Exercices de calcul intégral

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Licence 2 — Maths/Phy-Chi/E2I — 2015/2016

Bruno Deschamps

Version 2.0

I.— Intégrales de Riemann

Sommes de Riemann

Exercice 1.— Calculer $\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 2.— Calculer $\lim_n \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 3.— Calculer $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{n-k}}$.

Exercice 4.— Soit $\alpha > 0$ un réel. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}+k^{\alpha+1}}$$

Montrer que $\lim_n S_n = \frac{\ln 2}{\alpha+1}$.

Exercice 5.— a) Calculer l'intégrale $\int_1^2 \log x dx$.

b) pour $n \geq 1$, expliciter R_n^{sup}, la n-ième somme de Riemann supérieure associée à la fonction $x \longmapsto \log x$ sur le segment $[1,2]$. Que vaut $\lim_n R_n^{\text{sup}}$?

c) En déduire que $\lim_n \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} = \frac{4}{e}$.

Calcul d'intégrales

Exercice 1.— Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2},\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx,\ \int_1^2 \ln x dx$$

Exercice 2.— Pour $n, m \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt) dt$$

Exercice 3.— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| \neq 1$. Après avoir étudier la fonction

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}}$$

calculer $\int_0^\pi f_\lambda(x) dx$.

Exercice 4.— Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) dx$.

Intégration par parties

Exercice 1.— Déterminer les primitives suivantes :

$$\int x \ln x dx,\ \int \arctan x dx,\ \int x \arctan x dx,\ \int \arcsin x dx,\ \int x \sin^3 x dx,\ \int \ln(1+x^2) dx,\ \int x^n \ln x dx$$

Exercice 2.— Soit P un polynôme de degré n. Décrire une méthode pour calculer

a) $\int P(x)e^x dx$. Calculer $\int (x^3 - 2x + 4)e^x dx$.

b) $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$, $\int P(x)\mathrm{sh} x dx$, $\int P(x)\mathrm{sh} x dx$. Calculer $\int x^n \sin x dx$ pour $n \geq 0$ entier.

Exercice 3.— Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$.

Changement de variables

Exercice 1.— Calculer l'aire d'une ellipse de grand axe a et de petit axe b.
(Ind. L'équation $\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$ définit une telle ellipse.)

Exercice 2.— Calculer

$$\int \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2} dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}},\ \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \ln x}},\ \int \frac{dx}{e^x + 1}$$

Exercice 3.— a) On considère une fraction rationnelle $R(T)$ (i.e. le rapport de deux polynômes). Montrer qu'il existe une fraction rationnelle $Q(T)$ telle que

$$\int_{\ln a}^{\ln b} R(e^x) dx = \int_a^b Q(t) dt$$

b) En déduire $\int \frac{dx}{\mathrm{ch} x}$ et $\int \frac{dx}{\mathrm{sh} x}$.

Exercice 4.— En effectuant le changement de variable $x = \tan t$, calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Exercice 5.— a) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$.

Longueur de courbes

Exercice 1.— On considère une parabole $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $y = ax^2 + by + c$. Calculer l'abscisse x_0 du sommet de $\mathscr{C}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la longueur de l'arc de $\mathscr{C}$ sur le segment $[x_0, x]$.

Exercice 2.— Calculer la longueur d'un arc de cycloïde de rayon R en utilisant, par exemple, sa paramétrisation

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$$

Exercice 3.— On considère une application de classe $\mathscr{C}^1$, $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ et la courbe "en escargot" $\mathscr{E}$ définie par la paramétrisation

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \varphi(t)\cos t \\ y(t) = \varphi(t)\sin t \end{array}\right.$$

pour $t \in [0, +\infty[$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction φ pour que la longueur de $\mathscr{E}$ soit finie.

b) On se donne un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et l'on considère la fonction $\varphi(t) = (t+1)^\alpha$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que l'escargot $\mathscr{E}$ associé à φ possède une longueur finie et calculer cette longueur.

