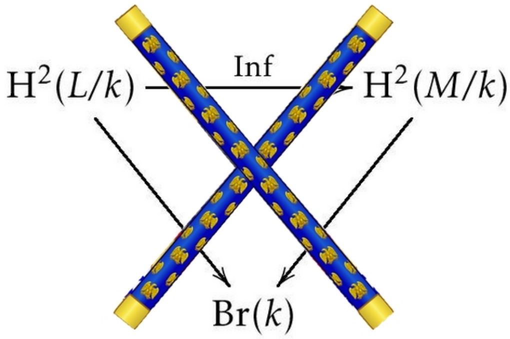
Exercices d'Analyse Convexe

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Licence 3
Bruno Deschamps
Version 3.1



Inégalités de convexité

Exercice 1.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in I$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Exercice 2.— Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\exp(a)+\exp(b)}{2}$.

Exercice 3.— Montrer que la fonction $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$ et en déduire que pour tout $a, b > 1$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

Exercice 4.— En étudiant la convexité de la fonction $x \longmapsto x \ln x$, montrer que pour tous réels $x, y, a, b > 0$, on a

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

Exercice 5.— Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tous réels $a, b \geq 0$, on a

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

Cette inégalité en a et b est-elle optimale ?

Exercice 6.— Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a

$$e^{\lambda x} \leq \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda)$$

Exercice 7.— Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercice 8.— Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ et les fonctions $g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

1) Justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que g est convexe et que h est concave.

3) En déduire que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $|f(x)| \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Exercice 9.— Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Exercice 10.— Inégalité de Jensen.

1/ Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe, $n \geq 1$ un entier et $x_1, \cdots, x_n \in I$. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

2/ (Applications)

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1.\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

a.1) En déduire que, $\sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$.

a.2) En déduire que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in]0, +\infty[$, on a

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

(*Indication. On pourra étudier la convexité de la fonction* $f : x \longmapsto \ln(1+e^x)$.)

En déduire que, pour tous entiers $n \geq 0$, $p \geq 1$ et tout $x_1, \cdots, x_p > 0$ tels que $x_1 \cdots x_p = 1$, on a

$$\prod_{k=1}^{p} (n + x_i) \geq (n+1)^p$$

c) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 1$, on a

$$x^n - 1 \geq n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

d) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels $a_1, \cdots, a_n > 0$, on a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$$

En déduire que, pour tout réel $x > 1$, on a

$$\sqrt{x^{2n} - 1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

e) Soient $a, b, c > 0$ trois réels. Montrer que

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} \geq 3$$

et que, si $a, b, c \geq \dfrac{a+b+c}{4}$, alors

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \geq 3$$

Plus généralement, montrer que si l'on se donne $n \geq 2$ réels $a_1, \cdots, a_n > 0$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j \neq i} a_j} = \frac{a_1}{a_2 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}$$

et que, si $a_1, \cdots, a_n \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{4}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{\sum_{j \neq i} a_j}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2 + \cdots + a_n}} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_{n-1}}} \leq \frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

f) Montrer que si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in]0, +\infty[$ sont tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + \lambda_3} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}^2}{\lambda_{n-1} + \lambda_n} + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n + \lambda_1} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice.— (CC 2020)

a) On se donne un entier $n \geq 1$ et $a_1, \cdots, a_n \in]0, +\infty[$. Montrer que

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{a_1 + \cdots + a_n} \leq a_1^{a_1} \cdots a_n^{a_n}$$

(On pourra étudier la fonction $x \longmapsto x \ln x$.)

b) On considère un réel $\ell > 1$. Montrer qu'il existe un réel $x_\ell > 0$, que l'on déterminera explicitement, tel que

- Si $a_1, \cdots, a_n \in [x_\ell, +\infty[$ alors $\left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n(a_1 + \cdots + a_n)^\ell} \leq a_1^{(na_1)^\ell} \cdots a_n^{(na_n)^\ell}$.

- Si $a_1, \cdots, a_n \in]0, x_\ell]$ alors $\left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n(a_1 + \cdots + a_n)^\ell} \geq a_1^{(na_1)^\ell} \cdots a_n^{(na_n)^\ell}$.

c) Etudier ce que deviennent les résultats de la question b) lorsque $\ell \in]0, 1[$.

(CC 2023)

a) Etudier la convexité de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

b) En déduire que si $x_1,\cdots,x_n \geq 1$ désignent $n\geq 1$ réels, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}$$

Que devient cette inégalité si l'on suppose maintenant $x_1,\cdots,x_n \leq 1$?

