Exercices de topologie

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Licence 2 — 2016/2017
Bruno Deschamps
Version 1.1

Distances

Exercice 1.— 1/ Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$d(x, y) = \left| |x|^\alpha - |y|^\alpha \right|$$

est une distance sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.— Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\delta(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas équivalente à la distance usuelle.

Exercice 3.— *Somme de distances.* Soient $d_1, \cdots, d_n$ des distances sur un ensemble X et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels positifs non tous nuls. Pour $x, y \in X$, on pose

$$d(x,y) = \lambda_1 d_1(x,y) + \cdots + \lambda_1 d_n(x,y)$$

Montrer que d est une distance sur X.

Exercice 4.— Soit (E,d) un espace métrique. Pour tous $x, y \in E$, on pose

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\ e(x,y) &= \min(1, d(x,y)) \end{aligned}$$

a) Montrer que f et e sont des distances sur E et qu'elles sont équivalentes.

b) Montrer que f et e sont équivalentes à d si et seulement si E est borné pour d.

Exercice 5.— *Distance discrète.* Sur un ensemble $E \neq \emptyset$, on définit, pour tout $x, y \in E$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur E.

Exercice 6.— Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application croissante qui vérifie que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x, y \geq 0$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

a) Montrer que, s'il existe $s > 0$ tel que $f(s) = 0$, alors f est identiquement nulle.

b) On suppose que f ne soit pas identiquement nulle et l'on considère un espace métrique (E,d). Montrer que l'application $(x,y) \longmapsto f(d(x,y))$ est une distance sur E.

c) Montrer que les applications f suivantes vérifient la condition de l'énoncé : $\bullet 0 \longmapsto 0$ et $t \longmapsto 1$ pour $t > 0$, $\bullet t \longmapsto t^\alpha$ ($\alpha \in]0,1[$), $\bullet t \longmapsto \min(1,t)$, $\bullet t \longmapsto \frac{t}{1+t}$.

Exercice 7.— On considère l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ des entiers non nuls et l'application

$$\begin{array}{cccc} d: & \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (n,m) & \longmapsto & \left| \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \right| \end{array}$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Z}^*$.

Exercice 8.— *Distance p-adique.* Pour un nombre premier p et un entier $n \in \mathbb{Z}$ non nul, on appelle *valuation p-adique* de l'entier n, l'exposant $v_p(n)$ de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. On convient que $v_p(0) = +\infty$. Sur $E = \mathbb{Z}$, on définit alors la *distance p-adique* entre deux entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ par

$$d_p(n,m) = e^{-v_p(n-m)}$$

(avec la convention $e^{-\infty} = 0$).

a) Montrer que d_p est une distance sur $\mathbb{Z}$.

b) Généraliser la définition de d_p à $\mathbb{Q}$.

c) Montrer que $\lim_n d_p(p^n, 0) = 0$, en déduire que si p et q sont deux nombres premiers distincts alors d_p et d_q ne sont pas des distances équivalentes.

Exercice 9.— Soient E un ensemble non vide et $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E. Pour $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ deux éléments de $E^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\omega(u,v) = \inf\{n \in \mathbb{N} / \ u_n \neq v_n\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

et l'on définit alors

$$d(u,v) = \frac{1}{1+\omega(u,v)}$$

avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$. Montrer que d est une distance sur $E^{\mathbb{N}}$.

Exercice 10.— Soient (E,d) un espace métrique, F un ensemble et $\varphi : E \longrightarrow F$ une bijection.

a) Montrer que $d_\varphi : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d_\varphi(x,y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ est une distance sur F.

b) Montrer que φ est une isométrie de (E,d) sur (F,d_φ).

Exercice 11.— Soient (E,d) un espace métrique, A,B deux sous-ensembles de E et $x \in E$.

a) Montrer que $x \in A \Longrightarrow d(x,A) = 0$. La réciproque est-elle vraie?

b) Prouver que $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow d(A,B) = 0$. La réciproque est-elle vraie?

c) Prouver que

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$$

En déduire qu'une réunion finie de partie bornées est bornée.

Exercice 12.— On considère un ensemble fini non vide E et d une distance sur E.

a) Montrer que la partie $\Omega = \{d(x,y) / \ x,y \in E, \ x \neq y\}$ possède un plus petit et un plus grand élément, tout deux dans $]0,+\infty[$.

b) En déduire que d est équivalente à la distance discrête.