II.— Intégrales doubles

Théorème de Fubini

Exercice 1.— Calculer l'aire du domaine plan délimité par les courbes données par :

a) $y = 4x - x^2$, $y = x$.

b) $y^2 = 2x$, $x^2 = 6y$.

c) $y = x^3 - 2x$, $y = 6x - x^3$.

Exercice 2.— Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy$ où D désigne le triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (1,1)$ et $B = (1,-1)$.

Exercice 3.— On considère la partie D de $\mathbb{R}^2$ formée des points $M(x,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient : $0 \leq x, y \leq 1$ et $x^2 + y^2 \leq 1$. Après avoir repésenté le domaine D, calculer l'intégrale double

$$\iint_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dxdy$$

Exercice 4.— 1/ a) Montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $[0,1]$. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$.

b) Prouver que $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^x - 1}\,dx$, cette dernière intégrale est-elle impropre?

c) Prouver que $I = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y} dy$, cette dernière intégrale est-elle impropre?

2/ On considère le pavé $\Delta = [0,1]^2$.

a) Montrer que $I = \iint_\Delta \frac{1}{1+xy} dxdy$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $(x,y) \in \Delta$, on a

$$\frac{1}{1+xy} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k y^k + \frac{(-xy)^n}{1+xy}$$

c) En déduire que $I = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + (-1)^n I_n$ où

$$I_n = \iint_\Delta \frac{(xy)^n}{1+xy}$$

d) En utilisant une inégalité fonctionnelle, montrer que $I_n \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \geq 1$.

e) Prouver finalement que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = I$.

3/ On rappelle que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer explicitement I.

Changement de variables

Exercice 1.— Grâce à un changement de variables en polaire calculer les deux intégrales

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2} dxdy \text{ et } J = \iint_\Delta x^2 + y^2 dxdy$$

où D désigne le cercle unité de centre O et Δ le quart supérieur de ce disque.

Exercice 2.— Calculer l'aire comprise à l'intérieur de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

au moyen d'une intégrale double en utilisant les coordonnées elliptiques : $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$.

Exercice 3.— Calculer $\iint_D \frac{xdxdy}{1+x\cos y}$ où $D = [0,1]\times[0,\pi]$.

Exercice 4.— Calculer $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$. On pourra considérer le changement de variables : $u = x-y$ et $v = x+y$.

Exercice 5.— On considère quatre réels $0 < \alpha < \beta$ et $0 < \lambda < \mu$ et le domaine plan

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ \alpha < y/x < \beta,\ \lambda < xy < \mu\right\}$$

Dessiner le domaine D et calculer son aire en considérant le changement de variable $u = y/x$ et $v = xy$.

Exercice 6.— (Calcul de l'intégrale de Gauss) Pour tout $r > 0$, on pose $D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$ et $\Delta_R = [-r, r]^2$ et l'on considère

$$I_r = \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad \text{et} \quad J_r = \iint_{\Delta_r} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

a) Montrer que les applications $r \longmapsto I_r$ et $r \longmapsto J_r$ sont croissantes et que, pour tout $r > 0$, on a $I_r \leq J_r \leq I_{\sqrt{2}r}$. En déduire que I_r et J_r ont même limite (finie ou non) quand $r \to +\infty$.

b) Montrer que, pour tout $r > 0$, $I_r = \pi(1 - e^{-r^2})$ et en déduire la valeur de $\lim_{r \to +\infty} I_r$.

c) Prouver finalement que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 7.— Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$

a) Montrer que D est un disque dont on précisera le centre et le rayon.

b) Grâce à un changement de variable en polaire, calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

Exercice 8.— On considère deux réels θ_1, θ_2 tels que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ et une application continue $f : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On considère alors le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \text{ et } 0 \leq r \leq f(\theta)\right\}$$

et l'application $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On note $D = f(\Delta)$ le domaine de $\mathbb{R}^2$, image par f du domaine Δ.

1/ Décrire géométriquement le domaine D.

2/ Caractériser le domaine D dans les cas suivants :

a) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, $f(\theta) = 1$.

b) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $f(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{(\cos\theta)^2 + 4(\sin\theta)^2}}$.

