# Un corps neutralisant exotique

Il s'agit ici de donner un exemple explicite d'un corps neutralisant d'une algèbre simple centrale qui n'est extension d'aucun corps neutralisant provenant du corps gauche associé à la classe de cette algèbre. Donnons-nous un corps commutatif $k$ et un élément de son groupe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$. Nous regardons $\alpha$ comme un ensemble de classes d'isomorphisme d'algèbres simples centrales. L'élément $\alpha$ ne contient qu'une seule classe composée de corps, dont nous noterons un représentant $K_\alpha$ (les éléments des autres classes étant alors les algèbres isomorphes à $\mathscr{M}_n(K_\alpha)$ avec $n \geq 2$).

Un résultat classique de la théorie montre que les extensions neutralisantes (finies) $L/k$ de $\alpha$ correspondent à des sous-algèbres commutatives maximales des algèbres constituant les classes de $\alpha$. Une conséquence de ce résultat est que si $r = \mathrm{Ind}(\alpha) = \sqrt{[K_\alpha : k]}$ désigne l'indice de $\alpha$ alors le degré d'une extension neutralisante est un multiple de l'entier $r$. Réciproquement, si $L$ neutralise $\alpha$ et que $[L : k] = nr$, alors $L$ se plonge dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K_\alpha)$ (et c'est alors une sous-algèbre commutative maximale de cette dernière). Il n'y a pas de raison pour qu'il existe *a priori* des corps neutralisants, sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{M}_n(K_\alpha)$, sauf bien sur pour $n = 1$. Ceci montre que le degré minimal $\mathrm{Ind}(\alpha)$ pour un corps neutralisant de $\alpha$ est bien atteint, et que ces corps sont exactement (à isomorphisme près) les sous-corps commutatifs maximaux de $K_\alpha$. Ces corps bénéficient donc d'une forme de préséance, au moins du point de vue de l'existence.

Étant donné un corps neutralisant $L$ de $\alpha$, on peut se demander si $L$ est obligatoirement extension d'un corps $L_0 \subset K_\alpha$ neutralisant de $\alpha$ ? Autrement dit si, dans le treillis supérieur des extensions algébriques finies neutralisantes de $\alpha$, les plus petits éléments correspondent exactement aux corps neutralisant inclus dans $K_\alpha$ ? L'objet de cette note est de construire un exemple qui montre que la réponse à cette question est négative.

On se donne un rationnel $l \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^2$ qui n'est pas un carré et un rationnel $f \in \mathbb{Q} - N\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{l}\right)\right)$ qui n'est pas la norme d'un élément. On note $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{l}\right)/\mathbb{Q}\right) = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$ et l'on considère alors le 2-cocycle, noté encore $f$, et défini par

$$f(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) = f(\mathrm{Id}, \sigma) = f(\sigma, \mathrm{Id}) = 1 \text{ et } f(\sigma, \sigma) = f$$

(ce cocycle n'est pas un cobord à cause de l'hypothèse $f \notin N\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{l}\right)\right)$).

L'algèbre $D = \mathscr{A}\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{l}\right)/\mathbb{Q}, f\right)$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ muni du produit croisé relatif à $f$ est alors un corps. En effet, $D$ est isomorphe à une algèbre de matrices, $\mathscr{M}_n(K)$, sur un corps $K$. Sa dimension vérifie donc $\dim_{\mathbb{Q}}(D) = 4 = n^2[K : \mathbb{Q}]$ ce qui implique que $n \leq 2$. Si $n = 2$, alors $K = \mathbb{Q}$ et donc $[D]$ est la classe triviale dans $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$. Ceci est exclu puisque $f$ n'est pas un cobord. On a donc $n = 1$ et $D = K$.

On rapporte $D$ à une $\mathbb{Q}\left(\sqrt{l}\right)$-base formelle $\{1, \omega\}$, de sorte que, si $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{l})$, on ait dans $D$

$$(x + y\omega)(\alpha + \beta\omega) = (x\alpha + fy\beta^\sigma) + (x\beta + y\alpha^\sigma)\omega$$

**Lemme 1.—** *Soient $x_0, \alpha_0, a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, on considère* $\begin{cases} x = x_0\sqrt{l}, \ y = a + b\sqrt{l} \\ \alpha = \alpha_0\sqrt{l}, \ \beta = c + d\sqrt{l} \end{cases} \in \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ *et* $\begin{cases} X = x + y\omega \\ d = \alpha + \beta\omega \end{cases} \in D$*. Si $2x\alpha + f(y\beta^\sigma + y^\sigma\beta) = 1$ et $\alpha^2 + f\beta\beta^\sigma \neq 0$, alors l'élément $p = \dfrac{x^2 + fyy^\sigma}{\alpha^2 + f\beta\beta^\sigma}$ est un rationnel et l'on a le système suivant* $\begin{cases} X^2 = pd^2 \\ Xd + dX = 1 \end{cases}$