Espaces vectoriels normés

Exercice 13.— Montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, que $(\mathbb{C}, |.|)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et que c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Exercice 14.— *Norme N_α sur $\mathbb{K}^n$.* On se fixe un entier $n \geq 1$ et l'on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$.

1/ (Norme infinie) Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose

$$N_\infty(x) = \sup_{i=1,\cdots,n} (|x_i|)$$

Montrer que $(E, N_\infty(x))$ est un espace vectoriel normé.

2/ (Inégalités de Hölder et de Minkowski, normes N_α) On considère $p,q \in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que la fonction log est concave.

b) En déduire que pour tout $u,v \in \mathbb{R}^+$ on a

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

c) Soient $u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n \in \mathbb{C}$. En considérant les quantités $\dfrac{|u_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p}}$ et $\dfrac{|v_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}}$ pour $k=1,\cdots,n$ et en appliquant le 2/, montrer que

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}$$

(Inégalité d'Hölder)

Quel est le nom de cette inégalité quand $p=q=2$?

d) En déduire que si $u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n \in \mathbb{C}$ alors

$$\left(\sum_{i=1}^n |u_i+v_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{1/p}$$

(Inégalité de Minkowski)

(Ind. On pourra remarquer que pour tout $k=1,\cdots,n$ on a $|u_k+v_k|^p \leq |u_k|.|u_k+v_k|^{p-1}+|v_k|.|u_k+v_k|^{p-1}$. On sommera alors ces inégalités et on utilisera l'inégalité d'Hölder pour $q=\frac{p}{p-1}$.)

e) Soient $E=\mathbb{K}^n$ et $\alpha \in [1,+\infty[$. Montrer que si, pour tout $x=(x_1,\cdots,x_n) \in E$, on pose

$$N_\alpha(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

alors (E,N_α) est un espace vectoriel normé.

f) Montrer que pour tout $\alpha,\beta \in [1,\infty[$ tel que $\alpha \leq \beta$ et tout $x \in E$, on a

$$n^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} N_\beta(x) \geq N_\alpha(x) \geq N_\beta(x)$$

(Ind. Pour la première inégalité, on pourra utiliser la convexité des fonctions puissances et, pour la deuxième, utiliser une récurrence sur l'entier n.)

Prouver finalement que les normes N_α ($\alpha \in [1,+\infty[$) sont toutes équivalentes à la norme N_∞.

g) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

Exercice 15.— *Espaces l^α.* Pour $\alpha \in [1,+\infty[$, on considère l'ensemble $l^\alpha(\mathbb{K})$ constitué des suites $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum\limits_n |x_n|^\alpha$ converge. De même, on note $l^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}$.

a) Montrer $l^\infty(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $N_\infty((x_n)_n) = \sup\limits_n |x_n|$ est une norme sur $l^\infty(\mathbb{K})$.

b) En utilisant les exemples précédents, montrer que $N_\alpha((x_n)_n) = \left(\sum\limits_n |x_n|^\alpha\right)^{1/\alpha}$ est une norme sur $l^\alpha(\mathbb{K})$.

c) Soient $\alpha \leq \beta$, montrer que $l^\alpha(\mathbb{K}) \subset l^\beta(\mathbb{K}) \subset l^\infty(\mathbb{K})$.

Exercice 16.— *Espaces L^α.* Soient a et b deux réels tels que $a<b$. On pose $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues. Pour tout $\alpha \in [1,+\infty[$ et

tout $f \in E$, on pose pour

$$N_\alpha(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

On pose de même:

$$N_\infty(x) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

a) Montrer que N_∞ est une norme sur E.

b) En utilisant les sommes de Riemann et l'exemple précédent, montrer que N_α est une norme sur E.

c) Prouver que, pour tout $f \in E$, $\lim_{\alpha\longrightarrow+\infty} N_\alpha(f) = N_\infty(f)$.