(Ind. On pourra calculer la quantité $x^2/4 + y^2$ où $x = f(\theta)\cos\theta$ et $y = f(\theta)\sin\theta$, et reconnaitre ainsi une courbe bien connue.)

3/ Dessiner approximativement le domaine D lorsque $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$ et $f(\theta) = \theta$.

4/ Montrer qu'en toute généralité, on a

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2 d\theta$$

5/ Donner les valeurs de Aire(D) dans les cas particuliers traités dans les questions 2 et 3.

Exercice 9.— On considère quatre réels α, β, μ, ν tels que $\alpha \neq \lambda$, $\beta \neq \mu$ et $\delta = \alpha\mu - \lambda\beta \neq 0$. Pour $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$ donnés on considère le domaine D du plan défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x > 0,\; y > 0,\; a \leq x^\alpha y^\lambda \leq b,\; c \leq x^\beta y^\mu \leq d\right\}$$

a) Représenter D quand $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\lambda = \mu = 1$, $a = c = 1$ et $b = d = 2$.

b) Pour u et v des réels > 0, on pose :

$$\begin{cases} x = u^{\frac{\mu}{\delta}} v^{-\frac{\lambda}{\delta}} \\ y = u^{-\frac{\beta}{\delta}} v^{\frac{\alpha}{\delta}} \end{cases}$$

Montrer que

$$(x,y) \in D \Longleftrightarrow (u,v) \in [a,b] \times [c,d]$$

et en déduire que l'application $\Theta : (u,v) \longmapsto (x,y)$, ainsi définie, est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre le pavé $[a,b] \times [c,d]$ et le domaine D.

c) Prouver que la valeur absolue du jacobien de Θ vaut $|J_\Theta| = \dfrac{1}{|\delta|} u^{\frac{\mu-\beta}{\delta}-1} v^{\frac{\alpha-\lambda}{\delta}-1}$.

d) En déduire que l'aire de la surface D vaut $\mu(D) = \dfrac{|\delta|}{(\mu-\beta)(\alpha-\lambda)} \left(b^{\frac{\mu-\beta}{\delta}} - a^{\frac{\mu-\beta}{\delta}}\right)\left(d^{\frac{\alpha-\lambda}{\delta}} - c^{\frac{\alpha-\lambda}{\delta}}\right)$.

e) Calculer alors la surface du domaine D de la question a).

III.— Intégrales curvilignes et formule de Green-Riemann

Exercice 1.— a) Soit γ l'arc de parabole d'équation $x = y^2 + y + 1$ d'origine $A(3,-2)$ et d'extrémité $B(3,1)$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma x^2 dx + xy dy$.

b) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $E(0,1,1)$ et $\mathscr{C}$ l'arc de cercle du plan zox de centre O et de rayon 1 d'origine C. Calculer $\displaystyle\int_\gamma xzdx + xdy - yzdz$ où $\gamma = \mathscr{C} \cup [A,B] \cup [B,E]$.

c) Calculer $\displaystyle\int_\gamma zdx + xdy - yzdz$ où γ est le chemin défini par l'intersection des deux surfaces d'équation respective $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x + z = 1$.

Exercice 2.— On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ possédant un bord orienté $\partial^+\Omega$. Montrer que

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_{\partial^+\Omega} -y \sin^2 x dx + \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) dy$$

Exercice 3.— En utilisant, par exemple, la formule de Green-Riemann, calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma (4x^3 y + y - 1) dx + (x^4 + 2x + 1) dy$$

où γ est le chemin parcouru dans le sens trigonométrique de la courbe du plan définie par l'équation algébrique $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Exercice 4.— En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1+\sin t)\cos t \end{cases}$$

Exercice 5.— Calculer

$$\int_\gamma xy^2 dx + 2xy dy$$

où γ désigne le bord orienté du domaine $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 1\}$, en utilisant

a) La formule de Green-Riemann.

b) Une paramétrisation de γ.