**Preuve :** La rationalité de $p$ est évidente. Le reste est un simple calcul :

$$\begin{aligned} pd^2 &= p(\alpha^2 + f\beta\beta^\sigma) + p\beta(\alpha + \alpha^\sigma)\omega = p(\alpha^2 + f\beta\beta^\sigma) = (x^2 + fyy^\sigma) \\ &= (x^2 + fyy^\sigma) + y(x + x^\sigma)\omega = X^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Xd + dX &= (x\alpha + fy\beta^\sigma) + (x\beta + y\alpha^\sigma)\omega + (\alpha x + f\beta y^\sigma) + (\alpha y + \beta x^\sigma)\omega \\ &= [2x\alpha + f(y\beta^\sigma + y^\sigma\beta)] + [\beta(x + x^\sigma) + y(\alpha + \alpha^\sigma)]\omega = 1 \end{aligned}$$

□

Dans l'algèbre $\mathscr{M}_2(D)$ on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X^{-1} - X^{-1}dX & -X^{-1}d^2 \\ X & d \end{pmatrix}$$

où $X, d \in D$ sont des éléments vérifiant les hypothèses du lemme 1. En calculant les puissances de $M$, on trouve notamment $pM^4 = -I$. Si $-p$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$, alors le polynôme $pT^4 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ est irréductible et comme $M$ annule ce polynôme, on en déduit que la matrice $M$ engendre dans $\mathscr{M}_2(D)$ un corps isomorphe à $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-p})$. Par ailleurs, on a $[\mathscr{M}_2(D) : \mathbb{Q}] = 16 = 4^2 = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-p})/\mathbb{Q}]^2$, et donc $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-p})$, en tant que sous-algèbre commutative maximale, neutralise l'algèbre $\mathscr{M}_2(D)$ (et donc l'élément $[D] \in \mathrm{Br}(\mathbb{Q})$). Pour construire notre contre-exemple, nous allons maintenant étudier les carrés de $D$.

**Lemme 2.—** *Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$. Pour que $\lambda$ soit le carré d'un élément de $D$ il faut et il suffit que $\lambda \in \mathbb{Q}^2$ ou que $\lambda$ soit représenté par la forme quadratique rationnelle $fu^2 - flv^2 + lw^2$.*

**Preuve :** L'équation $\lambda = (x + y\omega)^2$ équivaut au système $\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 + fyy^\sigma &=& \lambda \\ y(x + x^\sigma) &=& 0 \end{array} \right.$

- Si $y = 0$ alors $\lambda = x^2 = (u + v\sqrt{l})^2 = u^2 + lv^2 + 2uv\sqrt{l}$ et donc soit $\lambda \in \mathbb{Q}^2$ soit $\lambda \in l\mathbb{Q}^2$.
- Si $x + x^\sigma = 0$, alors $x = w\sqrt{l}$ et, en posant $y = u + v\sqrt{l}$, on a alors $\lambda = fu^2 - flv^2 + lw^2$.

□

Plaçons-nous désormais dans le cas où $f = l = -1$, $D$ est alors le corps des quaternions sur $\mathbb{Q}$. Les extensions neutralisantes $L_0/\mathbb{Q}$ de $D$ incluses dans $D$ sont, pour des raisons de dimension, des extensions quadratiques. Le lemme 2 permet d'affirmer que ces extensions neutralisantes sont exactement les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\lambda})$ où $\lambda = -u^2 - v^2 - w^2$ avec $u, v, w \in \mathbb{Q}$ non tous nuls. Avec les notations du lemme 1, considérons alors $\left\{ \begin{array}{l} x = -i \\ \alpha = 7i/2 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 + i \\ \beta = 1 + 2i \end{array} \right.$. Les conditions $2x\alpha + f(y\beta^\sigma + y^\sigma\beta) = 1$ et $\alpha^2 + f\beta\beta^\sigma \neq 0$ sont satisfaites et l'on a alors $p = 4/23$. D'après ce qui précède, le corps $\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{-23/4}\right)$ neutralise $D$. Si ce corps était extension d'un corps neutralisant inclus dans $D$, ce dernier serait obligatoirement isomorphe à $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-23}\right)$ (seul corps intermédiaire de l'extension) et donc 23 serait une somme de trois carrés de rationnels, d'après ce qui précède. Mais $23 \equiv 7 \bmod(8)$ et le théorème de Gauss-Davenport-Cassels (cf [Des]) assure qu'une telle chose est en fait impossible.

**Scholie :** La stratégie suivie a donc consisté en la recherche d'éléments $x, y, \alpha, \beta$ tels que $p$ soit de la forme $p = s^2 t$ où $s \in \mathbb{Q}$ et $t \in \mathbb{N}$ n'est pas somme de trois carrés dans $\mathbb{Q}$ (ce qui équivaut à dire que $t$ est de la forme $4^h(8k + 7)$). Un petit calcul informatique donne d'autres valeurs pour $x, y, \alpha, \beta$ que celles données dans cette note. On trouve, par exemple, des corps exotiques pour le choix de $p = \frac{396}{229}, \frac{12}{173}, \frac{396}{589}, \frac{44}{245}, \frac{76}{45}, \frac{44}{141}, \frac{44}{413}$.

# Bibliographie


**[Bla]** André Blanchard, *Les corps non commutatifs*, P.U.F., collection SUP (1972).

**[Bou]** Nicolas Bourbaki, *Algèbre chapitre VIII*, Hermann, Paris (1958).

**[Des]** Roger Descombes, *Éléments de théorie des nombres*, P.U.F., Mathématiques (1986).