Exercice 17.— Soient (E_i, N_i), $i = 1, \cdots, n$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $\alpha \in [1, +\infty[$. Sur le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ (qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), on définit l'application $\overline{N}_\alpha$ de E dans $\mathbb{R}^+$ de la manière suivantes : pour tout $x = (x_1, \cdots x_n) \in E_1 \times \cdots, E_n$, on pose:

$$\overline{N}_\alpha(x) = (N_1(x_1)^\alpha + \cdots + N_n(x_n)^\alpha)^{1/\alpha}$$

de même on pose

$$\overline{N}_\infty(x) = \sup(N_1(x_1), \cdots, N_n(x_n))$$

a) Dans le cas particulier où $E_i = \mathbb{K}$ et $N_i = |.|$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, décrire les $\overline{N}_\alpha$ pour tout $\alpha \in [1, +\infty]$.

b) Montrer que $\overline{N}_\alpha$ est une norme sur E pour tout $\alpha \in [1, +\infty]$.

c) Prouver que les $\overline{N}_\alpha$ sont équivalentes à la norme $\overline{N}_\infty$.

On appelle produit des espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)_i$, l'espace vectoriel $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ normé par l'une des normes $\overline{N}_\alpha$ précédemment définies. Quelles sont les normes $\overline{N}_\alpha$ lorsque $(E_i, N_i) = (\mathbb{K}, |.|)$ pour tout i?

Exercice 18.— Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-e.v.n et F un $\mathbb{K}$.e.v. Supposons que E et F soient isomorphes et considérons $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Pour tout $x \in F$, on pose:

$$\|x\| = N(\varphi^{-1}(x))$$

Montrer que la fonction $\|.\|$ est alors une norme sur F.

Etant donnés (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on appelle *isométrie* de E_1 sur E_2 toute isomorphisme d'espace vectoriel $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifiant

$$\forall x \in E_1,\ N_2(\varphi(x)) = N_1(x)$$

Montrer qu'une isométrie d'e.v.n. est aussi une isométrie d'espaces métriques.

Exercice 19.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a) Montrer que, si N est une norme sur E de distance associée d, alors on a :

1/ $\forall (x, y, t) \in E^3$, $d(x + t, y + t) = d(x, y)$

2/ $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

b) Réciproquement, montrer que si d une distance sur E qui vérifie les conditions 1/ et 2/, alors l'application $\|x\| = d(x, 0)$ est une norme sur E et que la métrique associée à $\|.\|$ est égale à d.

Exercice 20.— On considère $(E,\|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'on pose

$$\mu(E)=\sup_{x,y\in E-\{0\}}\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}$$

a) En considérant des valeurs particulières du couple $(x,y)\in E^2$ montrer que $1\leq\mu(E)$.

b) Montrer que pour tout $x,y\in E$ on a

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\leq 2\|x\|^2+2\|y\|^2+4\|x\|.\|y\|$$

et en déduire que $\mu(E)\leq 2$.

c) On considère $E=\mathbb{R}^2$ et $\|.\|=\|.\|_2$ la norme euclidienne (i.e. si $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$, $\|(x_1,x_2)\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$). Calculer $\mu(\mathbb{R}^2)$.

d) On considère $E=\mathbb{R}^2$ et $\|.\|=\|.\|_\infty$ la norme infinie (i.e. si $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$, $\|(x_1,x_2)\|_\infty=\max(|x_1|,|x_2|)$). Calculer $\mu(\mathbb{R}^2)$.

Suites, valeurs d'adhérence

Exercice 21.— Donner un exemple de suite numérique qui ne converge pas mais qui possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 22.— Soit $(u_n)_n$ une suite numérique bornée et $(a_n)_n$ une suite de valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ converge vers un réel a, alors a est aussi valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 23.— 1) Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Pour tout $n\geq 0$, on pose

$$a_n=\inf\{u_k/\ k\geq n\}$$
$$b_n=\inf\{u_k/\ k\geq n\}$$

a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est croissante et que la suite $(b_n)_n$ est décroissante. En déduire que ces deux suites convergent et que $\lim_n a_n\leq\lim_n b_n$. On appelle limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $(u_n)_n$ la limite $\lim_n a_n$ (resp. $\lim_n b_n$) et on la note $\liminf_n u_n$ (resp. $\limsup_n u_n$).

b) Montrer que $\liminf_n u_n$ et $\limsup_n u_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ et que si α désigne une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ alors $\liminf_n u_n\leq\alpha\leq\limsup_n u_n$.

c) Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $\liminf_n u_n=\limsup_n u_n$.

