Autour de la clôture résoluble

La *clôture abélienne* (resp. *clôture résoluble*) d'un corps k est le corps k^{ab} (resp. k^{sol}) obtenu en prenant le compositum de toutes extensions abéliennes (resp. résolubles) finies de k. Puisque le produit fibré de deux groupes abéliens (resp. résolubles) est encore abélien (resp. résoluble), on voit que le groupe $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$ (resp. $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sol}}/k)$) est un groupe abélien (resp. pro-résoluble). Les extensions galoisiennes finies de k incluses dans k^{ab} (resp. k^{sol}) sont donc toutes abéliennes (resp. résolubles).

On considère un corps k de caractéristique 0 et l'on définit la suite de corps $(k^{\mathrm{ab[n]}})_n$ de la manière suivante : $k^{\mathrm{ab[0]}} = k$ et pour tout $n \geq 0$, $k^{\mathrm{ab[n+1]}} = (k^{\mathrm{ab[n]}})^{\mathrm{ab}}$. On a alors :

Proposition 1.— *a) Pour tout $n \geq 0$, $k^{\mathrm{ab[n]}}/k$ est galoisienne.*

b) $k^{\mathrm{sol}} = \bigcup_n k^{\mathrm{ab[n]}}$.

Preuve : a) Pour $n = 1$ c'est évident. Remarquons au passage que $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \subset k^{ab}$ et donc que pour $n \geq 1$, $k^{\mathrm{ab[n]}}$ contient toutes les racines de l'unité.

Supposons que pour $n \geq 1$, $k^{\mathrm{ab[n]}}/k$ soit galoisienne. Puisque $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \subset k^{ab[n]}$, la théorie de Kummer assure que le corps $k^{\mathrm{ab[n+1]}}$ s'obtient en adjoignant à $k^{\mathrm{ab[n]}}$ les éléments $\sqrt[p^m]{\lambda}$, pour tout premier p, tout entier m et tout élément $\lambda \in k^{\mathrm{ab[n]}}$. Ainsi, pour prouver que $k^{\mathrm{ab[n+1]}}/k$ est galoisienne, il suffit de montrer que les k-conjugués de $\sqrt[p^m]{\lambda}$ sont des éléments de $k^{\mathrm{ab[n+1]}}$. Par hypothèse, les k-conjugués de λ sont dans $k^{\mathrm{ab[n]}}$. Si on les note $\lambda_1, \cdots, \lambda_h$ alors les k-conjugués de $\sqrt[p^m]{\lambda}$ sont de la forme $\xi_{p^m}^i \sqrt[p^m]{\lambda_j}$ et ces derniers éléments sont bien dans $k^{\mathrm{ab[n+1]}}$, ce qui prouve l'assertion.

b) Soit M/k une extension résoluble et $k = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ une tour d'extension telle que M_{i+1}/M_i soit abélienne pour $i = 0, \cdots, n-1$. L'extension $k^{\mathrm{ab[i]}}M_{i+1}/k^{\mathrm{ab[i]}}M_i$ est alors abélienne à son tour, de sorte que, par récurrence immédiate, on a $M_i \subset k^{\mathrm{ab[i]}}$ pour tout i. On en déduit que $M \subset k^{\mathrm{ab[n]}}$ et donc que $k^{\mathrm{sol}} \subset \bigcup_n k^{\mathrm{ab[n]}}$.

Réciproquement, on a $k \subset k^{\mathrm{sol}}$. Si pour $n \geq 0$ on suppose que $k^{\mathrm{ab[n]}} \subset k^{\mathrm{sol}}$, alors au rang $n+1$, on considère un élément $\alpha \in k^{\mathrm{ab[n+1]}}$ et l'on note M la clôture galoisienne de $k(\alpha)$ sur k. Comme $k^{\mathrm{ab[n+1]}}/k$ est galoisienne, on a donc $M \subset k^{\mathrm{ab[n+1]}}$ et il existe $\beta \in k^{\mathrm{ab[n+1]}}$ tel que $M = k(\beta)$. L'extension $k^{\mathrm{ab[n]}}(\beta)/k^{\mathrm{ab[n]}}$ est alors abélienne, disons de groupe G.

