Un exemple d'espace topologique non quasi-compact où toute suite possède une valeur d'adhérence

Soient E un ensemble indénombrable et $\mathscr{P}_\omega(E)$ l'ensemble des parties dénombrables de E. Pour $X \in \mathscr{P}_\omega(E)$, on note

$$\Omega_X = \{Y \in \mathscr{P}_\omega(E) / \ Y \subset X\}$$

Pour tout $X, Y \in \mathscr{P}_\omega(E)$, on a $\Omega_X \cap \Omega_Y = \Omega_{X\cap Y}$, si bien que l'ensemble

$$\mathscr{B} = \{\Omega_X / \ X \in \mathscr{P}_\omega(E)\}$$

est une base d'ouverts d'une certaine topologie $\mathscr{T}$ sur $\mathscr{P}_\omega(E)$.

• L'espace $(\mathscr{P}_\omega(E), \mathscr{T})$ n'est pas quasi-compact. En effet, la famille $\mathscr{B}$ est un recouvrement d'ouverts de $\mathscr{P}_\omega(E)$ et si l'on pouvait en extraire un recouvrement fini $\{\Omega_{X_1}, \cdots, \Omega_{X_n}$, alors pour tout $X \in \mathscr{P}_\omega(E)$, on aurait $X \subset X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Les parties $X_1, \cdots, X_n$ étant dénombrables, il en est de même de $X_1 \cup \cdots \cup X_n$. L'ensemble E étant indénombrable, la partie $E - X_1 \cup \cdots \cup X_n$ l'est aussi et il existe donc une partie $X \subset E - X_1 \cup \cdots \cup X_n$ dénombrable, ce qui constitue une absurdité.

• Toute suite $(X_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{P}_\omega(E)$ converge pour $\mathscr{T}$ (et donc possède une valeur d'adhérence). En effet, les parties X_n étant dénombrables, il en est de même de la partie $X = \bigcup_n X_n$. Si Ω désigne un ouvert contenant X, alors par définition de la topologie $\mathscr{T}$, il existe $Y \in \mathscr{P}_\omega(E)$ telle que $X \in \Omega_Y \subset \Omega$. La condition $X \in \Omega_Y$ équivaut à l'inclusion $X \subset Y$ et comme pour tout $n \geq 0$, $X_n \subset X \subset Y$, on en déduit que $X_n \in \Omega_Y \subset \Omega$. L'élément X est donc bien une limite de la suite $(X_n)_n$.