Exercice 11.— Inégalité de Jensen intégrale. Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, le segment $[c,d] = f([a,b])$ et $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f(t)dt$$

Exercice 12.— Inégalités d'Hölder et Minkowski.

a) Soient $p,q \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $u,v\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$$

b) En déduire l'inégalité de Hölder : si $p,q>0$ sont tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et si $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ sont $2n$ réels strictement positifs ($n\geq 1$) alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

c) En déduire l'inégalité de Minkowski : si $p>1$ est un réel et si $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ sont $2n$ réels strictement positifs ($n>0$) alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

Quelle conséquence topologique a cette inégalité pour $\mathbb{R}^n$?

d) On fixe entier $n\geq 1$ et, pour tout $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et tout réel $\alpha>1$, on pose

$$N_\alpha(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

Montrer que pour tous $\alpha,\beta\in[1,\infty[$ tels que $\alpha\leq\beta$ et tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a

$$n^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} N_\beta(x) \geq N_\alpha(x) \geq N_\beta(x)$$

(Indication. Pour la première inégalité, on pourra utiliser la convexité des fonctions puissances et, pour la deuxième, utiliser une récurrence sur l'entier n.)

Calculer $\lim_{\alpha\longrightarrow+\infty} N_\alpha(x)$.

Exercice 13.— Moyennes. Soient I,J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une bijection bicontinue (i.e. f et f^{-1} sont continues). Soit $\mu = (\underline{x},\underline{\alpha})$ où $\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in I^n$ et $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{+n}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

On appelle moyenne d'ordre f de μ, le nombre réel

$$M_f(\mu) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)\right)$$

Pour $I =]0,+\infty[$, $\alpha_i = 1/n$ pour tout $i = 1,\cdots,n$ et

- $f(x) = 1/x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne harmonique de $x_1,\cdots,x_n$. On la note $M_{-1}(x_1,\cdots,x_n)$.
- $f(x) = x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne arithmétique de $x_1,\cdots,x_n$. On la note $M_1(x_1,\cdots,x_n)$.
- $f(x) = x^2$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne quadratique de $x_1,\cdots,x_n$. On la note $M_2(x_1,\cdots,x_n)$.
- $f(x) = \ln x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne géométrique de $x_1,\cdots,x_n$. On la note $M_{\ln}(x_1,\cdots,x_n)$.

Montrer que, pour tous $x_1,\cdots,x_n \in]0,+\infty[$, on a

$$M_{-1}(x_1,\cdots,x_n) \leq M_{\ln}(x_1,\cdots,x_n) \leq M_1(x_1,\cdots,x_n) \leq M_2(x_1,\cdots,x_n)$$

Exercice 14.— 1/ Soient I un intervalle de la forme $[0,l[$ avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave. Montrer que, pour tous $a,b \in I$ tels $a+b \in I$, on a

$$f(a+b) + f(0) \leq f(a) + f(b)$$

et en déduire que si $f(0) \geq 0$, alors f est sous-linéaire (i.e. $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$ pour tous $a,b \in I$ tels que $a+b \in I$).

2/ Montrer que, pour tous $a_1,\cdots,a_n \in]0,1]$, on a $a_1 + \cdots + a_n + \dfrac{1}{a_1\cdots a_n} \geq \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} + a_1\cdots a_n$.
(Indication. On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.)

Fonctions de la variable réelle convexes

Exercice 15.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Montrer que les deux propositions suivantes

i) f est à la fois convexe et concave,

ii) f est affine,

sont équivalentes.

Exercice 16.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que, si f s'annule en $a,b \in I$, alors f est nulle sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 17.— Soient f et g deux fonctions convexes composables. Montrer que si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

Exercice 18.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante sur un intervalle ouvert I. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$.

Exercice 19.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si I est ouvert, alors f est continue. Ce résultat reste-il vrai si l'on ne suppose plus I ouvert ?

Exercice 20.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Montrer que si f est dérivable alors f est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 21.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f est bornée alors f est constante.

Exercice 22.— Soient $F, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications vérifiant

$$\forall x,y \in [a,b],\ F(y) - F(x) \geq (y-x)f(x)$$

Montrer que f est croissante et que F est convexe.

Exercice 23.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I ouvert. Montrer que, si f admet un minimum local, alors ce minimum est en fait global. Que peut-on dire si la fonction f admet un maximum local ?