2) Déterminer $\liminf_n u_n$ et $\limsup_n u_n$ pour le suites $(u_n)_n$ définies par :

a) Pour tout $n\geq 0$, $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n+1}$.

b) Pour tout $n\geq 0$, $v_n=\begin{cases}(1+(1+(-1)^p)/p)^p & \text{si } n=2p\\ (1+1/p)^p & \text{si } n=2p+1\end{cases}$.

Exercice 24.— Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(a^n)_n$ pour $a\in\mathbb{C}$.

Exercice 25.— On considère une suite $(u_n)_n$ dans un espace métrique telle que les sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 26.— Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que $\lim_n u_{n+1}-u_n=0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est un intervalle.

Exercice 27.— On considère une suite de réels positifs $(x_n)_n$ vérifiant que, pour tout $n, p \geq 0$, on a

$$(n+p)x_{n+p} \leq nx_n + px_p$$

et l'on pose $l = \inf_n x_n$.

a) Montrer que, pour tout $k, n \geq 0$, on a $x_{kn} \leq x_n$. En déduire que la suite $(x_n)_n$ possède des valeurs d'adhérence et que l est l'une d'elle.

b) Montrer que $\lim_n x_n = l$.

(Ind. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on prendra un entier $N > 0$ tel que $x_N - l < \varepsilon/2$ et pour tout $p \geq 0$, on écrira $N + p = kN + a$ avec $a \in \{0, \cdots, N-1\}$.)

Exercice 28.— On munit $E = \mathbb{R}[X]$ des normes données, pour $P \in E$, par les relations

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \text{ et } \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$$

(on vérifiera qu'il s'agit bien ici de normes sur E) et l'on considère la suite $(X^n)_n$.

a) Vérifier que la suite $(X^n)_n$ est bornée pour $\|.\|_\infty$ et converge vers 0 pour $\|.\|_1$.

b) Les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont-elles équivalentes ?

c) Montrer que, bien que bornée, la suite $(X^n)_n$ ne possède pas de valeur d'adhérence pour $\|.\|_\infty$.

Topologie

Exercice 29.— Reprendre les exemples d'espaces métriques précédemment rencontrés et décrire les boules ouvertes et fermés de ces derniers.

Exercices 30.— 1/ Toute boule ouverte est ouverte. Toute boule fermé et toute sphères est fermée.

2/ Tout point est fermé. Donc toute partie finie est fermée.

3/ Tout ouvert est une réunion de boules ouvertes.

4/ On considère $E = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1/2\} \cup \{i\} \subset \mathbb{C}$ et $d(x, y) = |x - y|$. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1/2\}$ et $\{i\}$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

5/ Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert et un exemple d'une réunion de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 31.— Montrer que dans un espace métrique E, pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, on a $\delta(B(x, r)) \leq 2r$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

Exercice 32.— Donner l'exemple d'une boule ouverte dans un espace métrique dont l'adhérence est différente de la boule fermée associée.

Exercice 33.— Soit A une partie d'un espace métrique E. Que décrit l'ensemble des $x \in E$ tel que $d(x, A) = 0$?

Exercice 34.— Soit A une partie d'un espace métrique E. Montrer que :

a) $C_E \overline{A} = \overset{\circ}{C_E A}$.

b) $C_E \overset{\circ}{A} = \overline{C_E A}$.

c) $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

d) $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

e) Trouver un exemple de partie $X \subset \mathbb{R}$ (ici $\mathbb{R}$ est normé par $|.|$) telle que les sept ensembles $X, \overline{X}, \overset{\circ}{X}, \overline{\overset{\circ}{X}}, \overset{\circ}{\overline{X}}, \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{X}}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}$ soient distincts deux à deux.

f) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A}$.

g) $\mathrm{Ext} = C_E \overline{A} = \overset{\circ}{C_E} A$.

h) $\overset{\circ}{\mathrm{Ext}}(A) = \mathrm{Ext}(A)$.

Exercice 35.— Soient A et B deux parties d'un espace métrique E.

• Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (donner un exemple ou l'inclusion est stricte).

• Montrer que $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$ (donner un exemple ou l'inclusion est stricte).

Exercice 36.— On considère un espace métrique E et deux parties $A, B \subset E$ vérifiant que

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Montrer que si $A \cup B$ est fermé, alors A et B sont aussi fermés.

