Des sous-corps d'indice fini d'un corps hensélien ou complet

Lemme 1.– (Critère d'Eisenstein) *Soient (k, v) un corps discrêtement valué (v est supposé normalisée) et $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in k[x]$. Si $v(a_0) = 1$ et $v(a_i) \geq 1$ pour tout $i = 1, \cdots, n-1$ alors P est irréductible.*

Lemme 2.– (Approximation forte des valuations) *Soient k un corps et $v_1, \cdots, v_n$ des valuations sur k deux-à-deux non équivalente. Si $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in v_1(k) \times \cdots \times v_n(k)$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in k^n$ alors il existe $x \in K$ tel que $v_i(x - a_i) = \gamma_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.*

Théorème principal.– *Soit (k, v) un corps hensélien. Si v_0 désigne une valuation sur k non équivalente à v, alors v_0 ne peut être discrête.*

Preuve : Supposons que v_0 soit discrête et normalisée. Soit $a \in k$ tel que $v(a) = 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in v(k)$. Par application du lemme 2, il existe deux éléments $a, b \in k$ tels que

$$\begin{cases} v(b-a) &= \alpha \\ v_0(b) &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(c) &= \alpha \\ v_0(c) &= 1 \end{cases}$$

En application du lemme 1 pour (k, v_0), le polynôme $P(x) = x^2 + bx + c$ est irréductible. Maintenant, la réduction modulo v de P vaut $\overline{P}(x) = x^2 + \overline{b}x = x^2 + \overline{a}x = x(x + \overline{a})$, qui est visiblement à racines simples. Puisque (k, v) est hensélien, on en déduit que P est réductible, ce qui est absurde.

□

Corollaire 1.– *Soit (k, v) un corps discrêtement valué hensélien. Tout endomorphisme de k est continu.*

Preuve : Soit σ un endomorphisme. L'application $v_0 = v \circ \sigma$ est une valuation discrête sur k, elle est donc équivalente à v d'après le théorème principal et donc σ est continu.

□

Corollaire 2.– *Soit (k, v) un corps discrêtement valué non complet et $(\widehat{k}, \widehat{v})$ son complété. Si $[\widehat{k} : k] < +\infty$ alors $\widehat{k}/k$ est une extension purement inséparable.*

Preuve : Supposons $[\widehat{k} : k] < +\infty$ et considérons S la clôture séparable de k dans $\widehat{k}$. Notons v_S la restriction de $\widehat{v}$ à S. On sait que $v(k) = \widehat{v}(\widehat{k})$ et $k/v = \widehat{k}/\widehat{v}$. On a donc $v(k) = v_S(S)$ $(e = 1)$ et $k/v = S/v_S$ $(f = 1)$. Soit w une valuation sur $\widehat{k}$ qui relève v. Puisque $[\widehat{k} : k]$ est fini, w est discrête et le théorème principal assure alors que w est équivalente à v et, par suite, que $w = v$. Il y a donc un unique relevé de v à $\widehat{k}$, ce qui implique aussi qu'il n'y a qu'un seul relevé de v à S. Puisque S/k est séparable, on a donc $[S : k] = ef = 1$.

□

Corollaire 3.– *Si (k, v) un corps discrêtement valué complet alors tout sous-corps $k_0 \subset k$ d'indice fini et parfait est complet pour v.*

Preuve : Si k_0 désigne un sous-corps de k, alors puisque k est complet on a $\widehat{k_0} \subset k$. Si $[k : k_0] < +\infty$ alors $[\widehat{k_0} : k_0] < +\infty$ et le corollaire 2 montre que $\widehat{k_0} = k_0$ puisque k_0 est supposé parfait.

□

Corollaire 4.– *Si (k, v) est un corps discrêtement valué hensélien alors tout sous-corps $k_0 \subset k$ d'indice fini est hensélien pour v.*

Preuve : Notons $(k_0^\sharp, v_0^\sharp)$ l'hensélisé de (k_0, v). Puisque (k, v) est hensélien, $k_0^\sharp$ se plonge dans k en repectant v, on peut donc considérer que $k_0 \subset k_0^\sharp \subset k$ et que $v_0^\sharp = v$. On a alors $v(k_0) = v(k_0^\sharp)$ (propriété de l'hensélisation). Si w est une valuation de $k_0^\sharp$ relevant v, alors puisque $[k_0^\sharp : k_0] < +\infty$, w est discrête et donc, d'après le théorème principal, $w = v$. L'extension $k_0^\sharp/k_0$ étant séparable (autre propriété de l'hensélisation), on a alors $[k_0^\sharp : k_0] = [k_0^\sharp/v : k_0/v]$. Par ailleurs, le corps $k_0^\sharp$ se plonge dans le complété $\widehat{k_0}$ de k_0 et puisque $[\widehat{k_0}/\widehat{v} : k_0/v] = 1$, on trouve finalement $[k_0^\sharp : k_0] = [k_0^\sharp/v : k_0/v] = 1$.
□