Exercice 24.— Soit f une fonction convexe sur l'intervalle borné $]a,b[$. Montrer que f est minorée. La fonction f est-elle nécessairement majorée ?

Exercice 25.— Soit $f :]a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors f est positive.

2) Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction affine est convexe.

3) En déduire que, si la courbe représentative de f admet une asymptote, alors cette courbe est toujours au-dessus de l'asymptote.

Exercice 26.— On considère deux réels $a < b$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ concaves et de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifiant $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$ (α et β étant des réels fixés). Pour $f \in \mathscr{E}$, on note

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt \ \text{ (longueur de la courbe)}$$

On veut montrer que l'application ℓ est croissante, c'est-à-dire que si $f, g \in \mathscr{E}$ sont telles que $f \leq g$ alors $\ell(f) \leq \ell(g)$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $C(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Après avoir justifié que C est de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$C(u) - C(v) \geq C'(v)(u - v)$$

et en déduire que

$$\ell(g) - \ell(f) \geq \int_a^b C'(f'(t))(g'(t) - f'(t))dt$$

b) Montrer que $t \longmapsto C'(f'(t))$ est une fonction décroissante et donc que sa dérivée est négative.

c) Conclure à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 27.— On considère une application convexe f définie sur un intervalle ouvert borné I.

1/ Montrer que, si f_d' ou f_g' est continue en $a \in I$, alors f est dérivable en a.

2/ Montrer qu'une fonction monotone est réglée (i.e. est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier) sur tout segment.

3/ Décrire les points de discontinuité d'une fonction réglée sur un segment.

4/ En déduire que f est partout dérivable sur I sauf éventuellement en un nombre au plus dénombrable de points.

Exercice 28.— 1/ On considère une suite numérique injective $(a_n)_n$ à valeurs dans un intervalle borné I.

a) Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{2^n}$$

est une fonction définie sur I et est convexe.

b) Montrer que f est dérivable en dehors des réels a_n. Qu'en est-il en les a_n ?

2/ Donner un exemple de fonction convexe sur un intervalle I, non dérivable sur une partie dense de I.

Exercice 29.— Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *strictement convexe* (resp. *strictement concave*) si f est convexe (resp. concave) et qu'elle n'est concave (resp. convexe) sur aucun sous-intervalle de I.

1.a. Caractériser la stricte convexité (resp. la stricte concavité) de f en termes de d'inégalité de convexité.

1.b. Caractériser la stricte convexité (resp. la stricte concavité) de f en termes de d'inégalité des pentes.

1.c. Quand f est dérivable, caractériser la stricte convexité (resp. la stricte concavité) de f par sa dérivé.

2. Montrer que, si f est strictement convexe ou strictement concave, et si f est dérivable alors f satisfait la version forte du théorème des accroissements finis suivante :

$$(C) \quad \forall a,b \in I,\ a<b,\ \exists! c \in]a,b[,\ f(b)-f(a) = (b-a)f^{'}(c)$$

3. On s'intéresse ici à la réciproque de la question 2. et l'on suppose que f est une fonction dérivable sur I vérifiant la condition (C).

3.a On fixe $a \in I$ et l'on considère la fonction $T_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Montrer que T se prolonge en une fonction continue sur I.

3.b En raisonnant par l'absurde, montrer que T_a est une fonction injective. En déduire que T_a est strictement monotone.

3.c En déduire finalement que f est strictement convexe ou strictement concave.
(Ind. Pour montrer que T_a et T_b ont même sens de monotonie, on pourra considérer T_α où $\alpha \in]a,b[$ vérifie $f^{'}(\alpha) = T_a(b) = T_b(a)$.)

Exercice 30.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31.— On souhaite montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n(x) = \left(\dfrac{x-\sin x}{x}\right)^n$ est convexe sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

a) Montrer que f_1 est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement définit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Préciser les valeurs $f_1(0), f_1^{'}(0)$ et $f_1^{''}(0)$.

b) Montrer que f_1 est convexe sur $[0, \pi/2]$.
(Indication. Pour $x \in]0, \pi/2]$ on pourra poser $\varphi(x) = x^3 f_1^{''}(x)$ et étudier les variations de la fonction φ pour déterminer son signe.)

c) En déduire que f_n est convexe sur $[-\pi/2, \pi/2]$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 32.— Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que si $x<y<z$ sont trois éléments de I, alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix}$$

est positif.

Exercice 33.— On considère deux fonctions $f, \theta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que

(h_1) f est majorée.

(h_2) $\theta^{'}$ est bornée.

