Une fonction nulle part continue mais satisfaisant la propriété des valeurs intermédiaires

La propriété des valeurs intermédiaires qui affirme pour une fonction f que *l'image de tout intervalle par f est encore un intervalle* est satisfaite par les fonctions continues (théorème des valeurs intermédiaires) et par les fonction dérivées (théorème de Darboux). Notons que le théorème de Darboux contient celui des valeurs intermédiaires puisque toute fonction continue possède une primitive. Un théorème du à Baire montre qu'une fonction dérivée est nécessairement continue sur une partie dense de son domaine de définition. Pour fournir un exemple de fonction satisfaisant la propriété des valeurs intermédiaires et qui ne soit pas une fonction dérivée, nous allons en choisir un dans lequel la fonction n'est continue nulle part.

On considère le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et $\{x_\rho\}_{\rho \in R}$ une classe de représentants. Un théorème de théorie des ensembles assure que si A est infini et B est dénombrable alors $\sharp A \times B = \sharp A$. Puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sont naturellement équipotents, on en déduit que $\sharp \mathbb{R}/\mathbb{Q} = \sharp \mathbb{R}$ et l'on peut donc choisir $R = \mathbb{R}$. Par définition du groupe quotient, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! \rho(x) \in R = \mathbb{R},\ \exists! r(x) \in \mathbb{Q},\ x = x_{\rho(x)} + r(x)$$

Ainsi, la formule $f(x) = \rho(x)$ définit bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

• Pour tout intervalle I non ponctuel, on a $f(I) = \mathbb{R}$ (et donc f satisfait la propriété des valeurs intermédiaires). En effet, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ l'ensemble $x_\rho + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (puisque c'est le translaté additif de $\mathbb{Q}$ qui est lui-même dense). Donc, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x_\rho + r \in I$ et l'on a alors $f(x_\rho + r) = \rho$.

• La fonction f n'est continue nulle part. En effet, supposons que f soit continue en un point $t \in \mathbb{R}$. Toujours par densité de l'ensemble $x_\rho + \mathbb{Q}$ pour un $\rho \in \mathbb{R}$ donné, on peut trouver une suite $(r_n)_n$ de rationnels telle que $\lim_n (x_\rho + r_n) = t$. On a alors $f(t) = \lim_n f(x_\rho + r_n) = \lim_n \rho = \rho$ et, en appliquant la même propriété à un autre réel ρ', on a alors l'égalité $\rho = f(t) = \rho'$, ce qui est absurde.