Remarque : Le corollaire 4 est faux en toute généralité si v n'est plus supposée discrête. En effet, considérons un nombre premier $p \geq 3$ et un relevé v_p de la valuation p-adique à $\overline{\mathbb{Q}}$. Il est clair que $\overline{\mathbb{Q}}/v_p = \overline{\mathbb{F}}_p$ et comme $[\overline{\mathbb{Q}}/v_p : \mathbb{Q}^{reel}/v_p]$, on a aussi $\mathbb{Q}^{reel}/v_p = \overline{\mathbb{F}}_p$. Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébriquement clos, donc hensélien pour v_p mais le corps $\mathbb{Q}^{reel}$ ne peut pas l'être puisqu'alors le polynôme $x^2 + 1$ possèderait une racine.

Cas des corps de séries de Laurent. On se donne un corps k de caractéristique p et $k((t))$ le corps de série de Laurent à coéfficients dans k.

Proposition 1.– *Si pour tout entier $n \geq 1$, $[k : k^{p^n}]$ est fini, alors tout sous-corps d'indice fini de $k((t))$ contenant k est complet.*

Preuve : Soit $L \subset k((t))$ d'indice fini. Le complété de L est un sous-corps de $k((t))$ contenant k, il est donc de la forme $k((S))$ où $v(S) > 0$. On peut donc supposer que ce complété est égale à $k((t))$ lui-même. Le corollaire 2 assure alors que $k((t))/L$ est purement inséparable et donc de dimension p^n pour un certain entier n. Tout élément $S \in k((t))$ est radiciel sur L et donc $S^{p^n} \in L$. On a donc $k^{p^n}((t^{p^n})) = k((t))^{p^n} \subset L$. Maintenant $[k((t)) : k^{p^n}((t^{p^n}))] = p^n.[k : k^{p^n}] < +\infty$. L'extension $L/k^{p^n}((t^{p^n}))$ est donc finie et comme $k^{p^n}((t^{p^n}))$ est complet pour v, il en est de même de L.
□

Exemple d'un sous-corps d'indice fini de $k((t))$, contenant k, mais non complet.– On considère le corps de fractions $k = \mathbb{F}_p(x_0, x_1, \cdots)$ en une infinité dénombrable de variables et à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On a $k^p = \mathbb{F}_p(x_0^p, x_1^p, \cdots)$ et donc $[k : k^p] = +\infty$. Il convient tout de même de constater que l'extension $k((t))/k^p((t))$ est algébrique, tout élément de $k((t))$ étant d'ordre 1 ou p sur $k^p((t))$. On considère alors le corps

$$L = k^p((t))(x_0, x_1, \cdots) = \bigcup_{n \geq 0} k^p(x_0, \cdots, x_n)((t))$$

On a visiblement $k \subset L$ et, par ailleurs, il est clair que la série $S_0(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots$ n'est pas un élément de L.

Soit maintenant $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-corps M, $L \subset M \subset k((t))$, tels que $S \notin M$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est certainement inductif pour l'inclusion et, d'après Zorn, il existe donc un élément maximal $M_0 \in \mathscr{E}$. Puisque $S_0 \notin M_0$ et que S_0 est radiciel d'ordre p sur L, on en déduit que $[M_0(S_0) : M_0] = p$.

Soit maintenant $S \in k((t)) - M_0$ une série quelconque. L'élément S étant radiciel de degré p sur L, on a $[M_0(S) : M_0] = p$. Par maximalité de M_0, on a $S_0 \in M_0(S)$ et donc $M_0(S) = M_0(S_0)$. Puisque S est quelconque, on en déduit finalement que $M_0(S_0) = k((t))$.

Ainsi, $[k((t)) : M_0] = p$ et le corps M_0 n'est pas complet. En effet, la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geq 0$ par $u_n = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$, est une suite d'éléments de $L \subset M_0$, qui est visiblement de Cauchy, mais qui ne peut converger dans M_0 car sa limite dans $k((t))$ est justement S_0.