_i sur K est séparable. Comme μ_i est irréductible, on voit que 0 n'est pas racine de μ_i, si bien que le polynôme $\Pi'(X) = X(\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n_i} X^{n_i}) \in K[X]$ est lui aussi séparable. On a alors dans $\mathscr{L}(E)$,

$$0 = u_i \mu_i(u_i) = \lambda_0 u_i + \lambda_1 u_i^2 + \cdots + \lambda_{n_i} u_i^{n_i+1} = \Pi'(u_i)$$

et donc u_i est annulateur du polynôme séparable Π', Π est donc à racines simples dans $\overline{K}$ et u_i est donc diagonalisable dans $\overline{K}$. Comme précédemment on en déduit finalement que l'algèbre $K[u]$ est codiagonalisable dans $\overline{K}$.