IV.— Intégrales multiples

Intégrale triple

Exercice 1.— Calculer :

a) $\iiint_D z dx dy dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x,y,z \geq 0 \text{ et } x+y+z \leq a\}$.

b) $\iiint_D y^2 dx dy dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2+y^2 \leq z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.

c) $\iiint_D z dx dy dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \text{ et } z \geq 0\}$.

Exercice 2.— Calculer le volume du domaine D limité, par le haut, par la sphère S_1 d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ et, par le bas, par la surface S_2 d'équation $z = x^2+y^2$.

Exercice 3.— Calculer $\iiint_B x dx dy dz$, $\iiint_B y dx dy dz$ et $\iiint_B z dx dy dz$ où B désigne la boule

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$$

Intégrales multiples

Problème.— Calcul du volume des boules en dimension n.

1/ *Intégrales de Wallis et formule de Stirling*. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$ (n-ième intégrale de Wallis).

1.a. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geq 0$, on a $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$. En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

1.b. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. Prouver que la suite $(W_n)_n$ est décroissante et en déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a $1 - \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$. Prouver alors que $W_n \sim_n W_{n+1}$.

1.c. Montrer finalement que $W_n \sim_n \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_n W_n$.

1.d. On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $n! \sim_n K \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

1.e. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(Formule de Stirling)

2/ *Calcul du volume des boules*. On se propose d'étudier le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathcal{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}$$

On note V_n son volume.

2.a. Soit $n \geq 2$. Montrer que, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$

En déduire que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

2.b. Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier. Montrer que $\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$.

2.c. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i\right) \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

2.d. Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $V_n = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} W_i\right)(2R)^n$ et, par suite, que pour $k \geq 1$ on a $V_{2k} = \dfrac{\pi^k}{k!} R^{2k}$ et, pour $k \geq 0$, $V_{2k+1} = 2^{2k+1} \dfrac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$. Expliciter alors V_1, V_2, V_3 et V_4.

2.e. En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

2.f. En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

2.g. Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.

2.h. Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

2.i. Que vaut le rang n_0 de la question 2.g. quand $R = 1$?

V.— Intégrales de surfaces

Exercice 1.— 1/ Calculer l'aire du domaine D limité par l'axe ox et l'arc paramétré : $x(t) = a(t - \sin t)$; $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

2/ Calculer $\displaystyle\int_\gamma (3x^2y^2 - y + 2)dx + (2x^3y + 2x - 3)dy$ où γ est le chemin défini par la courbe d'équation $x^2 + y^2/4 = 1$.

3/ Calculer l'aire

a) du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ avec $0 \leq z \leq 2$.

b) du tore donné par sa représentation paramétrique $x = (a + b\cos\varphi)\cos\theta$; $y = (a + b\cos\varphi)\sin\theta$; $z = b\sin\varphi$ $(0 < b < a)$.

c) l'aire de la partie de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ intérieure au cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

4/ Calculer l'intégrale du champ de vecteurs :

a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ sur le paraboloide d'équation $z = x^2 + y^2$ avec $0 \leq z \leq 1$.

b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ sur la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 2.— On considère un réel $a > 0$ et une fonction $f : [0, a] \longrightarrow [0, +\infty[$ continûment dérivable. On considère la surface de l'espace

$$\mathscr{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = f(z)^2,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$

a) Expliquer comment représenter la surface $\mathscr{S}$ connaissant l'application f.

b) Montrer que la surface $\mathscr{S}$ admet une paramétrisation

$$\Phi : (t, \theta) \longrightarrow \begin{cases} x(t, \theta) \\ y(t, \theta) \\ z(t, \theta) \end{cases}$$

où $(t, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$ et donner une telle paramétrisation.

c) En déduire que $\text{Aire}(\mathscr{S}) = 2\pi \displaystyle\int_0^a f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$.

d) Dans les situation suivantes, donner le nom de la surface $\mathscr{S}$, la dessiner et expliciter la valeur de son aire en fonction de a :

- $f(z) = R$ avec $R > 0$.
- $f(z) = z$.
- $f(z) = \sqrt{z}$.