Si P désigne le polynôme minimal de β sur $k^{\mathrm{ab[n]}}$, on considère M_0 la clôture galoisienne du corps engendré sur k par les coefficients de P. Puisque $k^{\mathrm{ab[n]}}/k$ est galoisienne, on a $M_0 \subset k^{\mathrm{ab[n]}}$ et l'on a par ailleurs $M_0 \subset k(\beta)$. L'extension $M_0(\beta)/M_0$ est abélienne de groupe G et l'extension M_0/k est résoluble. Comme $M_0(\beta) = k(\beta)$ et que $k(\beta)/k$ est galoisienne, on en déduit finalement que $k(\beta)/k$ est résoluble, ce qui prouve que $\alpha \in k^{\mathrm{sol}}$.

□

Corollaire 2.— *1) Pour tous corps k_0, k_1 de caractéristique nulle, on a $k_0 \subset k_1 \Longrightarrow k_0^{sol} \subset k_1^{sol}$.*

2) Pour tout corps k de caractéristique nulle, on a $k^{sol} = k^{sol\,sol}$, en particulier si L est un corps tel que $k \subset L^{sol}$ alors $k^{sol} \subset L^{sol}$.

Preuve : 1) Si L/k_0 est une extension abélienne, alors Lk_1/k_1 est aussi abélienne, si bien que $k^{ab} \subset L^{ab}$. En appliquant par récurrence cette propriété, on en déduit que $k_1^{ab[n]} \subset k_2^{ab[n]}$ pour tout $n \geq 0$ et donc que $k^{sol} \subset L^{sol}$ par application de la proposition 1.b).

2) Par application du 1), on a $k^{sol} \subset k^{sol\,sol}$. Pour montrer l'inclusion réciproque, en vertu de la proposition 1.b), il suffit de montrer que $k^{sol\,ab} = k^{sol}$. Soit alors $L = k^{sol}(\alpha)$ une extension finie abélienne. Si M désigne le corps engendré sur k par les coefficients du polynôme minimal de α sur k^{sol} alors d'après la proposition 1.b) il existe un entier n tel que $M \subset k^{ab[n]}$. L'extension $M(\alpha)/M$ est abélienne, il en donc de même de l'extension $k^{ab[n]}(\alpha)/k^{ab[n]}$ et ainsi $\alpha \in k^{ab[n+1]} \subset k^{sol}$.

□

Corollaire 3.— *Soit L un corps de caractéristique nulle. Les propriétés suivantes*

i) L est résolublement clos (i.e. $L = L^{sol}$),

ii) L ne possède aucune extension résoluble non triviale,

iii) L ne possède aucune extension abélienne non triviale,

iv) L ne possède aucune extension cyclique non triviale,

v) $\mathbb{Q}^{ab} \subset L$ et, pour tout $n \geq 1$, $L^n = L$

sont équivalentes.

Preuve : L'équivalence $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv)$ est quasi-immédiate. L'équivalence $iv) \Leftrightarrow v)$ découle de la théorie de Kummer.

Proposition 4.— *Soit K un corps de caractéristique nulle tel que $\mathbb{Q}^{ab} \subset K$ et L/K une extension finie. Si L est résolublement close, alors K l'est aussi.*

Preuve : Supposons que K ne soit pas séparablement clos. Il existe alors une p-extension cyclique de K pour un certain nombre premier p et donc un élément $a \in K$ tel que le polynôme $X^p - a$ soit irréductible. La théorie de Kummer montre que le polynôme $X^{p^n} - a$ est aussi irréductible et ce dernier engendre une extension cyclique K_n de degré p^n sur K. Choisissons un entier n tel que $p^n > [L.K]$, l'extension $L.K_n/L$ est alors non trivial et cyclique, ce qui assure que L n'est pas résolublement clos.