(h_3) Il existe une constante $c>0$ et un réel $x_0 \geq 0$ tels que, pour tout $x \geq x_0$, $\theta^{'}(x)^2 - \theta^{''}(x) \geq c$.

(h_4) Pour tout $x \geq 0$, $f^{''}(x) \geq (\theta^{'}(x)^2 - \theta^{''}(x)) f(x) \geq 0$.

a) Pour $\theta(x) = x$, donner un exemple d'une telle fonction f non nulle. Pour une application θ de classe $\mathscr{C}^2$ quelconque, trouver un exemple de fonction non nulle f vérifiant l'hypothèse (h_4). Quelles sont les applications polynomiales θ qui vérifient les hypothèses $(h_{2,3})$? Donner un exemple d'application θ vérifiant les hypothèses $(h_{2,3})$ et qui ne soit pas polynomiale.

b) Montrer que f est convexe.

c) En déduire que f est décroissante.
(Indication. En utilisant la caractérisation de la convexité en termes de tangente sous la courbe, on pourra montrer par l'absurde que $f^{'}(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.)

d) Déduire de ce qui précède que les fonctions f et $f^{'}$ admettent toutes les deux des limites finies en $+\infty$. Comment se positionnent ces limites par rapport à 0 ?

e) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f^{'}(x) = 0$.
(Indications. Pour la limite de $f^{'}$, on pourra à appliquer à f l'égalité des accroissements finis sur un segment variable $[x, x+1]$. On procédera de même avec $f^{'}$ pour la limite de f.)

f) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$h(x) = (f^{'}(x) + \theta^{'}(x)f(x))e^{-\theta(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x)e^{\theta(x)}$$

Etudier les variations de h et son signe. En déduire les variations de g.

g) Montrer finalement que, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \leq f(0)e^{\theta(0)-\theta(x)}$.

Exercice 34.— Log-convexité. Une fonction $f : I \longrightarrow]0,+\infty[$ est dite *log-convexe* si la fonction $x \longmapsto \ln(f(x))$ est convexe.

1/ Soit $f : I \longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction. Montrer que les propositions suivantes

i) f est log-convexe,

ii) pour tout réel $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto f(x)^{\alpha}$ est convexe,

iii) il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout réel $\alpha \in [0, \alpha_0]$, la fonction $x \longmapsto f(x)^{\alpha}$ est convexe,

sont équivalentes.
Indication. Pour montrer iii) $\Rightarrow$ i) l'on pourra regarder α comme une variable.

2/ Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. Que penser de la réciproque ?

3/ Montrer qu'une fonction f est log-convexe si et seulement si pour tout réel $c > 0$, la fonction $x \longmapsto c^x f(x)$ est convexe.
Indication. Pour montrer la réciproque, à une paire $x, y \in I$ de réels distincts, appliquer l'inégalité de convexité pour x et y à la fonction $x \longmapsto c^x f(x)$ en choisissant $c = \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$.

4/ Montrer que la somme et le produit laissent stable l'ensemble des fonctions log-convexes.

5/ Caractériser la log-convexité d'une fonction f deux fois dérivable grâce aux fonctions $f, f^{'}$ et $f^{''}$.

Exercice 35.— (Extrait ISFA 2006)

Partie A

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions φ définies sur $I =]-1,+\infty[$, convexes et telles que pour tout $x \in I$:

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln(x+1)$$

a. Montrer l'égalité $\varphi(x) = \varphi(x+n) - \ln[(x+1)\cdots(x+n)]$ pour n entier strictement positif.

b. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\ln(x) = \varphi(x) - \varphi(x-1) \leq \varphi_g^{'}(x) \leq \varphi_d^{'}(x) \leq \varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x+1)$$

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi_d^{'}(x) - \varphi_g^{'}(x))$.

d. Prouver finalement que la fonction φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

Partie B

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n>0}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $(u_n)_{n>0}$ est convergente. On note

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

la suite des sommes partielles et $S(x)$ la somme de la série.

2. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x > -1$, on a

$$S_n(x) = \ln(n!) + x\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k)$$

En déduire que les fonctions S_n sont convexes puis que la fonction S l'est aussi.

3. Montrer que $S \in \mathscr{F}$.

4. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a $\lim\limits_{n} S(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!) = 0$.

5. Réciproque I : soit f une fonction définie sur $]-1,+\infty[$ telle que :

- $f(x+1) = f(x) + \ln(x+1)$.
- $\lim\limits_{n} f(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!) = 0$.