Exercice 37.— Soit A une partie d'un espace métrique E.

a) Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$. Que penser de Fr(Fr($A$) et de Ext(Ext($A$))?

b) Montrer que $\overset{\circ}{A}$, Fr(A) et Ext(A) forment une partition de E.

Exercice 38.— Soit A une partie d'un espace métrique E. On dit qu'un point $x \in A$ est isolé (de A) s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$. On dit qu'un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A si pour tout voisinage V de x, $V \cap A$ contient au moins deux points.

a) Montrer que si x est un point d'accumulation de A alors pour tout voisinage V de x, $V \cap A$ est un ensemble infini.

b) Montrer que $\overline{A}$ est égal à la réunion des points d'accumulations de A et des points isolés de A.

c) Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On note $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, U' l'ensemble des points d'accumulations de U. Montrer que $U' \subset A \subset \overline{U}$ et donner un exemple de suite pour lequel les inclusions sont strictes.

Exercice 39.— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite dense pour l'ordre si pour tout $x < y$ dans $\mathbb{R}$ il existe $z \in A$ tel que $x < z < y$.

a) Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est dense pour l'ordre.

b) En déduire que les parties $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 40.— On considère sur un ensemble non vide X la distance discrète. Quelles sont les parties ouvertes de X ? fermées ? Quelle est l'adhérence d'un sous-ensemble A de X ? l'intérieur? Quels sont les voisinages d'un point de X ?

Exercice 41.— Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rcll} d(x,y) & = & 0 & \text{si } x = y \\ & = & |x| + |y| & \text{sinon} \end{array}$$

1) Montrer que l'application d ainsi définie eſt une diſtance sur $\mathbb{R}$.

2) On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, et l'on note $B(x,\varepsilon)$ (resp. $B_f(x,\varepsilon)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la diſtance d. Décrire explicitement les ensembles $B(x,\varepsilon)$ et $B_f(x,\varepsilon)$.
(On diſtinguera le cas $x = 0$ du cas $x \neq 0$ et dans ce dernier cas, l'on diſtinguera suivant la position de $|x|$ par rapport à ε).

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et ε pour que $B(x,\varepsilon)$ soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\{x\}$ eſt un ouvert mais que $\{0\}$ ne l'eſt pas.

5) Soit $(u_n)_n$ une suite de réels et $x \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur $(u_n)_n$ pour que $\lim_n u_n = x$.

Exercice 42.— Soient (E,d) un espace métrique et $x \neq y$ deux éléments de E. Montrer qu'il exiſte deux réels $\varepsilon_x > 0$ et $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_x) \cap B(y,\varepsilon_y) = \emptyset$.

Exercice 43.— On dit qu'un nombre réel x eſt décimal si il exiſte un entier $a \in \mathbb{Z}$ et un entier $n \geq 0$ tel que $x = \dfrac{a}{10^n}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

a) Montrer que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ mais que l'inclusion réciproque n'eſt pas vraie.

b) On se donne deux réels $x < y$ et l'on note $\varepsilon = y - x > 0$. Montrer qu'il exiſte un entier n tel que $10^{-n} < \varepsilon$.

c) Expliciter en fonction de x, y et n, un entier a tel que $x < \dfrac{a}{10^n} < y$.

d) En déduire que $\mathbb{D}$ eſt dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 44.— On considère l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ des entiers non nuls et l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (n,m) & \longmapsto & \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right| \end{array}$$

a) Montrer que d eſt une diſtance sur $\mathbb{Z}^*$.

b) Soient $a \in \mathbb{Z}^*$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et $B(a,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre a et de rayon ε. Montrer que

$$n \in B(a,\varepsilon) \Longleftrightarrow \frac{1}{a} - \varepsilon < \frac{1}{n} < \frac{1}{a} + \varepsilon$$

c) Décrire explicitement $B(1,1)$, $B(1,1/2)$ et $B(-2,\pi/4)$.

Exercice 45.— 1.— Soit a un entier non nul. Montrer qu'il exiſte un unique entier $m \geq 1$ tel que 10^{m-1} divise a et 10^m ne divise pas a.

2.— Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1/m$ où $m \geq 1$ eſt l'unique entier tel que 10^{m-1} divise $x - y$ et 10^m ne divise pas $x - y$.

2.a.— Montrer que d eſt une diſtance sur $\mathbb{Z}$.