□

Corollaire 5.— *Si L désigne un corps de caractéristique nulle résolublement clos, alors aucune extension finie M/L telle que* $\mathrm{Aut}_L M \neq 0$ *n'est résolublement close (en particulier, aucune extension galoisienne, finie et stricte de L n'est résolublement close).*

Preuve : Si $\sigma \in \mathrm{Aut}_L M$ désigne un élément d'ordre $n \geq 2$ alors l'extension $M/M^{<\sigma>}$ est cyclique d'ordre n et donc $M^{<\sigma>}$ n'est pas résolublement clos. La proposition précédente assure alors que M ne l'est pas non plus.

□

Dans les premières éditions de "cohomologie galoisienne" de J.P. Serre, l'auteur se posait la question de savoir si la nullité du groupe de Brauer d'un corps entrainait la nullité du groupe de Brauer de toutes ses extensions algébriques. Dans les dernières versions, il présente une réponse négative à cette question sous forme d'exercice attribué à M. Auslander (voir II.§3.1. de la dernière édition). Nous détaillons ici cet exercice.

Considérons un corps k_0 de caractéristique 0 et contenant toutes les racines de l'unité.

Etudions l'arithmétique du corps de séries de Laurent $k_0((t))$. Puisque k_0 est de caractéristique nulle, le théorème de Puiseux assure que le corps de séries de Puiseux $\mathrm{Puis}(\overline{k_0})$ est algébriquement clos. La description de $\overline{k_0((t))}$ dans $\mathrm{Puis}(\overline{k_0})$ s'obtient alors de la manière suivante : si l'on pose

$$\widetilde{k_0((t))} = \bigcup_{L/k \text{ finie}} L((t))$$
$$\mathrm{Puis}(k_0) = \bigcup_{n\geq 1} k_0((t^{1/n}))$$

alors on a $\overline{\mathrm{Puis}(k_0)} = \widetilde{k_0((t))}.\mathrm{Puis}(k_0)$ (ceci se fait en remarquant qu'une série de Puiseux à coefficients dans $\overline{k_0}$ est algébrique sur $k_0((t))$ si et seulement si le corps engendré sur k_0 par ses coefficients est de dimension finie sur k_0). Puisque ces deux extensions sont linéairement disjointes, on en déduit le parallélogramme galoisien suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{k_0((t))} \arrow[d, dash, "G_{k_0}"] \\
\widetilde{k_0((t))} \arrow[ur, dash, "\widehat{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, dash, "G_{k_0}"'] & \mathrm{Puis}(k_0) \\
k_0((t)) \arrow[ur, dash, "\widehat{\mathbb{Z}}"'] &
\end{tikzcd}$$

(où $G_{k_0} = \mathrm{Gal}(\overline{k_0}/k_0)$) et, par suite, que $\mathrm{Gal}(\overline{k_0((t))}/k_0((t))) = G_{k_0} \times \widehat{\mathbb{Z}}$. La présence de ce produit cartésien montre que si G_{k_0} n'est pas trivial alors la dimension cohomologique de $\mathrm{Gal}(\overline{k_0((t))}/k_0((t)))$ est certainement plus grande que 2, ce qui assure en particulier qu'il existe des extension algébrique de $k_0((t))$ à groupe de Brauer non nul.

On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{Puis}(k_0)/k_0((t))) \longrightarrow \mathrm{Br}(k_0((t))) \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathrm{Puis}(k_0))$$

Le groupe de Galois absolu de $\mathrm{Puis}(k_0)$ est isomorphe à G_{k_0}, de sorte que si l'on suppose que G_{k_0} est de dimension cohomologique $\mathrm{cd}(G_{k_0}) \leq 1$, alors on a $\mathrm{Br}(\mathrm{Puis}(k_0)) = 0$ et par suite

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Puis}(k_0)/k_0((t))) \simeq \mathrm{Br}(k_0((t)))$$

Par ailleurs, on a

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Puis}(k_0)/k_0((t))) = \mathrm{H}^2(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathrm{Puis}(k_0)^*) = \varinjlim_n \mathrm{H}^2(k_0((t^{1/n})), k_0((t))) = \varinjlim_n \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k_0((t^{1/n}))^*)$$