Montrer que $f = S$.
(Indication. On pourra exprimer $f(x+n)$ en fonction de $f(x)$.)

6. Réciproque II : soit $f \in \mathscr{F}$ vérifiant $f(0) = 0$. On considère la fonction $d = f - S$.

a. Montrer que d est une fonction 1-périodique.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $x \in [n, n+1]$, on a

- $f^{'}(n) \leq f^{'}(x) \leq f^{'}(n+1) = f^{'}(n) + \dfrac{1}{n+1}$.
- $S^{'}(n) \leq S^{'}(x) \leq S^{'}(n+1) = S^{'}(n) + \dfrac{1}{n+1}$.
- $d^{'}(n) - \dfrac{1}{n+1} \leq d^{'}(x) \leq d^{'}(n) + \dfrac{1}{n+1}$.

c. En déduire que d est identiquement nulle et donc que $f = S$.

7. Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.

a. Montrer que H est définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

b. Montrer que la fonction $\ln(H(x))$ satisfait aux conditions de la question 6.
(Indication. On pourra remarquer que la $x \mapsto t^x$ est convexe sur $]-1,+\infty[$.)

c. En déduire le comportement asymptotique de la fonction H au voisinage de $+\infty$.

Exercice 36.— Étudier la convexité puis la log-convexité de f sur tout intervalle maximal où cela est possible de

a) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ (resp. $\mathrm{sh}(x)$).

b) $f(x) = \dfrac{1}{|\ln x|}$.

c) $f(x) = 1 + x^n$ avec $n \geq 0$ entier.

Exercice 37.— Caractérisation de Bohr-Mollerup de la fonction Γ (1922). On veut montrer qu'il existe une et une seule fonction $\Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(1) = 1$.

(ii) Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(iii) Γ est une fonction log-convexe.

A] On suppose qu'une telle fonction Γ existe.

a) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) Pour un entier $n \geq 0$ donné et un réel $x > 0$, exprimer $\Gamma(x+n)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

c) On fixe désormais un réel $x \in]0,1]$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\ln\Gamma(n) - \ln\Gamma(n-1) \leq \frac{\ln\Gamma(n+x) - \ln\Gamma(n)}{x} \leq \ln\Gamma(n+1) - \ln\Gamma(n)$$

d) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\frac{n}{x+n}\Gamma(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq \Gamma(x)$$

et, par suite, que pour tout $x \in]0,1]$ on a $\Gamma(x) = \lim\limits_{n} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

e) Prouver finalement que Γ est bien unique.

B] En considérant la fonction

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

montrer que Γ existe bien.
(Ind. pour la log-convexité de Γ, on pourra utiliser l'exercice 34 ou 35).

Exercice 38.— Soit $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ une fonction convexe, bijective et croissante. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par : $a \leq u_0 \leq v_0 \leq b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right)$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Exercice 39.— Soit $f : [N,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, dérivable et croissante.

a) Montrer que, pour tout $x \geq N+1$, $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.

b) Pour tout entier $n \geq N$, on pose

$$\begin{aligned} u_n &= f'(N) + f'(N+1) + \cdots + f'(n) - f(n) \\ v_n &= f'(N) + f'(N+1) + \cdots + f'(n) - f(n+1) \end{aligned}$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ existe et que cette limite est nulle si et seulement si $\lim\limits_{n} u_n = \lim\limits_{n} v_n$.

c) (Application) Calculer $\lim\limits_{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\right)$ et $\lim\limits_{n}\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln k} - \ln\ln n\right)$ à 10^{-2} près.

Exercice 40.— Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Montrer que, soit f est monotone, soit il existe $a \in I$ tel que f soit décroissante à gauche de a et croissante à droite.

Exercice 41.— Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que

$$x \longmapsto f(1/x) \text{ est convexe } \Longleftrightarrow x \longmapsto xf(x) \text{ est convexe}$$

Exercice 42.— (Théorème de Gauss-Lucas) On considère un polynôme complexe non constant $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ et l'on note $Z(P) = \{z_1, \cdots, z_p\}$ l'ensemble de ses racines distinctes et, pour $k = 1, \cdots, p$, on note α_k la multiplicité de la racine z_k.

Montrer que, si r désigne une racine du polynôme $P^{'}$ qui n'est pas racine de P, alors

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{(r - z_i)}{|r - z_i|^2} = 0$$

(On pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $P^{'}/P$). En déduire que l'ensemble $Z(P^{'})$ est inclus dans l'enveloppe convexe de $Z(P)$.