2.b.— Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tous $x, y \in \mathbb{Z}$, $d(x,y) < \dfrac{1}{p} \Longleftrightarrow 10^p | (x - y)$.

2.c.— En déduire que si, pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = \sum_{k=0}^{n} k.k!$, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers -1 dans l'espace métrique $(\mathbb{Z}, d)$.
(Ind. On pourra commencer par démontrer que $x_n + 1 = (n+1)!$ pour tout n.)

2.d.— Prouver que la suite $(10^n)_n$ converge vers 0 et que la suite $(2^n)_n$ diverge dans $(\mathbb{Z}, d)$.

Exercice 46.— On considère ici l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de sa distance naturelle $d(x,y) = |x-y|$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1.— Pour un réel $x > 0$ donné, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers compris entre 1 et x. On admet le résultat (profond) suivant : $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\simeq} \dfrac{x}{\log x}$.

1.a.— Soit $\lambda > \mu > 0$ deux réels, montrer que $\lim_{x\to+\infty} \pi(\lambda x) - \pi(\mu x) = +\infty$.

1.b.— En déduire que si $a > 0$ est réel, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ il existe $p \in \mathscr{P}$ tel que $a - \varepsilon \leq \dfrac{p}{k} \leq a + \varepsilon$.

2.— Pour une partie $A \subset \mathbb{N} - \{0\}$, on note $\dfrac{[\mathscr{P}]}{[A]} = \left\{ \dfrac{p}{a} / \ p \in \mathscr{P},\ a \in A \right\}$.

2.a.— Déduire du 1.b que si A est infini alors la partie $\frac{[\mathscr{P}]}{[A]}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.

2.b.— Montrer finalement que l'ensemble constitué des rapports de 2 nombres premiers est dense dans $\mathbb{R}^+$

Exercice 47.— On considère $\mathscr{P}$ le plan affine et euclidien et sur $\mathscr{P}$ la distance euclidienne d_2 qui, on le rappelle, est définie pour deux points $M(x,y)$ et $N(a,b)$ par

$$d_2(M,N) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

On note $\mathscr{O}$ l'origine du plan $\mathscr{P}$ et l'on considère l'application d définie, pour $M, N \in \mathscr{P}$, par

$$\begin{aligned} d(M,N) &= d_2(M,N) \text{ si les points } M, N, \mathscr{O} \text{ sont alignés} \\ &= d_2(M,\mathscr{O}) + d_2(\mathscr{O},N) \text{ sinon} \end{aligned}$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathscr{P}$.

2) Décrire les boules ouvertes $B(M_0, r)$ de $\mathscr{P}$ pour d. Pour cela, on distinguera les trois cas suivants :

a) $M_0 = \mathscr{O}$.

b) $M_0 \neq \mathscr{O}$ et $r < d_2(M_0, \mathscr{O})$.

c) $M_0 \neq \mathscr{O}$ et $r \geq d_2(M_0, \mathscr{O})$.

Espaces compacts

Exercice 48.— 1/ Soient X un espace métrique et A, B deux parties compactes de X. Montrer que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont compactes.

2/ Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non vides de E. On note $A + B = \{a + b / \ a \in A,\ b \in B\}$.

a) Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.

b) Montrer que si A et B sont ouvertes alors $A+B$ l'est aussi.

c) Montrer que si A est compacte et B est fermée alors $A+B$ est fermée.

d) Est-il vrai que si A et B sont fermées alors $A+B$ l'est aussi ?

Exercice 49.— Montrer qu'un espace métrique fini est compact.

Exercice 50.— Soit (E,d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On note $U = \{u_n / \ n \in \mathbb{N}\}$.

a) On considère un élément $l \in E-U$. Montrer que $l \in \overline{U}$ si et seulement si l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

b) En déduire que $\overline{U} = U \cup \mathscr{V}\mathscr{A}((u_n)_n)$ où $\mathscr{V}\mathscr{A}((u_n)_n)$ désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

c) Donner un exemple explicite de suite $(u_n)_n$ telle que $U \cap \mathscr{V}\mathscr{A}((u_n)_n) \neq \emptyset$.

d) On suppose maintenant que la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément $l \in E$. Montrer que l'ensemble $\{u_n / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un fermé de E.

e) En déduire que, si $E = \mathbb{R}^p$, alors l'ensemble $\{u_n / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Exercice 51.— On considère l'ensemble $X = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et l'on considère l'application d définie, pour $f,g \in X$, par

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

1) Montrer que d est une distance sur X.