Les groupes étant cyclique, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k_0((t^{1/n}))^*) \simeq k_0((t))^*/N(k_0((t^{1/n}))^*)$$

où N désigne la norme de l'extension $k_0((t^{1/n}))/k_0((t))$ et l'isomorphisme canonique considéré vérifie que, si $n|m$, alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k_0((t^{1/m}))^*) \arrow[r] & k_0((t))^*/N(k_0((t^{1/m}))^*) \\
\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k_0((t^{1/n}))^*) \arrow[r] \arrow[u] & k_0((t))^*/N(k_0((t^{1/n}))^*) \arrow[u, "\wedge \frac{m}{n}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On a en fait $k_0((t))^*/N(k_0((t^{1/n}))^*) \simeq k_0^*/k_0^{n*}$. Pour voir cet isomorphisme considérons l'épimorphisme $\pi : k_0((t^{1/n}))^* \longrightarrow k_0^*$ qui à une série de Puiseux, associe le coefficient de son terme de plus bas degré (i.e. pour une série $S \neq 0$, l'évaluation en $t = 0$ de la série $t^{-v(S)}S(t)$). L'image par π de $N(k_0((t^{1/n}))^*$ est le groupe k_0^{n*} et le noyau de π est $\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{Z}} t^h(1 + tk_0[[t]])$. Puisque l'on peut extraire une racine n-ième (pour le produit au sens de Cauchy) de tout élément de $1+tk_0[[t]]$ dans $1+tk_0[[t]]$, on en déduit que Ω est aussi le noyau de $N(k_0((t^{1/n}))^* \longrightarrow k_0^{n*}$, si bien que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & N(k_0((t^{1/n}))^* \arrow[r] \arrow[dd] & k_0^{n*} \arrow[r] \arrow[dd] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Omega \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & k_0((t))^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & k_0^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & \dfrac{k_0((t))^*}{N(k_0((t^{1/n}))^*)} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \dfrac{k_0^*}{k_0^{n*}} \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

qui assure l'existence de l'isomorphisme annoncé. On voit alors que, pour tout $n \geq 1$, on peut choisir un isomorphisme $\varphi_n : \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k_0((t^{1/n}))^*) \longrightarrow k_0^*/k_0^{n*}$ de sorte que si $n|m$ alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k_0((t^{1/m}))^*) \arrow[r, "\varphi_m"] & k_0^*/k_0^{m*} \\
\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k_0((t^{1/n}))^*) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[u] & k_0^*/k_0^{n*} \arrow[u, "\wedge \frac{m}{n}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Si l'on suppose $\mathrm{cd}(G_{k_0}) \leq 1$ on a alors :

$$\mathrm{Br}(k_0((t))) \simeq \varinjlim_n k_0^*/k_0^{n*}$$

Puisque $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \subset k_0$, les applications $k_0^*/k_0^{m*} \xrightarrow{\wedge \frac{m}{n}} k_0^*/k_0^{m*}$ sont injectives. En vertu des résultats établis précédemment sur les clôtures résolubles, on en déduit que, si $\mathrm{cd}(G_{k_0}) \leq 1$, alors

$$\mathrm{Br}(k_0((t))) = 0 \Longleftrightarrow k_0 \text{ est résolublement clos}$$

Finalement, on obtient le résultat suivant :

Proposition 6.— *Si k_0 désigne un corps de caractéristique* 0 *résolublement clos et non algébriquement clos, tel que G_{k_0} soit de dimension cohomologique ≤ 1, alors* $\mathrm{Br}(k_0((t))) = 0$ *et il existe des extensions algébriques de $k_0((t))$ à groupes de Brauer non nul (par exemple tous les corps $L((t))$ où L/k_0 désigne une extension galoisienne finie non triviale).*

Un exemple de tel corps eﬆ obtenu en considérant $k_0 = \mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}$. En effet, le dimension cohomologique de $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ eﬆ ≤ 1 et comme $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \subset \mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}$, il en eﬆ de même pour $\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}$. Par ailleurs, $\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}} \neq \overline{\mathbb{Q}}$ puisque l'on sait réaliser sur $\mathbb{Q}$ les groupes alternés.