2) On considère la partie $S = \left\{ f \in X / \ \int_0^1 |f(x)|dx = 1 \right\}$. Montrer que S est une partie fermée et bornée de X.

3) Pour tout entier $n \geq 3$, on considère l'application $f_n \in X$ définie par

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & 0 & \text{si } x \in [0,1/n] \cup [3/n,1] \\ & = & n^2x-n & \text{si } x \in [1/n,2/n] \\ & = & -n^2x+3n & \text{si } x \in [2/n,3/n] \end{array}$$

a) Représenter f_n et montrer que $f_n \in S$.

b) Soient $n,m \geq 3$ deux entiers tels que $3n \leq m$. Montrer que $d(f_n,f_m) = 2$.

c) En déduire qu'il n'existe aucune sous-suite de la suite $(f_n)_{n\geq 3}$ qui soit de Cauchy.

d) Montrer finalement que S n'est pas une partie compacte de X. N'est-ce pas paradoxal ?

Espaces complets

Exercice 52.— Soient X un espace métrique et A,B deux parties complètes de X. Montrer que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont complètes.

Exercice 53.— 1/ Soient d et d' deux distances équivalentes sur un ensemble E. Montrer que (E,d) est complet si et seulement si (E,d') l'est aussi.

2/ Soit $\varphi : (E,d) \longrightarrow (F,d')$ une isométrie. Montrer que (E,d) est complet si et seulement si (F,d') l'est aussi.

3/ Soient (E,d) un espace métrique, F un ensemble et $\varphi : E \longrightarrow F$ une bijection.

a) Montrer que d_φ est une distance sur F et que φ est une isométrie.

b) En déduire que (E,d) est complet si et seulement si (F,d_φ) l'est aussi.

4/ On considère l'intervalle $I =]-1,1[$ et sur I la distance usuelle d.

a) Montrer que (I,d) n'est pas complet.

b) Prouver que $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$ est une bijection bicontinue de $\mathbb{R}$ sur I.

c) En déduire que les topologies définies sur I par d et d_φ sont égales.

d) Montrer que (I,d_φ) est complet.

Exercice 54.— On considère $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge dans (E,N) vers la fonction nulle.

b) Montrer qu'en tant que suite de fonctions, la suite $(f_n)_n$ ne converge pas simplement vers la fonction nulle. N'est-ce pas contradictoire?

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in E$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & n\sqrt{n}.x & \text{si } x \in [0,1/n] \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1/n,1] \end{array}$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace (E,N).

b) Montrer que si la suite $(f_n)_n$ converge vers une fonction $f \in E$, alors pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

c) En déduire que (E,N) n'est pas complet.

Exercice 55.— Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_{-1}^1 |f(t)|dt$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E, par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement f_n pour $n = 1,2,3$ et vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que $N(f_n - f_p) \leqslant \sup(2/n, 2/p)$ et en déduire que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy.

c) On suppose qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans (E,N). Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(t)-f(t)|dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(t)-f(t)|dt = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(t)+1|dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(t)-1|dt = 0$$

d) En déduire que

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

e) Prouver finalement que (E,N) n'est pas un espace complet.

Exercice 56.— On considère l'ensemble $E = \mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nul et l'application d définie, pour $p,q \in \mathbb{N}^*$, par

$$\begin{aligned} d(p,q) &= 0 && \text{si } p = q \\ &= 1 + \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} && \text{si } p \neq q \end{aligned}$$

1/ Montrer d est une distance sur E.

2.a/ Pour $a \in \mathbb{N}^*$, décrire la boule ouverte $B(a,\varepsilon)$ en fonction du réel $\varepsilon > 0$. En particulier, montrer qu'il existe un réel $\varepsilon_0(a) > 0$ maximal pour la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0(a)$, $B(a,\varepsilon) = \{a\}$.

2.b/ Déduire de ce qui précède qu'une suite de Cauchy d'éléments de E est nécessairement constante à partir d'un certain rang. En déduire que E est complet.

3/ On considère l'application $f : E \longrightarrow E$, définie pour $p \in E$ par $f(p) = p+1$.

3.a/ Montrer que f ne possède pas de point fixe.

3.b/ Montrer que, pour tout $p,q \in E$, $d(f(p),f(q)) < d(p,q)$.

3.c/ Les propriétés 2.b/, 3.a/ et 3.b/ ne sont-elles pas en contradiction avec un célèbre théorème ?

Continuité

Exercice 57.— Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes

i) f est continue,

ii) $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,

iii) $\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$,

iv) $\forall B \subset Y$, $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subset \overset{\circ}{f^{-1}}(B)$,

sont équivalentes.

Exercice 58.— Soient X un ensemble et d_0 la distance discrête sur X. Montrer que toute application $f : X \longrightarrow Y$, où Y désigne un espace métrique quelconque, est continue.

Exercice 59.— On dit d'un espace métrique (E,d) qu'il vérifie la propriété (APF) si :

(APF) *Pour toute application,* $f : E \longrightarrow E$, *continue, il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $f(x_0) = x_0$

(i.e. toute application continue possède un point fixe.)

1/ On considère deux espaces métriques (E,d) et $(E^{'},d^{'})$ et une bijection $\varphi : E \longrightarrow E^{'}$ telle que φ et φ^{-1} soient des applications continues. Montrer que si E possède la propriété (APF) alors $E^{'}$ la possède aussi.

(Ind. Etant donnée une application continue $f : E^{'} \longrightarrow E^{'}$, on pourra considérer l'application $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.)

2/ On considère $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et le sous-espace métrique $E = [0,1]$. Montrer que E possède la propriété (APF).

(Ind. Etant donnée une application continue $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$ entre les points 0 et 1.)

3/ On considère $a < b$ deux réels.

a) Montrer que la fonction $\varphi(x) = (b-a)x + a$ est un homéomorphisme de $[0,1]$ vers $[a,b]$.

b) En déduire que tous segments de $\mathbb{R}$ possèdent la propriété (APF).

Exercice 60.— 1/ Soit $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que, pour $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$|||M||| = \sup_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|\right)$$

2/ Soit maintenant $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|.\|_1$. Montrer que, pour $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$|||M||| = \sup_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|m_{ij}|\right)$$

3/ On souhaite montrer que si $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ alors il n'est pas automatique que $\|vu\| \leq \|u\|.\|v\|$. Considérons, à cet effet, $E = \mathbb{R}^2$. On a alors $\mathcal{L}(E) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ posons $\|A\| = \sup(|a|,|b|,|c|,|d|)$.

a) Montrer que $\|.\|$ est bien une norme.

b) Calculer $\|A\|$ et $\|A^2\|$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et conclure.

Exercice 61.— On considère, pour un entier $n \geq 1$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ normé par la norme $\|.\|_\infty$. On identifie $\mathcal{L}(E)$ à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on considère, pour $a \in \mathbb{R}$ donné, la matrice $A = (a^{i+j-1})_{1\leq i,j\leq n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & \cdots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & a^{n+1} & \ldots & a^{2n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer $|||A|||$ en fonction de a où $|||.|||$ désigne la norme triple associée à $\|.\|_\infty$.

Exercice 62.— Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(t)|$. Montrer que l'endomorphisme $u : P \longmapsto P^{'}$ n'est pas continue.
(Ind. On pourra considérer la suite $(X^n/n)_n$.)

Exercice 63.— Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Montrer que l'application $x \longmapsto d(x,A)$ est uniformément continue.

Exercice 64.— On considère (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer que $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

Exercice 65.— Soient (E,d) et $(E^{'},d^{'})$ deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E^{'}$ une application continue.

a) Montrer que si K est une partie compacte de E, alors $f(K)$ l'est aussi.

b) On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Expliciter $f^{-1}([-1,1])$.

c) Montrer que si $K^{'}$ est une partie compacte de $E^{'}$ alors $f^{-1}(K^{'})$ n'est pas forcément compacte.

Exercice 66.— Soient A et B deux parties fermées, non vides, et disjointes d'un espace métrique X.

1/ Montrer que $d(x,A) + d(x,B) > 0$ pour tout $x \in X$

2/ Pour $x \in X$, on pose

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

a) Montrer que l'application f est continue.

b) Donner la valeur $f(x)$ lorsque $x \in A$ (resp. $x \in B$).

3/ En déduire qu'il existe deux ouverts U, V de X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.